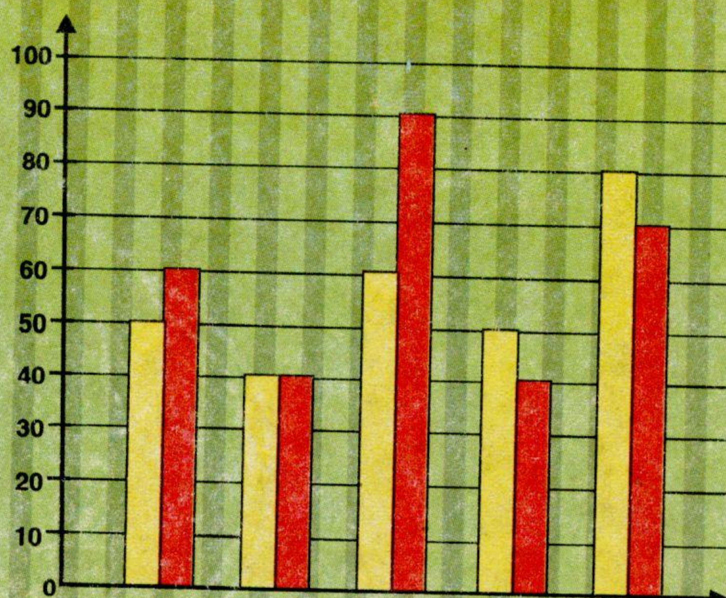
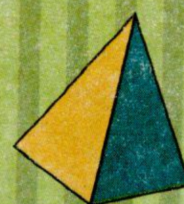
سب کے لیے تعلیمی مہم پروگرام
سب پڑھیں۔ سب بڑھیں

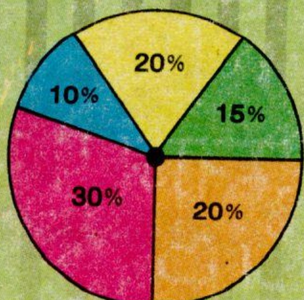
مفت تقسیم

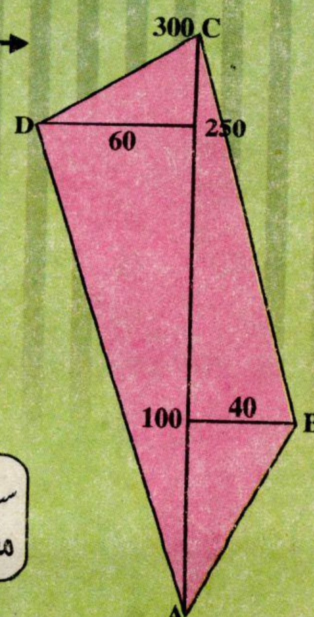
درجہ - 8

حساب









سب کے لیے تعلیمی مہم پروگرام کے تحت اسکولی بچّوں کے لیے درسی کتابیں برائے مفت تقسیم شائع کی گئیں۔ اس کتاب کی خرید وفروخت قانوناً جرم ہے۔

بہار معیاری تعلیمی مہم (بہار ایجوکیشن پروجیکٹ کونسل) کی
جانب سے چلائی جارہی بیداری مہم
سمجھیں ـــــ سیکھیں''

معیاری تعلیمی مہم کے بیس رہنما اصول

1. اسکولوں کا وقت سے کھلنا اور بند ہونا۔
2. وقت پر تعلیمی سیشن کا انعقاد۔
3. ہر ایک بچہ اور استاد کی اسکول کے وقت میں، اسکول میں موجودگی۔
4. ہر ایک بچہ اور ہر ایک استاد سیکھنے۔سکھانے کے عمل میں غرق ہو۔
5. اساتذہ کو بچوں کے تعلیمی معیار کی واقفیت اور اس کے تئیں مستعدی۔
6. مسلسل اور گہرائی کے ساتھ صلاحیتوں کی جانچ۔
7. درجہ۔1 کے لئے خاص طور پر کُل وقتی اساتذہ۔
8. اسکول کے سبھی درجات میں بلیک بورڈ کا مکمل طور سے استعمال۔
9. سبھی درجات میں روزانہ کے تعلیمی ٹائم ٹیبل کی دستیابی اور اس کا استعمال۔
10. آخری گھنٹی میں کھیل کود، آرٹ اور ثقافتی سرگرمیاں۔
11. اسکول میں دستیاب کرائی گئیں کہانی کی کتابیں اور کھیل کود کے سامانوں کا استعمال۔
12. Menu کے مطابق دوپہر کے کھانے (Mid-day meal) کی پابندی کے ساتھ روزانہ تقسیم۔
13. فعال بچوں کا پارلیامنٹ اور مینا منچ۔
14. صاف ستھرے بچے اور صاف ستھرا اسکول۔
15. دستیاب پینے کے پانی کا انتظام اور بیت الخلاء کا استعمال۔
16. اسکول کے احاطے میں باغبانی۔
17. اسکولوں میں دستیاب کرائے گئے گرانٹ کا استعمال۔
18. سبھی بچوں کے پاس اپنے اپنے درجہ کی درسی کتابوں کی دستیابی۔
19. اسکول کی انتظامیہ کمیٹی کی پابندی سے ہونے والی میٹنگ میں تعلیم کے معیار (Quality) پر چرچا۔
20. اسکول میں ہر ایک درجہ کے اساتذہ اور گارجین کے ساتھ تبادلۂ خیال۔

حساب

برائے درجہ-8

(تیار کردہ: صوبائی کونسل برائے تعلیمی تحقیق وتربیت (SCERT) بہار، پٹنہ)

بہار اسٹیٹ ٹکسٹ بک پبلشنگ کارپوریشن لمیٹڈ، پٹنہ

ڈائرکٹر (پرائمری ایجوکیشن) محکمہ تعلیم، حکومت بہار سے منظور

صوبائی کونسل برائے تعلیمی تحقیق وتربیت (SCERT) پٹنہ کے تعاون سے پوری ریاست بہار کے لیے

سبھی کے لئے تعلیمی مہم پروگرام (.S.S.A) کے تحت
اسکولی بچوں کے لئے درسی کتابیں برائے
مفت تقسیم
شائع کی گئیں۔ اس کتاب کی خرید وفروخت قانوناً جرم ہے۔

S.S.A. 2014-15 42,059

☆ شائع کردہ ☆

بہار اسٹیٹ ٹکسٹ بک پبلشنگ کارپوریشن لمیٹڈ، پٹنہ 800001

پاٹھیہ پستک بھون، بدھ مارگ، پٹنہ۔800001

مطبوعہ: حِبا پرنٹنگ ورکس، پٹنہ (ٹکسٹ کے لئے 70G.S.M. کا H.P.C سفید واٹرمارک Cream Wove کاغذ استعمال میں لایا گیا اور سرورق کے لئے 130 G.S.M واٹرمارک H.P.C کا سفید کاغذ استعمال میں لایا گیا ہے Size: 24x18cm

پیش لفظ

محکمہ تعلیم، حکومت بہار کے فیصلے کے مطابق، اپریل 2009ء سے پہلے مرحلہ میں ریاست کے درجہ IX کے طلباء وطالبات کے لئے نئے نصاب کو نافذ کیا گیا۔ اسی کے تحت تعلیمی سال 11-2010 کے لئے درجہ I، III، VI اور X کی تمام لسانی اور غیر لسانی درسی کتابوں کا نصاب نافذ کیا گیا۔

اس نئے نصاب کے تحت قومی کونسل برائے تعلیمی تحقیق وتربیت (NCERT)، نئی دہلی کے ذریعہ تیار کردہ درجہ X کے حساب (ریاضی) اور سائنس نیز صوبائی کونسل برائے تعلیمی تحقیق وتربیت (SCERT)، بہار، پٹنہ کے ذریعہ تیار کردہ درجہ I، III، VI اور X کی تمام درسی کتابیں بہار اسٹیٹ ٹکسٹ بک پبلشنگ کارپوریشن لمیٹڈ کی جانب سے سرورق کی ڈیزائننگ کر کے شائع کی گئیں۔ اس سلسلے کی کڑی کو آگے بڑھاتے ہوئے تعلیمی سال 2012-2011 کے لئے درجہ II، IV اور VII کی نئی درسی کتابیں صوبے کے طلباء وطالبات کے لئے فراہم کی گئیں اور تعلیمی سال 13-2012 کے لئے درجہ V اور VIII کی نئی کتابیں دستیاب کرائی گئیں۔ ساتھ ہی ساتھ درجہ II، IV اور VII کی کتابوں کا نیا ترمیم واضافہ شدہ ایڈیشن بھی اسی سال ایس سی ای آر ٹی، بہار، پٹنہ کے تعاون سے شائع کیا گیا!

ریاست بہار میں معیاری اسکولی تعلیم کے لئے معزز وزیر اعلیٰ، بہار جناب نتیش کمار، وزیر تعلیم جناب پی کے شاہی اور محکمہ تعلیم کے پرنسپل سکریٹری، جناب امرجیت سنہا کی رہنمائی کے تئیں ہم تہہ دل سے شکر گزار ہیں۔

این سی ای آر ٹی، نئی دہلی اور ایس سی ای آر ٹی، بہار، پٹنہ کے ڈائرکٹر صاحبان کے بھی ممنون ہیں، جن کا بیش قیمت تعاون ہمیں ملا۔

بہار اسٹیٹ ٹکسٹ بک پبلشنگ کارپوریشن لمیٹڈ طلباء، سرپرستوں، معلموں نیز ماہرین تعلیم کے تبصروں اور مشوروں کا ہمیشہ خیر مقدم کرے گا، تاکہ ریاست کو ملک کے تعلیمی شعبہ میں بلند مقام حاصل ہو سکے۔

جے۔ کے۔ پی۔ سنگھ I.R.P.S.
مینجنگ ڈائرکٹر

بہار اسٹیٹ ٹکسٹ بک پبلشنگ کارپوریشن، لمیٹڈ

رہنمائی درسی کتب، ڈیولپمنٹ کوآرڈی نیشن کمیٹی

☆ جناب راہل سنگھ — اسٹیٹ پروجیکٹ ڈائریکٹر بہار ایجوکیشن پروجیکٹ کونسل، پٹنہ

☆ جناب حسن وارث — ڈائرکٹر ایس سی ای آر ٹی، پٹنہ

☆ جناب مدھوسودن پاسوان — پروگرام آفیسر، بہار ایجوکیشن پروجیکٹ کونسل، پٹنہ

☆ جناب امت کمار — اسسٹنٹ ڈائرکٹر، پرائمری ایجوکیشن، محکمۂ تعلیم، حکومت بہار

☆ جناب رام شرنا گت سنگھ — جوائنٹ ڈائرکٹر، محکمۂ تعلیم، حکومت بہار، پٹنہ

☆ ڈاکٹر سید عبدالمعین — صدر، ٹیچرس ایجوکیشن، ایس سی ای آر ٹی، پٹنہ

☆ ڈاکٹر شویتا شانڈلیہ — ایجوکیشن اکسپرٹ، یونیسیف، پٹنہ

☆ ڈاکٹر گیان دیومنی ترپاٹھی — پرنسپل مستری کالج آف ایجوکیشن اینڈ مینجمنٹ، حاجی پور

کمیٹی برائے فروغ درسی کتاب مع رہنما اصول

☆ ڈاکٹر ہردیا کانت دیون، ودیا بھون سوسائٹی، اُدے پور، راجستھان

☆ ڈاکٹر انل کمار تیوتیا، سنیئر لکچرر، ایس سی ای آر ٹی، دہلی

☆ ڈاکٹر ستیو یر، وتعلیمی ڈائریکٹیریٹ، دہلی

مجلس مصنفین:

1. جناب اندر موہن سنہا چھابڑا، ودیا بھون سوسائٹی، اُدے پور، راجستھان
2. جناب منوج کمار جھا، راجکیہ آدرش وپن مڈل ودیالیہ، بتیا
3. جناب دلیپ کمار، مدھیہ ودیالیہ گکڑیا، نورسرائے، نالندہ
4. جناب مرتیونجن کمار اوجھا، اپ گریڈیڈ مڈل اسکول پوگا برہڑہ، بھوجپور
5. جناب راجندر شرما، وردھا مدھیہ ودیالیہ، گیا

6. جناب ناگیندر پنڈت، مدھیہ ودیالیہ، اُتلی ہارٹن، گیا، گیا

7. جناب سدھیشور ٹھاکر، مدھیہ ودیالیہ، میگراٹو مریا، گیا

کوارڈی نیٹر:

ڈاکٹر سنیہا آشیس داس گپتا، لکچرر، ایس سی آر ٹی، پٹنہ

جناب رادھے رمن پرساد، لکچرر، ایس سی ای آر ٹی، پٹنہ

نظر ثانی:

1. ڈاکٹر للیت کمار، پٹنہ ٹریننگ کالج، پٹنہ یونیورسٹی، پٹنہ
2. رضوان رضوی، استاد ہائی اسکول، شاستری نگر، پٹنہ

لے آئوٹ:

☆ جناب پرشانت سونی، وِدّیا بھون سوسائٹی، اودے پور

مترجمین(اردو):

1. محترمہ صبیحہ صادق، معلّمہ ایوب اردو گرلس ہائی اسکول
2. جناب محمد امتیاز، معلم پاتے پور ہائی اسکول (+2)، ویشالی

نظر ثانی:

1. جناب جنید، اُستاد اُردو پرائمری اسکول، ٹولہ پرویز خان سنگرہ، سارن
2. جناب انصاف علی، استاد اردو مڈل اسکول، کوپا، جلالپور، سارن

کمپوزنگ:

☆ ریاض احمد، دی پرنٹ زون، پٹنہ

شکر گزار:

☆ یونیسیف، بہار

تمہید

بہار کے دیہاتی علاقوں کے پس منظر کو دھیان میں رکھتے ہوئے قومی تعلیمی پروگرام 2005 کی بنیاد پر بہار تعلیمی پروگرام ۔2008 کی تعمیر کی گئی ہے۔ تعلیمی پروگراموں کے رہنما اصول میں بنیادی بات یہ ہے کہ ''بچوں کے علم کو اسکول کے باہر کی زندگی سے جوڑنا اور یہ طئے کرنا کہ پڑھائی رٹنے کے طریقہ کار سے آزاد ہو۔ قومی تعلیمی پروگرام 2005 اور بہار تعلیمی پروگرام ۔2008 کی بنیاد پر ریاضی کے نصاب اور درسی کتابوں میں اس بنیادی بات پر عمل کرنے کی کوشش کی گئی ہے کہ بچے خود اپنے علم کو گڑھ سکیں۔ اور ''کر کے سیکھنے'' کے اصول پر بنیادی حقیقتوں کو ذہن نشیں کر سکیں۔ اُمید ہے کہ یہ کوشش ہمیں قومی تعلیمی نظریہ 1986 میں مذکورہ طفل پر مرکوز تعلیم کے لئے قوت عطا کرے گی اور اس اصول کی طرف داری کرتے ہوئے ''سیکھنا بغیر بوجھ'' کے عمل کو رفتار عطا کرے گی۔

بہار تعلیمی پروگرام کے خدو خال ۔2008 کے بادی النظر میں اَپر پرائمری مرحلوں یعنی درجہ ۔6 اور درجہ۔ 7 کی ریاضی کی کتابوں کا فروغ پہلے ہی کیا جا چکا ہے۔ سبھی مرحلوں پر ریاضی کے مختلف اصولوں کو واضح کرنے کے لئے روز مرّہ کی زندگی سے متعلق عملی تجربوں کو درسی کتابوں میں شامل کیا گیا ہے۔

اَپَر پرائمری تعلیم کے آخری منزل کے لئے تیار شدہ پیش نظر درسی کتاب کے اسباق بھی عملی تجربات کی بنیاد پر ہیں۔ جن میں درجہ۔ 7 تک کے سبھی اصولوں کا اِعادہ کرتے ہوئے درجہ۔ 8 کے اصولوں کو درجہ۔ 9 کے لئے طئے شدہ سلیبس سے جوڑ کر فروغ دیا گیا ہے۔ ریاضی کی جبلت کی بنیاد منطق ہے۔ اس لئے عملی تجربات پر مرکوز تعلیم سے بچے خود کھوجی بن کر اپنی منطقی طاقت کا فروغ کر پائیں گے۔ لیکن اس میں استادوں کے تعاون کی نہایت ہی ضرورت ہے۔ اُستاد طالب علموں کو اصولوں کی وضاحت کرنے کے لئے عملی تجربوں میں شامل کروا کر اُن کو تعاون دے کر اُن کے علم میں لگاتار اضافہ کریں گے۔ ساتھ ہی کتاب کے بنیادی مقصد کو سمجھ کر مقام، وقت وغیرہ سے آزاد رکھیں تو بچے درسی کتاب میں دیئے گئے بنیادی اصولوں کو واضح کرتے ہوئے نئے علم کی ایجاد کر سکیں گے۔ تدریسی اور مسلسل وسیع جانچ کے طریقے بھی اس بات کو طئے کریں گے کہ پیش کردہ درسی کتاب بچوں کی اسکولی زندگی کو نفسیاتی دباؤ اور بوریت کی جگہ خوشی کا احساس کرانے میں کتنی مؤثر ثابت ہوگی۔ بوجھ کے مسئلہ سے نپٹنے میں پیش کردہ درسی کتاب غور وفکر، چھوٹے چھوٹے گروپوں میں بات چیت اور دلیل اور ہاتھ سے کی جانے والے روز مرّہ کی زندگی سے متعلق کم خرچیلی سرگرمیوں کو ترجیح دیتی ہے۔

پیش کردہ درسی کتاب کے فروغ کے لئے صوبائی کونسل برائے تعلیمی تحقیق وتربیت پٹنہ نے مختلف سطح کے اُستادوں کی مختلف ورکشاپ منعقد کیں جن میں قومی کونسل برائے تعلیمی تحقیق وتربیت، نئی دہلی۔صوبائی کونسل برائے تعلیمی تحقیق وتربیت پٹنہ، یونیسیف بہار، وِدّیا بھون سوسائٹی اُدئے پور، راجستھان، ایکلویہ بھوپال اور دوسرے اہم پبلی کیشن سے شائع درسی کتابوں کا مطالعہ کر کے صوبہ کے بنیادی سطح کے اُستادوں کے ذریعہ کتاب کا مسودہ تیار کیا گیا ہے۔ریاست اور بیرون ریاست سے آئے قابل اور ماہرین مضمون اور ماہرین تعلیم کے ذریعہ نظر ثانی کے بعد کتاب کی موجودہ شکل پیش ہے۔کونسل اُن سبھی اشخاص کی مشکور ہے جنہوں نے درسی کتاب کے فروغ میں کسی نہ کسی شکل میں اپنا خاص تعاون دیا ہے۔

انتظامی اصلاحات اور اپنے اشاعتوں میں مسلسل سدھار لانے کے لئے وقف صوبائی کونسل برائے تعلیمی تحقیق وتربیت پٹنہ آپ کے مشوروں کا خیر مقدم کرے گی۔ حاصل مشوروں کے لئے بیدار اور حساس ہو کر اگلے اشاعت میں ضروری اصلاح کے لئے پابند عہد ہے۔

حسن وارث

ڈائرکٹر

صوبائی کونسل برائے تعلیمی تحقیق وتربیت

مہندرو، پٹنہ، بہار

فہرست عنوانات

باب۔1 قابلِ پیمائش اعداد(Rational Numbers)

تمہید: 1.1 ریاضی (حساب) میں اکثر ہمیں معمولی مساوات دکھائی دیتے ہیں۔ مساوات میں نا معلوم اور متغیر کی قیمت اعداد کے الگ الگ گروپ میں معلوم ہوتی ہے۔

مثال کے طور پر سوچئے مساوات $x+5=8$ میں x کی کس قیمت سے مساوات مطمئن ہوگا؟

ذرا سوچئے کیا سبھی مساوات کے حل طبعی اعداد کے گروپ میں مل سکتے ہیں

$\therefore x=8-5$

یہاں مساوات کا حل $x=3$ ہے جو کہ ایک طبعی عدد ہے۔

سوچئے مساوات $x+10=10$ کا حل کیا ہوگا؟

یہاں مساوات کا حل $x=0$ ہے۔ x کی یہ قیمت ایک مکمّل عدد ہے، اگر ہم صرف طبعی اعداد تک محدود رہتے تو اِس مساوات کو حل نہیں جا سکتا ہے۔

آیئے اب ایک اور مساوات $x+15=7$ کے لئے x کی قیمت نکالیں۔ کیا مساوات $x+15=7$ جیسے مساوات کا حل مکمل اعداد (جو کہ صفر سے شروع ہو کر سب مثبت اعداد ہیں) میں ملتا ہے۔

یہاں $x=-8$، کیا x کی یہ قیمت ایک مکمّل عدد ہے؟ نہیں یہ ایک عدد صحیح (منفی مکمل اعداد) ہے۔

کچھ اور مساوات کے بارے میں غور کرتے ہیں۔ جیسے

(i) $4x=5$ (ii) $5x+8=0$

کیا آپ کو ان مساوات کے لئے x کی قیمت اعداد صحیح کے گروپ (مجموعہ) میں ملتا ہے؟
حل کر کے دیکھئے

مساوات (i) میں $x = \frac{5}{4}$ (ii) میں $x = \frac{-8}{5}$ رکھ کر دیکھئے۔ یہاں مساوات کو حل کرنے کے لئے ہمیں قابل پیائش اعداد کی ضرورت پڑتی ہے۔ ہم پچھلی جماعت میں قابلِ پیائش اعداد، کسروں اور دوسرے اعداد پر بنیادی اعمال (Basic operations) کو پڑھ چکے ہیں۔ یہاں ہم ان اعداد کے کچھ خصوصیات کھوجنے پر اعمال کی کوشش کریں گے۔

1.2 اعداد کی خصوصیات:

1.2.1 مربوطی اصول (Closure Law):

ایک بار پھر مختصر میں مکمل اعداد اور اعداد صحیح کی خاصیت کا تذکرہ کرتے ہیں۔

(i) مکمل اعداد (Whole Number):

23 اور 8,15 کس گروپ کے اعداد ہیں؟

(الف) جوڑ: 8+15=13

14+7=............ کیا یہ ایک مکمل عدد ہے؟

لہذا مکمل اعداد جوڑ کے تحت مربوط ہے۔ یعنی کسی دو مکمل اعداد a اور b کے لئے a+b ہمیشہ ایک مکمل عدد ہے

(ب) گھٹاؤ (تفریق): 3-7=.......... 6-4=2

7-3=.......... 4-5=-1

سوچئے 4- , 1- کس عدد گروپ کا حصہ ہے

لہذا مکمل اعداد گھٹاؤ کے تحت مربوط نہیں ہے۔ کیونکہ ہر بار ہمیں مکمل عدد نہیں حاصل ہوتا ہے۔

(ج) ضرب: 0x4=0 ایک مکمل عدد ہے

3x5=15 2x4=.......

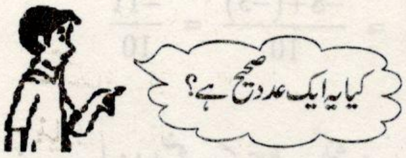
لہذا مکمل عدد ضرب کے تحت مربوط ہے۔ وسیع پیانے پر اگر دو مکمل اعداد a اور b ہو تو ab بھی ایک مکمل عدد ہے۔

(د) تقسیم: $\frac{4}{5}$ = 5 ÷ 4 یہ ایک مکمل عدد نہیں ہے۔ ....= 4 ÷ 2

لہذا مکمل اعداد تقسیم کے تحت مربوط نہیں ہے۔ ....= 2 ÷ 4

خود کر کے دیکھئے:

- الگ الگ مکمل اعداد لے کر چاروں اعمال کے لئے مربوطی صفت کی تصدیق کیجئے۔
- طبعی اعداد کے لئے بھی چاروں اعمال کے تحت مربوطی صفت کی جانچ کیجئے۔



(ii) اعداد صحیح (Integers):

(الف) جوڑ: $-8+5=-3$ $\quad 8+7=.........$

$-7+(-4)=-11$ $\quad (-9)+2=.........$

لہذا اعداد صحیح جوڑ کے تحت مربوط ہے۔

وسیع پیمانے پر کسی دو اعداد صحیح a اور b کے لئے a+b ایک عدد صحیح ہے۔

(ب) گھٹاؤ (تفریق): $12-7=5$ ایک عدد صحیح ہے۔ $(-9)-2=..........$

$7-12=-5$ ایک عدد صحیح ہے۔ $-4-5=..........$

لہذا اعداد صحیح گھٹاؤ کے تحت مربوط ہے۔ وسیع پیمانے پر کسی دو اعداد صحیح a اور b کے لئے a-b ایک عدد صحیح ہے۔

(ج) ضرب: $5 \times 18=90$ ایک عدد صحیح ہے۔ $-5 \times -4=..........$

$-8 \times 5 = -40$ ایک عدد صحیح ہے۔ $3 \times 7=.........$

لہذا اعداد صحیح ضرب کے لئے مربوط ہے۔

وسیع پیمانے پر کسی دو اعداد صحیح a اور b کے لئے ab بھی ایک مکمل عدد ہے۔

(د) تقسیم: $4 \div 5 = \frac{4}{5}$ یہ ایک عدد صحیح نہیں ہے۔ لہذا اعداد صحیح تقسیم کے تحت مربوط نہیں ہے۔

سوچئے: 5 قابل پیمائش اعداد کے گروپ کا ایک ممبر کیوں ہے؟

(iii) قابل پیمائش اعداد (Rational Number):

جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ ایسا عدد جو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ہو یا ظاہر کیا جا سکے، قابل پیمائش عدد کہلاتا ہے۔ جہاں p اور q عدد صحیح ہے اور $q \neq 0$ ہے جیسے $\frac{3}{5}, \frac{-7}{12}, -5, 0$ وغیرہ۔

کیونکہ اعداد 7,-5,0 وغیرہ کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ اس لئے یہ بھی قابل پیمائش اعداد ہیں۔

آیئے قابل پیمائش اعداد میں مربوطی (Closure) صفت کو جانچیں:

(الف) جوڑ: $\frac{-2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{-4+5}{6} = \frac{1}{6}$ ایک قابل پیمائش عدد ہے۔

$\frac{-2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{-4}{6}$

یہ مساوی کسر ہے

$\frac{-4}{5} + \left(\frac{-3}{10}\right) = \frac{-8+(-3)}{10} = \frac{-11}{10}$ ایک قابل پیمائش عدد ہے۔

لہٰذا واضح ہے کہ قابل پیمائش اعداد جوڑ کے تحت مربوط ہے۔

(ب) گھٹاؤ (تفریق):

$\frac{8}{3} - \frac{5}{6} = \frac{16-5}{6} = \frac{11}{6}$ ایک قابل پیمائش عدد ہے۔

$\frac{-7}{8} - \frac{5}{4} = \frac{-7-10}{8} = \frac{-17}{8}$ ایک قابل پیمائش عدد ہے۔

$\frac{5}{2} - \left(\frac{-7}{8}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ (کیا یہ ایک قابل پیمائش عدد ہے؟)

اس طرح ہم پاتے ہیں کہ قابل پیمائش عدد گھٹاؤ کے تحت مربوط ہے۔ یعنی کسی دو قابل پیمائش اعداد a اور b کے لئے a-b بھی ایک قابل پیمائش عدد ہے۔

(ج) ضرب:

$\frac{-4}{5} \times \frac{8}{3} = \frac{-32}{15}$ ایک قابل پیمائش عدد ہے

$\frac{-8}{7} \times \frac{-2}{5} = \frac{16}{35}$ ایک قابل پیمائش عدد ہے

$\frac{-2}{3} \times \frac{-3}{5} = \ldots\ldots\ldots$ کیا (کیا ان کا بھی حل ایک قابل پیمائش عدد ہے؟)

واضح ہے کہ قابل پیمائش اعداد ضرب کے تحت مربوط ہے۔ یعنی دو قابل پیمائش اعداد a اور b کے لئے axb بھی ایک قابل پیمائش عدد ہے۔

(د) تقسیم:

$\frac{-5}{4} \div \frac{5}{3} = \frac{-5}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{-15}{20}$ ایک قابل پیمائش عدد ہے۔

$\frac{15}{7} \div \frac{2}{5} = \ldots\ldots\ldots ?$ کیا؟ (کیا ان کا حل ایک قابل پیمائش عدد ہے؟)

لہٰذا واضح ہے کہ قابل پیمائش اعداد تقسیم کے تحت مربوط ہے۔

یعنی دو قابل پیمائش اعداد a اور b کے لئے a ÷ b بھی ایک قابل پیمائش عدد ہے۔

> $\frac{1}{2}$ میں $\frac{1}{2}$ کتنی بار = 1 بار ، $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = ?$
>
> یا $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2} = 1$

لیکن ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی قابل پیمائش عدد a کے لئے $a \div 0$ لایعنی (Undefined) ہے۔ لہذا قابل پیمائش اعداد تقسیم کے تحت مربوط نہیں ہے۔ اگر ہم صفر کو شامل نہیں کریں تو بقیہ سبھی قابل پیمائش اعداد کا مجموعہ تقسیم کے تحت مربوط ہے۔

خود کر کے دیکھئے:

مندرجہ ذیل جدول میں خالی جگہوں کو ہاں/نہیں سے بھریں:

اعداد	جوڑ	گھٹاؤ	ضرب	تقسیم
		کے تحت مربوط ہے		
قابل پیمائش اعداد	ہاں	....	....	....
اعداد صحیح	....	....	ہاں	....
مکمل اعداد	....	....	....	....
طبعی اعداد	....	نہیں	....	....

1.2.2 ترتیب تبادلہ کا اصول (Commutative Law):

(i) مکمل اعداد (Whole Number):

(الف) جوڑ: $5+7=12$ $3+8=11$ $0+6=$.........

$7+5=12$ $8+3=11$ $6+0=$.........

لہذا دو مکمل اعداد کے لئے جوڑ کا ترتیب تبادلہ اصول صحیح ہے۔

بڑے پیمانے پر، دو مکمل اعداد a اور b کے لئے $a+b=b+a$ صحیح ہے۔

(ب) گھٹاؤ (تفریق): $8-2=6$ $4-6=$........

$2-8=-6$ $6-4=$.........

$$\Rightarrow 8-2 \neq 2-8$$

لہذا دو مکمل اعداد کے لئے گھٹاؤ کا ترتیب تبادلہ اصول صحیح نہیں ہے۔ یعنی دو مکمل اعداد a اور b کے لئے $a-b \neq b-a$ ہوتا ہے۔

(ج) ضرب: $5 \times 3 =$ .... $4\times6=$.......

$3\times5=15$ $6\times4=24$

لہذا دو مکمل اعداد کے لئے ضرب کا ترتیب تبادلہ اصول صحیح ہے۔

کیا یہ ترتیب تبادلہ اصول کی تعمیل کرتے ہیں؟ $5 \times 0 = \ldots\ldots$ اور $0 \times 5 = \ldots\ldots$

یعنی دو مکمل اعداد a اور b کے لئے axb=bxa ضرب کا ترتیب تبادلہ اصول صحیح ہے۔

(د) تقسیم: $\frac{4}{5} = 5 \div 4$ اور $4 \div 5 = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow 4 \div 5 \neq 5 \div 4$

کیا؟ $\frac{4}{5} = \frac{5}{4}$

لہذا دو مکمل اعداد کے لئے تقسیم کا ترتیب تبادلہ اصول صحیح نہیں ہے۔ یعنی دو مکمل اعداد a اور b کے لئے

$a \div b \neq b \div a$ ہوتا ہے۔

کیا یہ برابر ہے؟

(ii) اعداد صحیح (Integers):

(الف) جوڑ: $(-5)+(+4)=-1$ $\qquad$ (i) $(5)+(-4)=\ldots\ldots\ldots$

پھر $(+4)+(-5)=-1$ $\qquad$ $(-4)+(5)=\ldots\ldots\ldots$

لہذا $(-5)+(+4)=(+4)+(-5)$ $\qquad$ (ii) $(-3)+(-7)=\ldots\ldots\ldots$

$(-7)+(-3)=\ldots\ldots\ldots$

لہذا دو اعداد صحیح کے لئے جوڑ کا ترتیب تبادلہ اصول صحیح ہے۔ یعنی دو اعداد صحیح a اور b کے لئے a+b=b+a صحیح ہے۔

(ب) گھٹاؤ (تفریق): اعداد صحیح کے گھٹاؤ کے لئے غور کرتے ہیں۔ کوئی بھی دو اعداد صحیح لیجئے اور انہیں گھٹایئے۔

$(-8)-(+3)=-11$ $\qquad$ (i) $7-(-3)= \ldots\ldots\ldots$

پھر $(3)-(-8)=11$ $\qquad$ $(-3)-(7)=\ldots\ldots\ldots$

لہذا دو اعداد صحیح کے لئے گھٹاؤ کا ترتیب تبادلہ اصول صحیح نہیں ہے۔ یعنی دو اعداد صحیح a اور b کے لئے $a-b \neq b-a$ ہوتا ہے۔

(ج) ضرب: $(-4)\times(+5)=-20$ $\qquad$ $8\times(-2)=\ldots\ldots\ldots$

پھر $(+5)\times(-4)=-20$ $\qquad$ $(-2)\times 8=\ldots\ldots\ldots$

لہذا $(-4)\times(+5)=(+5)\times(-4)$

لہذا دو اعداد صحیح کے لئے ضرب کا ترتیب تبادلہ اصول صحیح ہے۔ یعنی دو مکمل اعداد a اور b کے لئے axb=bxa صحیح ہے۔

(د) تقسیم: $(-5) \div (+2) = \frac{-5}{+2} = -\frac{5}{2}$

$(+2) \div (-5) = \frac{(+2)}{-5} = -\frac{2}{5}$

لہذا $-5 \div 2 \neq 2 \div (-5)$

$6 \div 2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$2 \div 6 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$-3 \div 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$1 \div (-3) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

اِس لئے دو اعداد صحیح کے لئے تقسیم کا ترتیب تبادلہ اصول صحیح نہیں ہے۔ یعنی a اور b کے لئے $a \div b \neq b \div a$ ہوتا ہے۔

(iii) قابل پیمائش اعداد (Rational Number):

(الف) جوڑ:

$$\frac{-5}{4} + \frac{7}{8} = \frac{7}{8} + \left(\frac{-5}{4}\right) =$$

$$\frac{-10+7}{8} = \frac{-3}{8} \qquad = \frac{7+(-10)}{8} = \frac{-3}{8}$$

لہذا $\frac{-5}{8} + \frac{-13}{6} = \frac{-13}{6} + \frac{-5}{8}$

پھر ایک دوسری مثال لیتے ہیں:

$$\left(\frac{-5}{8}\right) + \left(\frac{-13}{6}\right) = \frac{-15+(-52)}{24} = \frac{-15-52}{24} = \frac{-67}{24}$$

اب $\left(\frac{-13}{6}\right) + \left(\frac{-5}{8}\right) = \frac{-52+(-15)}{24} = \frac{-52-15}{24} = \frac{-67}{24}$

لہذا $\frac{-5}{8} + \frac{-13}{6} = \frac{-13}{6} + \frac{-5}{8}$

لہذا واضح ہے کہ دو قابل پیمائش اعداد کے لئے جوڑ کا ترتیب تبادلہ اصول صحیح ہے۔ یعنی دو قابل پیمائش اعداد a اور b کے لئے $a+b=b+a$ صحیح ہے۔

(ب) گھٹاؤ (تفریق):

$$\frac{5}{4} - \left(\frac{-7}{16}\right) = \frac{20-(-7)}{16} = \frac{20+7}{16} = \frac{27}{16}$$

ترتیب بدلنے پر $\frac{-7}{16} - \frac{5}{4} = \frac{-7-20}{16} = \frac{-27}{16}$

لہذا $\frac{5}{4} - \left(\frac{-7}{16}\right) \neq \frac{-7}{16} - \frac{5}{4}$

اِس لئے قابل پیمائش اعداد کے لئے گھٹاؤ کا ترتیب تبادلہ اصول صحیح نہیں ہے۔

(ج) ضرب: $\frac{-6}{5} \times \frac{-3}{7} = \frac{18}{35}$ $\quad \frac{-4}{9} \times \frac{5}{6} = ...$

$\frac{-3}{7} \times \frac{-6}{5} = \frac{18}{35}$ $\quad \frac{5}{6} \times \frac{-4}{9} = ...$

لہذا $\frac{-6}{5} \times \frac{-3}{7} = \frac{-3}{7} \times \frac{-6}{5}$

کیا $\frac{-4}{9} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \times \frac{-4}{9}$?

لہذا قابل پیمائش اعداد کے لئے ضرب کا ترتیب تبادلہ اصول صحیح ہے۔یعنی دو قابل پیمائش اعداد a اور b کے لئے axb=bxa صحیح ہے۔

(د) تقسیم: $\frac{-4}{5} \div \frac{3}{7} = \frac{-4}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{-28}{15}$

$\frac{3}{7} \div \left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{3}{7} \times \left(\frac{-5}{4}\right) = \frac{-15}{28}$

$\frac{-4}{5} \div \frac{3}{7} \neq \frac{3}{7} \div \left(\frac{-4}{5}\right)$

کیا $\frac{5}{7} \div \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \div \frac{5}{7}$ ہے؟ حل کر کے دیکھئے

لہذا قابل پیمائش اعداد صحیح کے لئے تقسیم کا ترتیب تبادلہ اصول صحیح نہیں ہے۔یعنی دو قابل پیمائش اعداد a اور b کے لئے $a \div b \neq b \div a$ ہوتا ہے۔

خود کر کے دیکھئے:

درج ذیل جدول (Table) کو ترتیب تبادلہ اصول کے لئے پورا کیجئے۔

اعداد	جوڑ کے	گھٹاؤ کے	ضرب کے	تقسیم کے
قابل پیمائش اعداد	ہاں			
اعداد صحیح		نہیں		
مکمل اعداد				
طبعی اعداد				

جدول (Table) کو دیکھ کر بتاؤ کن عملیات میں ترتیب تبادلہ اصول لاگو ہوتا ہے؟

1.2.3 معاونت کا اصول (Associative Law):

(i) مکمل اعداد (Whole Number):

(الف) جوڑ: (5+4)+6=9+......=........ معاونت بدلنے پر.... =5+........=(4+6)+5

لہذا (5+4)+6=5+(4+6)

اِس لئے تین مکمل اعداد کے لئے جوڑ کا معاونت اصول صحیح ہے۔ یعنی تین مکمل اعداد a, b اور c کے لئے (a+b)+c= a+(b+c) صحیح ہے۔

(ب) گھٹاؤ (تفریق): کیا........... ~~5~~-(1-)=5-(7-8)

7-(8-5) = 7-3 = 4

لہذا (7-8)-5≠ 7-(8-5)

اِس لئے تین مکمل اعداد کے لئے گھٹاؤ کا معاونت اصول صحیح نہیں ہے۔ یعنی تین مکمل اعداد a, b اور c کے لئے (a-b)-c.....a-(b-c) ہوتا ہے۔

(ج) ضرب: .... =(5x4)x6=(.....)x6 اور 5x(4x6)=5x24=.......

لہذا (5x4)x6=5x(4x6)

اسی طرح، کیا 5x(4x0)=(5x4)x0?

اِس لئے تین مکمل اعداد کے لئے ضرب کا معاونت اصول صحیح ہے۔

یعنی تین مکمل اعداد a,b اور c کے لئے (axb)xc=ax(bxc) ہوتا ہے۔

(د) تقسیم: $(4\div 5)\div 8=\frac{4}{5}\div 8=\frac{4}{5}\times\frac{1}{8}=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}$

معاونت بدلنے پر

$$4\div(5\div 8)=4\div\left(\frac{5}{8}\right)=4\times\frac{8}{5}=\frac{32}{5}$$

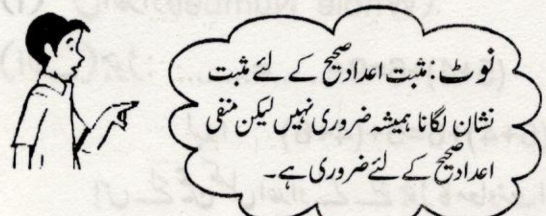
لہذا $(4\div 5)\div 8\neq 4\div(5\div 8)$

اِسے بھی جانچئے کیا ? ...... $12\div(4\div 2)=(12\div 4)\div 2$

اِس لئے تین مکمل اعداد کے لئے تقسیم کا معاونت اصول صحیح نہیں ہے۔ مکمل اعداد a،b اور c کے لئے

(a ÷ b) ÷ c a ÷ (b ÷ c) ہوتا ہے۔

(ii) اعداد صحیح



(الف) جوڑ: تین اعداد صحیح

(-5)، (+4) اور (-2) کے لئے

(-5+4)+(-2)}=-1+(-2)=-3

-5+{4+(-2)=-5+2=-3

اس لئے (-5+4)+(-2)=-5+{4+(-2)}

اِس لئے تین اعداد صحیح کے لئے جوڑ کا معاونت اصول صحیح ہے۔ یعنی تین اعداد صحیح a,b اور c کے لئے (a+b)+c=a+(b+c) صحیح ہے۔

(ب) گھٹاؤ (تفریق): پھر اعداد صحیح 5-، 4+ اور 6- کے گھٹاؤ کے لئے

(-5-4)-(-6)=-9+6=-3

-5-{4-(-6)}=-5-{4+6}=-5-10=-15

اس لئے (-5-4)-(-6)≠-5{4-(-6)}

لہذا تین اعداد صحیح کے لئے گھٹاؤ کا معاونت اصول صحیح نہیں ہے۔ یعنی تین اعداد صحیح a،b اور c کے لئے (a-b)-c≠a-(b-c) گھٹاؤ کا معاونت اصول لاگو (نافذ) نہیں ہے۔

(ج) ضرب: $\{5x(-4)\}x(-2)=-20x(-2)=40$

$5x\{-4x(-2)\}=5x\{8\}=40$

اس لئے $\{5x(-4)\}x(-2)=5x\{-4x(-2)\}$

لہذا تین اعداد صحیح کے لئے ضرب کا معاونت اصول صحیح ہے۔یعنی تین اعداد صحیح a، b اور c کے لئے (axb)xc=ax(bxc) ضرب کا معاونت اصول لاگو (نافذ) ہے۔

(د) تقسیم: $-5 \div \{2 \div (-3)\}$ $\quad$ $(-5 \div 2) \div (-3)$

$$= -5 \div \left\{\frac{2}{-3}\right\} = -5 \times \frac{-3}{2} = \frac{15}{2}$$

$$= \frac{-5}{2} \times \frac{1}{-3} = \frac{-5}{-6} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow (-5 \div 2) \div (-3) \neq -5 \div \{2 \div (-3)\}$$

اِس لئے تین اعداد صحیح کے لئے تقسیم کا معاونت اصول صحیح نہیں ہے۔یعنی تین اعداد صحیح a,b اور c کے لئے $(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$ تقسیم کا معاونت اصول لاگو (نافذ) نہیں ہے۔

(iii) قابل پیمائش اعداد (Rational Number):

(الف) جوڑ: $\frac{-5}{4}+\left(\frac{3}{8}+\frac{-7}{6}\right)$ $\quad$ $\left(\frac{-5}{4}+\frac{3}{8}\right)+\frac{-7}{6}$

$$= \frac{-5}{4}+\left(\frac{9-28}{24}\right) \qquad = \left(\frac{-10+3}{8}\right)+\frac{-7}{6}$$

$$= \frac{-5}{4}+\frac{-19}{24} \qquad = \frac{-7}{8}+\frac{-7}{6}$$

$$= \frac{-30-19}{24} \qquad = \frac{-21+(-28)}{24}$$

$$= \frac{-49}{24} \qquad = \frac{-49}{24}$$

اِس لئے $\left[\frac{-5}{4}+\frac{3}{8}\right]+\frac{-7}{6}=\frac{-5}{4}+\left[\frac{3}{8}+\frac{-7}{6}\right]$

کیا $\frac{-1}{3}+\left[\frac{2}{5}+\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=\left[\left(\frac{-1}{3}\right)+\frac{2}{5}\right]+\left(\frac{-1}{2}\right)$? کر کے دیکھئے۔

اِس لئے تین قابل پیمائش اعداد کے لئے جوڑ کا معاونت اصول صحیح ہے۔ یعنی تین قابل پیمائش اعداد b، a اور c کے لئے (a+b)+c=a+(b+c) جوڑ کا معاونت اصول لاگو (نافذ) ہے۔

(ب) گھٹاؤ (تفریق):

$$\frac{-3}{8}-\left(\frac{5}{4}-\frac{-2}{6}\right) \qquad \left(\frac{-3}{8}-\frac{5}{4}\right)-\left(\frac{-2}{6}\right)$$

$$=\frac{-3}{8}-\left(\frac{15+4}{12}\right) \qquad =\left(\frac{-3-10}{8}\right)-\left(\frac{-2}{6}\right)$$

$$=\frac{-3}{8}-\frac{19}{12} \qquad =\frac{-13}{8}-\frac{-2}{6}$$

$$=\frac{-9-38}{24} \qquad =\frac{-39-(-8)}{24}$$

$$=\frac{-47}{24} \qquad =\frac{-31}{24}$$

لہذا $\left(\frac{-3}{8}-\frac{5}{4}\right)-\frac{-2}{6}\neq\frac{-3}{8}-\left(\frac{5}{4}-\frac{-2}{6}\right)$

اِس لئے قابل پیمائش اعداد کے لئے گھٹاؤ کا معاونت اصول صحیح نہیں ہے۔ یعنی تین قابل پیمائش اعداد b، a اور c کے لئے (a-b)-c≠ a-(b-c) گھٹاؤ کا معاونت اصول لاگو (نافذ) نہیں ہوتا ہے۔

(ج) ضرب: آیئے ہم ضرب کے لئے معاونت اصول کی جانچ کرتے ہیں۔

$$\frac{-5}{8}\times\left(\frac{7}{6}\times\frac{-2}{5}\right) \qquad \left(\frac{-5}{8}\times\frac{7}{6}\right)\times\frac{-2}{5}$$

$$=\frac{-5}{8}\times\frac{-14}{30} \qquad =\frac{-35}{48}\times\frac{-2}{5}$$

$$=\frac{70}{240} \qquad =\frac{70}{240}$$

اس لئے $\left(\frac{-5}{8}\times\frac{7}{6}\right)\times\frac{-2}{5}=\frac{-5}{8}\times\left(\frac{7}{6}\times\frac{-2}{5}\right)$

کیا $\left(\frac{10}{7} \times \frac{-5}{14}\right) \times \frac{3}{14} = \frac{10}{7} \times \left(\frac{-5}{14} \times \frac{3}{14}\right)$ ہے؟

لہذا ہم پاتے ہیں کہ قابل پیمائش اعداد کے لئے ضرب کا معاونت اصول صحیح ہے۔ تین قابل پیمائش اعداد a، b اور c کے لئے (axb)xc=ax(bxc)
ضرب کا معاونت اصول لاگو (نافذ) ہوتا ہے۔

(د) تقسیم:

$$\left(\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}\right) \div \frac{-5}{8}$$
$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\right) \div \frac{-5}{8}$$
$$= \frac{4}{6} \times \frac{8}{-5} = \frac{32}{-30} = \frac{-32}{30}$$

$$\frac{1}{2} \div \left(\frac{3}{4} \div \frac{-5}{8}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \div \left(\frac{3}{4} \times \frac{8}{-5}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \div \frac{24}{-20} = \frac{1}{2} \times \frac{-20}{24} = \frac{-20}{48}$$

اِس لئے $\left(\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}\right) \div \frac{-5}{8} \neq \frac{1}{2} \div \left(\frac{3}{4} \div \frac{-5}{8}\right)$

لہذا قابل پیمائش اعداد کے لئے تقسیم کا معاونت اصول صحیح نہیں ہے۔ اِس لئے قابل پیمائش اعداد a، b اور c کے لئے $(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$ تقسیم کا معاونت اصول لاگو (نافذ) نہیں ہے۔

خود کر کے دیکھیے۔

درج ذیل جدول (Table) کو پورا کریں۔ (✓) لگائیں:

اعداد	معاونت کے اصول کے لئے صحیح ہے			
	جوڑ کے	گھٹاؤ کے	ضرب کے	تقسیم کے
قابل پیمائش				
مکمل اعداد				
اعداد صحیح				
طبعی اعداد				

1.2.4: صفر(0) کا کردار (The role of Zero):

ذیل پر غور کریں

(صفر کا مکمل عدد میں جوڑ) $5+0=0+5=5$

(صفر کا عدد صحیح میں جوڑ) $-5+0=0+(-5)=-5$

(صفر کا قابل پیمائش عدد میں) $\frac{-5}{4}+0=0+\frac{-5}{4}=\frac{-5}{4}$

درج بالا مثالوں سے ظاہر ہے کہ کسی مکمل عدد، عدد صحیح اور قابل پیمائش عدد میں جب صفر جوڑا جاتا ہے تو حاصل جمع پھر سے وہی عدد حاصل ہوتا ہے۔

وسیع پیمانے پر

$a+0=0+a=a$، جہاں a ایک مکمل عدد ہے

$b+0=0+b=b$ ، جہاں b ایک عدد صحیح ہے

$c+0=0+c=c$، جہاں c ایک قابل پیمائش عدد ہے۔

اِس طرح درج بالا سبھی اعداد کے جوڑ کے لئے صفر ایک جمعی شناخت (Additive identity) کہلاتا ہے۔

1.2.5 ایک (1) کا کردار (The role of1):

(مکمل عدد کا 1 کے ساتھ ضرب) $8\times1=1\times8=8$

(عدد صحیح کا 1 کے ساتھ ضرب) $-2\times1=1\times(-2)=-2$

(قابل پیمائش عدد کا 1 کے ساتھ ضرب) $\frac{-3}{5}\times1=1\times\frac{-3}{5}=\frac{-3}{5}$

درج بالا مثالوں سے ظاہر ہے کہ کسی مکمل عدد، عدد صحیح اور قابل پیمائش عدد میں جب اسے ضرب کیا جاتا ہے تو حاصل ضرب پھر سے وہی عدد حاصل ہوتا ہے۔ اِس طرح 1 ایک **ضربی شناخت** (Multiplicative identity) ہے۔

1.2.6: جمعی معکوس (Additive inverse):

اعداد صحیح کا مطالعہ کرتے وقت آپ نے اعداد صحیح کے منفی پاتے ہیں۔ 1 کا منفی کیا ہے؟ یہ 1- ہے کیونکہ $1+(-1)=(-1)+1=0$ اِسلئے (1-) کا منفی کیا ہوگا؟ یہ 1 ہوگا۔

اِسی طرح $2+(-2)=(-2)+2=0$

$$\frac{3}{2} + \left(\frac{-3}{2}\right) = \left(\frac{-3}{2}\right) + \frac{3}{2} = 0$$

اوپر کے مثالوں میں دونوں اعداد کا جوڑ صفر ہے۔ جب دو اعداد کا جوڑ صفر ہو تو وہ دونوں اعداد ایک دوسرے کے جمعی معکوس (Additive Inverse) ہوتے ہیں۔ جیسا کہ اوپر کے مثال میں اکا جمعی معکوس 1- اور 1- کا جمعی معکوس 1 ہے۔

وسیع پیمانے پر

آپ بتائیے: 2 کا جمعی معکوس کیا ہے؟
5 کا جمعی معکوس کیا ہے؟

کسی بھی قابل پیمائش اعداد $\frac{c}{d}$ کے لئے: $\frac{c}{d} + \left(\frac{-c}{d}\right) = \left(\frac{-c}{d}\right) + \frac{c}{d} = 0$

اِس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\frac{c}{d}$ کا جمعی معکوس $\frac{-c}{d}$ اور $\frac{-c}{d}$ کا جمعی معکوس $\frac{c}{d}$ ہے۔

1.2.7 ضربی معکوس (Multiplicative Invers or Reciprocal):

درج ذیل مثالوں پر غور کریں:

(i) $2 \times \frac{1}{2} = 1$ (ii) $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$ (iii) $\frac{-5}{2} \times \frac{2}{-5} = 1$

مندرجہ بالا مثالوں میں ہر ایک کا حاصل ضرب 1 ہے۔ جب دو اعداد کا حاصل ضرب 1 ہو تو وہ دونوں اعداد ایک دوسرے کا ضربی معکوس (Mulitiplicative Inverse or Reciprocal) کہلاتا ہے۔ جیسے 2 کا ضربی معکوس $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ کا ضربی معکوس 2 ہے۔ اِسی طرح $\frac{-5}{2}$ کا ضربی معکوس $\frac{2}{-5}$ ہے۔

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ صفر کا ضربی معکوس کیا ہے۔؟ کیا کوئی ایسا عدد ہے جیسے صفر سے ضرب کرنے پر 1 حاصل ہو جائے؟ اِس لئے صفر کا کوئی ضربی معکوس نہیں ہے۔

اِس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک قابل پیمائش عدد $\frac{a}{b}$ ، دوسرے قابل پیمائش عدد $\frac{b}{a}$ کا ضربی معکوس کہلاتا ہے۔ اگر $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$ ہے۔

اِس طرح کے چند ضربی معکوس لکھئے۔

1.2.8 قابل پیمائش اعداد کے لئے جوڑ پر ضرب کا بٹن:

(Distributivity of multiplication over addition for rational numbers)

درج ذیل پر غور کریں:

$$\frac{-2}{5} \times \left\{\frac{2}{7}+\frac{5}{14}\right\} \qquad\qquad \frac{-2}{5} \times \left\{\frac{2}{7}+\frac{5}{14}\right\}$$

$$= \left(\frac{-2}{5}\times\frac{2}{7}\right) + \left(\frac{-2}{5}\times\frac{5}{14}\right) \qquad\qquad = \frac{-2}{5} \times \left\{\frac{4+5}{14}\right\}$$

$$= \frac{-4}{35} + \frac{-10}{70} \qquad\qquad = \frac{-2}{5} \times \frac{9}{14}$$

$$= \frac{-8+(-10)}{70} = \frac{-18}{70} \qquad\qquad = \frac{-18}{70}$$

اس لئے $\frac{-2}{5} \times \left\{\frac{2}{7}+\frac{5}{14}\right\} = \left(\frac{-2}{5}\times\frac{2}{7}\right) + \left(\frac{-2}{5}\times\frac{5}{14}\right)$

اس مثال میں گھٹاؤ پر ضرب کا تقسیم سمجھئے۔

بٹن اصول سے   سیدھے طریقے سے

$$\frac{-4}{5} \times \left\{\frac{2}{9}-\frac{7}{18}\right\} \qquad\qquad \frac{-4}{5} \times \left\{\frac{2}{9}-\frac{7}{18}\right\}$$

$$= \left(\frac{-4}{5}\times\frac{2}{9}\right) - \left(\frac{-4}{5}\times\frac{7}{18}\right) \qquad\qquad = \frac{-4}{5} \times \left\{\frac{4-7}{18}\right\}$$

$$= \frac{-8}{45} - \frac{-28}{90} \qquad\qquad = \frac{-4}{5} \times \frac{-3}{18}$$

$$= \frac{-16+20}{90} = \frac{12}{90} \qquad\qquad = \frac{12}{90}$$

اِس لئے $\frac{-4}{5} \times \left\{\frac{2}{9}-\frac{7}{18}\right\} = \left(\frac{-4}{5}\times\frac{2}{9}\right) - \left(\frac{-4}{5}\times\frac{7}{18}\right)$

اِس لئے مندرجہ بالا مثالوں سے ظاہر ہے کہ قابل پیمائش اعداد کے لئے جوڑ اور گھٹاؤ پر ضرب کا بٹن اصول صحیح ہے۔

سبھی قابل پیمائش اعداد a, b اور c کے لئے

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$$

خود کیجئے:

بنٹن اصول کی مدد سے مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کریں:

(i) $\left(\frac{5}{4}\times\frac{-2}{8}\right) + \left(\frac{5}{4}\times\frac{-3}{5}\right)$ (ii) $\left(\frac{5}{8}\times\frac{-3}{7}\right) + \left(\frac{5}{8}\times\frac{-7}{6}\right)$

مثال 1: $\frac{5}{12} + \frac{-3}{8} + \frac{-7}{16} + \frac{25}{12}$ قیمت معلوم کریں۔

حل

$$= \frac{5}{12} + \frac{-3}{8} + \frac{-7}{16} + \frac{25}{12}$$

$$= \frac{-3}{8} + \frac{-7}{16} + \frac{5}{12} + \frac{25}{12}$$

$$= \left[\frac{-3}{8}+\frac{-7}{16}\right] + \left[\frac{5}{12}+\frac{25}{12}\right]$$ (ترتیب تبادلہ اصول سے)

$$= \left[\frac{5+25}{12}\right] + \left[\frac{-6+(-7)}{16}\right]$$

$$= \frac{30}{12} + \frac{-13}{16} = \frac{120-39}{48} = \frac{\overset{27}{\cancel{81}}}{\underset{16}{\cancel{48}}} = \frac{27}{16}$$

مثال 2، حل کریں: $\frac{-4}{5} \times \frac{16}{7} + \frac{-3}{5} \times \frac{16}{7}$

حل: $\frac{-4}{5} \times \frac{16}{7} + \frac{-3}{5} \times \frac{16}{7}$

$$= \frac{16}{7}\left(\frac{-4}{5}+\frac{-3}{5}\right)$$ (بنٹن اصول سے)

$$= \frac{16}{7}\left(\frac{-43+(-\ )}{5}\right) = \frac{16}{7} \times \frac{-7}{5}$$

$$= \frac{-16}{5}$$

مثال3: مندرجہ ذیل کا جمعی معکوس لکھئے:

(i) $\frac{-9}{13}$ (ii) $\frac{12}{25}$

حل: (i) $\frac{-9}{13}$ کا جمعی معکوس $\frac{9}{13}$ ہے۔ کیونکہ

$$\frac{-9}{13} + \frac{9}{13} = \frac{-9+9}{13} = \frac{0}{13} = 0$$

(ii) $\frac{12}{25}$ کا جمعی معکوس ہے $\frac{-12}{25}$ کیونکہ

$$\frac{12}{25} + \frac{-12}{25} = \frac{12-12}{25} = \frac{0}{25} = 0$$

مثال4: حل کریں $\frac{2}{7} \times \frac{-3}{5} - \frac{1}{12} - \frac{3}{5} \times \frac{4}{7}$

حل: $\frac{2}{7} \times \frac{-3}{5} - \frac{1}{12} - \frac{3}{5} \times \frac{4}{7}$

$$= \frac{2}{7} \times \frac{-3}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{4}{7} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{-3}{5}\left(\frac{2}{7}+\frac{4}{7}\right) - \frac{1}{12}$$ (بنٹن اصول سے)

$$= \frac{-3}{5}\left(\frac{2+4}{7}\right) - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{-3}{5} \times \frac{6}{7} - \frac{1}{12} = \frac{-18}{35} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{-216-35}{420} = \frac{-251}{420}$$

سوالنامہ-1.1

1. مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کا جمعی معکوس لکھئے:

(i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{25}{9}$ (iii) -16 (iv) $\frac{-15}{8}$

(v) 0 (vi) $\frac{-5}{-7}$ (vii) $\frac{13}{-5}$ (viii) $\frac{-2}{15}$

2. مندرجہ ذیل جدول کے خالی جگہوں کو پُر کیجئے:

عدد	-13	$\frac{-5}{-8}$	$\frac{4}{-7}$	$\frac{5}{4}$	-1
ضربی معکوس	$\frac{1}{-13}$	....	....	....	....

3. مناسب خاصیت کی مدد سے ذیل کی قیمت معلوم کیجئے:

(i) $\frac{4}{3} + \frac{3}{5} + \frac{-2}{3} + \frac{-11}{5}$

(ii) $\frac{2}{5} \times \left(-\frac{3}{7}\right) - \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{14} \times \frac{2}{5}$

4. $\frac{5}{18}$ کو $\frac{-7}{72}$ کے ضربی معکوس سے ضرب کیجئے۔

5. $\frac{-1}{3} \times \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{-1}{3}\times\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{-1}{3}\times\frac{1}{4}\right)$ میں کون سی خاصیت ہے؟ بتائیے۔

6. $-1\frac{1}{8}$ کا ضربی معکوس $\frac{8}{9}$ ہے؟ وجہ سمیت جواب دیجئے۔

7. کیا $3\frac{1}{3}$ کا ضربی معکوس 0.3 ہے؟ کیوں یا کیوں نہیں؟

8. مندرجہ ذیل کو بنٹن اصول کی مدد سے حل کیجئے:

(i) $\frac{-3}{4} \times \left\{\frac{2}{3} + \left(\frac{-5}{6}\right)\right\}$ (ii) $\frac{5}{6} \times \left(\frac{-2}{5}+\frac{3}{10}\right)$

9. مندرجہ ذیل کالم 'الف' کو کالم 'ب' کے مناسب اصول سے ملائیں:

کالم 'الف' مثال		کالم 'ب' اصول
(i) $\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)$	(a)	جمعی شناخت
(ii) $\frac{5}{6}\times\frac{4}{7}=\frac{4}{7}\times\frac{5}{6}$	(b)	ضربی شناخت
(iii) $\left(\frac{-1}{2}+\frac{2}{5}\right)+\frac{3}{10}=\frac{-1}{2}+\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{10}\right)$	(c)	ضرب کا معاونت اصول
(iv) $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$	(d)	جمعی معکوس
(v) $\left(5\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{4}=5\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\right)$	(e)	بنٹن اصول
(vi) $\frac{-5}{4}+0=\frac{-5}{4}$	(f)	مربوطی اصول
(vii) $\frac{-8}{3}\times1=\frac{-8}{3}$	(g)	ضربی معکوس
(viii) $\frac{5}{2}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)=\left(\frac{5}{2}\times\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{5}{2}\times\frac{2}{5}\right)$	(h)	جوڑ کا معاونت اصول
(ix) $\frac{5}{3}\times\frac{3}{5}=1$	(i)	ضرب کا ترتیب تبادلہ اصول
(X) $\frac{-7}{4}+\frac{7}{4}=0$	(j)	جوڑ کا ترتیب تبادلہ اصول

ہم نے سیکھا

1. اعداد کے خاندان میں پہلا طبعی اعداد (...........,1,2,3,4,5) ہے۔ طبعی اعداد کے خاندان میں صفر(0) شامل کرنے پر مکمل اعداد (..........,0,1,2,3,4,5) کا خاندان بنتا ہے۔ مکمل اعداد کے خاندان میں منفی اعداد(.........,3-,2-,1-) کو شامل کرنے پر اعداد صحیح بنتا ہے۔ اعداد صحیح کے خاندان میں کسر اعداد کو شامل کرنے پر قابل پیائش اعداد بنتا ہے۔
2. قابل پیائش اعداد جوڑ، گھٹاؤ، ضرب اور تقسیم کے عملیات کے تحت مربوط ہیں۔
3. قابل پیائش اعداد کے لئے جوڑ اور ضرب کے عملیات (1) ترتیب تبادلہ اور (ii) معاونتی ہیں۔
4. قابل پیائش اعداد کے لئے قابل پیائش عدد صفر (0) جمعی شناخت ہے۔
5. قابل پیائش اعداد کے لئے قابل پیائش عدد ایک (1) ضربی شناخت ہے۔
6. قابل پیائش عدد $\frac{a}{b}$ کا جمعی معکوس $-\frac{a}{b}$ ہے اور اس کا معکوس بھی صحیح ہے۔
7. اگر $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=1$ تو قابل پیائش عدد $\frac{a}{b}$ کا ضربی معکوس $\frac{c}{d}$ ہے۔
8. قابل پیائش اعداد کا بنٹن اصول:

قابل پیائش اعداد a,b اور c کے لئے

(i) $a(b+c) = ab + ac$

(ii) $a(b-c) = ab - ac$

9. ریاضی عملیات میں صفتوں کا استعمال کرنا۔

باب-2 ایک متغیر والے خطی مساوات Linear equation in one variable

2.1 تمہید

فلک اور خوشبو الجبرائی عبارتوں (Algrbraic expressions) اور مساوات (Equations) سے وابستہ سوالوں کو حل کر رہی ہیں آیئے ان کی مدد کریں۔

برابر

$2x-7=11$

مساوات

متغیر

$2x-7 \rightarrow$	L.H.S
$11 \rightarrow$	R.H.S

(i) عبارت $x+3$ میں $x=1,2,3$ رکھ کر قیمت معلوم کریں۔

(ii) $5+7=.......$

(iii) $3+......=12$

(iv) $4+x=9$ یہاں x کی قیمت کیا ہوگی؟

(v) $2x=4$

آپ نے اوپر دیئے گئے سوالات کو حل کرتے ہوئے دیکھا کہ ان میں "=" نشان کا استعمال کیا گیا ہے جسکا مطلب ہے اس میں دایاں حصّہ اور بایاں حصّہ برابر ہے۔ انہیں مساوات کہتے ہیں، جو عبارتوں میں نہیں ہوتا۔

$x+3$ سے کیا آپ x کی قیمت نکال سکتے ہیں

کچھ خطی عبارت ہیں۔

$3x, 3x+1, 12x+5, \frac{5}{4}(x-4)$

غور کریں یہ خطی عبارت کیوں ہیں؟

یہ خطی عبارت نہیں ہیں۔ $x^2+3, y+y^2, 1+x+x^2$

(دھیان دیجئے یہاں متغیر کی سب سے بڑی قوت اسے زیادہ ہے)

اِس سبق میں ہم ایک متغیر والے خطی مساوات کے بارے میں پڑھیں گے۔ ان میں ایک متغیر والے خطی عبارتوں کا استعمال ہوتا ہے۔ الجبرائی مساوات حقیقت میں متغیروں پر ایک شرط والی برابری ہوتی ہے۔ آیئے متغیروں کو کچھ شرطوں سے جوڑ کر مساوات بنائیں۔

$3x, 3x+1$ خطی عبارت ہے جبکہ $3x=6$ اور $3x+1=4$ خطی مساوات ہے

(i) ایک عدد کے 5 گنے میں 10 جوڑنے پر 30 ملتا ہے۔

اگر مان لیجئے وہ عدد x ہے تو

اس عدد کا 5 گنا ہوگا $5 \times x = 5x$

اب اِس میں 10 جوڑتے ہیں $5x + 10$

شرط کے مطابق یہ 30 کے برابر ہوگا

اِس لئے $5x+10=30$ (یہ بن گیا ایک متغیر والا خطی مساوات)

(ii) کسی عدد میں سے 2 گھٹا کر اگر 4 سے ضرب کریں تو 12 ملتا ہے۔

اگر مان لیجئے کہ وہ عدد x ہے تو

عدد میں 2 گھٹانے پر $x-2$ ہوا۔

اب ہمیں $(x-2)$ کو 4 سے ضرب کرنا ہے

$$4\text{x}(x-2)=4(x-2)$$

شرط کے مطابق جو کہ 12 کے برابر ہے

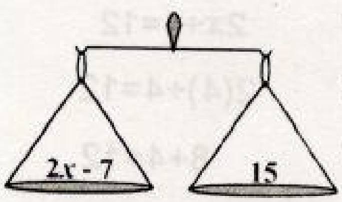
اِس لئے $4(x-2)=12$ (یہ ایک مساوات ہے)

خود کر کے دیکھئے

مساوات بنایئے۔

1. کسی عدد کا 4 گنا 40 ہے۔
2. کسی عدد کا 2 گنا اس عدد کے 5 گنے سے 21 کم ہے۔
3. رمیش کی موجودہ عمر اس کی 5 سال پہلے کی عمر کی 2 گنی ہے

آیئے اب ہم دیئے گئے مساوات کو حل کرنا سیکھیں۔



مساوات کے دونوں حصے (پہلو) ترازو کے دو متوازن پلڑوں کے طرح ہیں۔ اگر دونوں حصوں میں ایک جیسے ریاضی عملیات کئے جائیں تب بھی مساوات متوازن ہی رہتا ہے۔ ہاں، ایسا کرنے سے اس کی شکل ضرور بدل جائے گی۔

$$2x-7=15$$

$2x-7+7=15+7$ (دونوں پلڑوں میں 7 جوڑنے پر)

$2x=22$ ترازو متوازن (balanoed) رہے گا۔

$$\frac{2x}{2} = \frac{22}{2}$$ (دونوں حصوں میں 2 سے تقسیم کرنے پر)

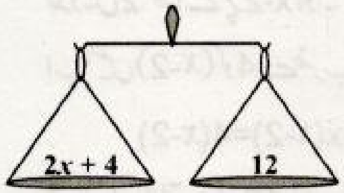
$x = 11$ (یہ مساوات کا حل ہے)

2.2 مساوات کو حل کرنا، جن کے ایک طرف میں الجبرائی عبارت اور دوسرے طرف میں صرف اعداد ہوں:

Solving equations which have Linear Expressions on one side and Numbers on the other side :

ہم نے پچھلی جماعت میں بھی ایسے مساوات کا حل حاصل کیا ہے۔ آیئے، ہم کچھ مثالوں کے ذریعہ انہیں پھر سے سمجھیں۔

مثال 1: حل معلوم کیجئے



$$2x+4=12$$

حل: Step-1 دونوں طرف سے 4 گھٹانے پر

$2x+4-4=12-4$ (توازن نہیں بگڑا)

یا $2x=8$

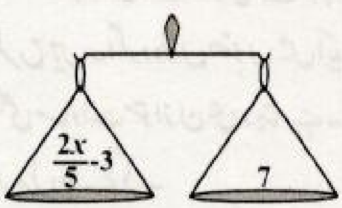
Step-2 دونوں طرف 2 سے تقسیم کرنے پر

$$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$$

یا $x=4$ (یہ مساوات کا حل ہے)

حل کو جانچنے کے لئے آپ حل کو پھر مساوات میں رکھ "=" برابری دیکھ سکتے ہیں۔

$2x+4=12$ (x کی قیمت 4 رکھنے پر)



$2(4)+4=12$

$8+4=12$

$12=12$ اس لئے حل صحیح ہے۔

مثال 2: حل معلوم کیجئے

$$\frac{2x}{5} - 3 = 7$$

حل: $\frac{2x}{5} - 3 = 7$ یا $\frac{2x}{5} - 3 + 3 = 7 + 3$ (دونوں طرف 3 جوڑنے)

یا $\frac{2x}{5} = 10$ (توازن نہیں بگڑا)

یا $\frac{2x}{5} \times 5 = 10 \times 5$ (دونوں طرف 5 سے ضرب کرنے پر)

یا $2x = 50$ (توازن نہیں بگڑا)

یا $\frac{2x}{2} = \frac{50}{2}$ (دونوں طرف 2 سے تقسیم کرنے پر)

یا $x = 25$ (یہ مساوات کا حل ہے)

باہم تبادلہ سے (By transposing)

$\frac{2x}{5} - 3 = 7$

یا $\frac{2x}{5} = 7 + 3$ (3- کا باہم تبادلہ کرنے پر 3+ ہوا)

یا $\frac{2x}{5} = 10$

یا $2x = 10 \times 5$

یا $2x = 50$

یا $x = \frac{50}{2}$

یا $x = 25$ (یہ مساوات کا حل ہے)

> دھیان دیجئے یہاں 5 کا باہم تبادلہ میں نشان (sign) نہیں بدلا۔ ضرب یا تقسیم سے جُڑے ہوئے متغیر یا غیر متغیر کا باہم تبادلہ کرنے پر وے بالترتیب ضرب یا تقسیم میں بدل جاتے ہیں لیکن اُن کا نشان (sign) نہیں بدلتا ہے۔ یہ بھی دھیان دینے والی بات ہے کہ ایسے متغیر یا غیر متغیر کا باہم تبادلہ تبھی ہوتا ہے جب عبادت ایک رکنی (Single Term) ہو۔

عملاً ہم مساوات کے حل میں باہم تبادلہ کے طریقہ کا استعمال کرتے ہیں۔ باہم تبادلہ طریقہ مساوات کو حل کرنے کا مختصر طریقہ ہے۔ آگے ہم باہم تبادلہ طریقہ کا استعمال کریں گے۔

مثال 3: حل معلوم کیجئے

$$x + \frac{x}{4} = 20$$

حل:

$$x + \frac{x}{4} = 20$$

یا $x \times 1 + x \times \frac{1}{4} = 20$ $\left(\because x = x \times 1,\ \frac{x}{4} = x \times \frac{1}{4}\right)$

یا $x\left(1 + \frac{1}{4}\right) = 20$

یا $x\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4}\right) = 20$

یا $x\left(\frac{4+1}{4}\right) = 20$

یا $x \times \frac{5}{4} = 20$

یا $\frac{5x}{4} = 20$

یا $5x = 20 \times 4$

یا $x = \frac{20 \times 4}{5}$

یا $x = 4 \times 4$

$x = 16$

(یہ مساوات کا حل ہے)

خود کر کے دیکھئے:

حل کیجئے:

(i) $5x+4=9$

(ii) $\frac{5}{2} + 2x = \frac{15}{4}$

(iii) ایک شخص کے پاس سکّوں کے چوتھائی حصّہ سے 2 کم تعداد میں نوٹ ہے اگر نوٹوں کی تعداد 19 ہے تو سکّوں کی تعداد کیا ہوگی؟

Hints: سکّوں کی تعداد x مان کر حل کریں

سوالنامہ 2.1

مندرجہ ذیل مساوات کوحل کیجئے:

1. $3(x-3)=15$
2. $\frac{x}{2}-7=15$
3. $\frac{-2x}{7}+2=8$
4. $7-3x=18$
5. $18=40-3x$
6. $\frac{25}{6}-9y=11$
7. $2.4=\frac{x}{2.5}-1$
8. $3x+10=x$
9. $2\left(x+\frac{11}{4}\right)=13$
10. $\frac{x}{3}+\left(\frac{-14}{3}\right)=\frac{3}{7}$

2.3 مساوات کا استعمال: (Application of equation)

مساوات کے ذریعہ ہم منطق اور روزمرّہ زندگی کے ریاضی مسائل کوحل کرتے ہیں۔ آیئے کچھ مثالوں کے دریعہ اسے سمجھیں۔

مثال-4: دواعداد کا جوڑ 15 ہے۔ اگر ایک عدد دوسرے سے 5 زیادہ ہے تو دونوں اعداد معلوم کیجئے۔

حل: سب سے پہلے ہم دئے گئے بیان (Statement) سے مساوات بناتے ہیں۔ اس کے لئے نامعلوم (Unknown) کو متغیر مانتے ہوئے شروع کرتے ہیں۔

مان لیا کہ چھوٹا نامعلوم عدد x ہے

سوال کے شرائط کے مطابق

بڑا نامعلوم عدد = چھوٹا نامعلوم عدد سے 5 زیادہ

$= x+5$

پھر، دونوں اعداد کا جوڑ = 15

$\therefore\ x+(x+5)=15$

یا $x+x+5=15$

یا $2x+5=15$

یا $2x=15-5$

یا $2x=10$

یا $x=\frac{10}{2}$

یا $x=5$

∴ اعداد $x=5$ اور $x+5=5+5=10$

یعنی ایک عدد 5 اور دوسرا عدد 10 ہے۔

مثال-5: $\frac{-8}{3}$ کے دوگنے سے 1 زیادہ میں کیا گھٹائیں کہ $\frac{2}{7}$ ملے؟

حل: $\frac{-8}{3}$ کے دوگنے سے 1 زیادہ $=2\left(\frac{-8}{3}\right)+1$

مان لیا کہ $2\left(\frac{-8}{3}\right)+1$ میں سے x گھٹانے پر $\frac{2}{7}$ حاصل ہوتا ہے

تب مساوات

$$2\left(\frac{-8}{3}\right)+1-x=\frac{2}{7}$$

یا $$\frac{-16}{3}+\frac{1}{1}-x=\frac{2}{7}$$

یا $$\frac{-16+3}{3}-x=\frac{2}{7}$$

یا $$\frac{-13}{3}-x=\frac{2}{7}$$

یا $$-x=\frac{2}{7}+\frac{13}{3}$$

یا $$-x=\frac{6+91}{21}=\frac{97}{21}$$

یا $$-x=\frac{97}{21}$$

یا $$(-x)\,(-1)=\frac{97}{21}\times(-1)$$

∴ $$x=\frac{-97}{21}$$

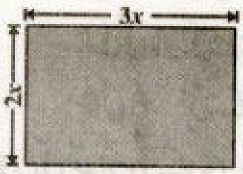
یا $(-x)\ (-1) = \frac{97}{21} \times (-1)$

$\therefore$ $x = \frac{-97}{21}$

مثال 6: ایک مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی کا تناسب 3:2 ہے اور اِس کا احاطہ 30 میٹر ہو تو اس کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجئے۔

حل: مان لیا مستطیل کی لمبائی 3x میٹر اور چوڑائی 2x میٹر ہے۔ (کیوں؟)

$\therefore$ سوال کے شرائط کے مطابق



$30 = 2\ (3x + 2x)$

یا $30 = 2 \times 5x$

یا $30 = 10x$

یا $10x = 30$ (دونوں طرف کے سبھی رکن کا باہم تبادلہ کرنے پر کوئی نشان تبدیل کیوں نہیں ہوا؟)

$x = \frac{30}{10} = 3$

$\therefore$ لمبائی $= 3x = 3 \times 3 = 9$ میٹر، چوڑائی $= 2x = 2 \times 3 = 6$ میٹر

مثال 7: جولی کی ماں کی موجودہ عمر، جولی کی موجودہ عمر کے 3 گنے سے 1 سال کم ہے، اگر 5 سال پہلے ان کی عمروں کا جوڑ 29 سال تھا تو ان لوگوں کی موجودہ عمر کیا ہوگی؟

حل: مان لیا کہ جولی کی موجودہ عمر x سال ہے۔

	جولی	ماں	جوڑ
موجودہ عمر	x	$3x-1$	
5 سال پہلے کی عمر	$x-5$	$3x-1-5$ $=3x-6$	$x-5$ $+3x-6$ $4x-11$

5 سال پہلے عمروں کا جوڑ 29 سال دیا ہوا ہے۔

سوال کے شرائط کے مطابق

$(x-5)+(3x-6)=29$

یا $x-5+3x-6=29$

یا $4x-11=29$

یا $4x=29+11$

یا $4x=40$

یا $x=\frac{40}{4}$

یا $x=10$

اِس لئے جولی کی موجودہ عمر $=x=10$ سال

جولی کی ماں کی موجودہ عمر $3x-1=3\times10-1=30-1=29$ سال

مثال 8: بنٹی کے پاس 2 روپے کے اور سونو کے پاس 5 روپے کے کچھ سکّے ہیں، اگر بنٹی کے پاس سکّوں کی تعداد سونو کے پاس کے سکّوں کی تعداد کے 3 گُنے سے 2 کم ہے اور ان کے پاس کے سبھی سکّوں کی کل قیمت 51 روپے ہے تو ہر ایک کے پاس کتنی رقم ہے؟

حل: مان لیا کہ سونو کے پاس 5 روپیہ کے x سکّے ہیں

∴ سونو کے پاس کل رقم $=5x$

سوال کے شرائط کے مطابق،

بنٹی کے پاس کے کل سکّے $=3x-2$

بنٹی کے پاس کل رقم $=2\times(3x-2)$

اب سوال کے شرائط کے مطابق

سونو کے پاس کی رقم + بنٹی کے پاس کی رقم $=51$

یا $5x+2(3x-2)=51$

یا $5x+6x-4=51$

یا $11x=51+4$

یا $11x=55$

یا $x=\frac{55}{11}$

∴ $x=5$

∴ سونو کے پاس کی رقم $5x = 5\times5 = 25$ روپیہ

بنٹی کے پاس کی رقم $= 2(3x-2) = 2\times(3\times5-2)$

$= 2(15-2) = 2\times13 = 26$ روپیہ

مثال 9: تین لگاتار طاق اعداد کا جوڑ 93 ہے تو اعداد معلوم کیجئے۔

حل: مان لیا کہ سب سے چھوٹا طاق عدد x ہے

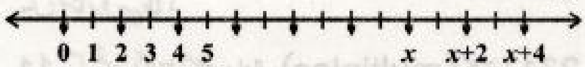
دو لگاتار طاق اعداد بالترتیب $(x+2)$ اور $(x+4)$ ہیں

(∴ دو لگاتار طاق اعداد کا فرق 2 ہوتا ہے)

∴ سوال کے شرائط کے مطابق

$$x + (x+2) + (x+4) = 93$$

یا $x + x + 2 + x + 4 = 93$



یا $3x + 6 = 93$

یا $3x = 93 - 6$

یا $3x = 87$

یا $x = \frac{87}{3}$

∴ $x = 29$

∴ طاق اعداد $= x = 29$

$= x + 2 = 29 + 2 = 31$

$= x + 4 = 29 + 4 = 33$

سوالنامہ 2.2

1. اگر کسی عدد کے آدھے میں سے $\frac{1}{4}$ گھٹایا جائے تو $\frac{1}{8}$ حاصل ہوتا ہے۔ عدد معلوم کیجئے۔
2. اگر کسی مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی کا فرق 5 میٹر ہو اور احاطہ 110 میٹر ہو تو لمبائی اور چوڑائی معلوم کریں۔
3. چینی کی قیمت میں 25 فیصد کا اضافہ ہونے پر اب 1 کیلوگرام چینی کی قیمت 32 روپیہ ہے۔ شروع میں چینی کی قیمت فی کیلوگرام کیا تھی؟

4. دو مختلف قیمت والے 35 قلموں کی کل قیمت 60 روپیہ ہے۔ اگر 1 سستا قلم کی قیمت 1.50 روپیہ اور 1 مہنگا قلم کی قیمت 2 روپیہ ہے تو مہنگا قلم کتنا خریدا گیا؟

5. ایک مثلث کے تینوں زاویہ 2:3:5 کے تناسب میں ہیں تو مثلث کے تینوں زاویوں کو معلوم کیجئے۔

6. بلّو کے پاس 1 روپیہ، 2 روپیہ اور 5 روپیہ کے کل 160 سکّے ہیں، جن کی کل قیمت 300 روپیہ ہے۔ اگر 2 روپیہ کے سکّوں کی تعداد، 5 روپیہ کے سکّوں کی تعداد کی تین گنی ہو تو اس کے پاس ہر ایک قسم کے کتنے سکّے ہیں؟

7. ایک والد اپنی تین اولادوں کے بیچ اپنی ملکیت کا بٹوارا 1:2:3 کے تناسب میں کرتا ہے اور اپنے لئے 100000 روپیہ رکھتا ہے۔ اگر اس کی کل ملکیت 2.5 لاکھ روپیہ کی ہو تو ہر ایک اولاد کو حصّہ کی شکل میں کتنا روپیہ ملا؟

8. 11 کے تین لگاتار مضروبوں (multiples) کا جوڑ 231 ہے۔ انہیں معلوم کیجئے۔

9. وسائل مرکز مڈل اسکول فرنا میں منعقد بچّوں کے میلے میں ہر ایک فاتح طالب علم کو 2 قلم اور فاتح کو چھوڑ کر سبھی شرکاء کو 1 قلم دیا گیا۔ اگر 100 طلباء کے بیچ 120 قلم دئے گئے تو فاتح طلباء کی تعداد معلوم کیجئے۔

10. رحیم کے والد کی موجودہ عمر، رحیم کی موجودہ عمر کے تین گنے سے 5 سال زیادہ ہے۔ 5 سال کے بعد ان کی عمروں کا جوڑ 47 سال ہوگا۔ دونوں کی موجودہ عمر معلوم کیجئے۔

2.4 مساوات کو حل کرنا، جب دونوں جانب متغیر موجود ہوں:

مساوات ایک برابری (Equality) ہوتا ہے جس کے دونوں طرف متغیر موجود رہ سکتے ہیں۔ ایسے مساوات کا حل ہم درج ذیل مثالوں میں دیکھیں گے۔

مثال 10: حل کیجئے۔ $2x + 3 = x + 8$

حل: $2x + 3 = x + 8$

یا $2x + 3 - x = x + 8 - x$ (دونوں طرف سے x گھٹانے پر)

یا $2x + 3 - x = 8$

یا $x + 3 = 8$

یا $x = 8 - 3$

$\therefore$ $x = 5$

دونوں طرف متغیر رہنے پر متغیر کو ایک طرف کرنے کے لئے اس کا باہم تبادلہ کرتے ہیں۔ اس کے لئے متغیر کا اسی طریقہ سے باہم تبادلہ کرتے ہیں جیسے اعداد کا کرتے ہیں۔ جیسے

اگر $2x=x+1$ تب $2x-x=1$

مثال 11. حل کیجئے:

$$5x-\frac{7}{2}=14-\frac{3}{2}x$$

حل: $$5x-\frac{7}{2}=14-\frac{3x}{2}$$

یا $$5x+\frac{3x}{2}=14+\frac{7}{2}$$

یا $$\frac{5x}{1}+\frac{3x}{2}=\frac{14}{1}+\frac{7}{2}$$

یا $$\frac{5x\times2+3x}{2}=\frac{14\times2+7}{2}$$

یا $$\frac{10x+3x}{2}=\frac{28+7}{2}$$

یا $$\frac{13x}{2}=\frac{35}{2}$$

یا $$13x=\frac{35}{2}\times2$$

یا $$13x=35$$

$$\therefore\quad x=\frac{35}{13}=2\frac{9}{13}$$

2.5 مساوات کو مختصر شکل میں بدل کر حل کرنا:

Solve Equations by reducing to simpler form:

مندرجہ بالا دو مثالوں میں آپ نے دیکھا کہ مشکل نظر آنے والے مساوات بھی چند عملیات کے بعد سہل خطی مساوات کے شکل میں آجاتے ہیں۔ جنہیں حل کیا جاسکتا ہے۔

کراس ضرب (Cross Multiplication) کے ذریعہ سہل کرنے پر کچھ قابل پیائش شکل والے مساوات، سہل مساوات کے شکل میں آجاتے ہیں۔

دیا گیا ہے

$$\frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{3}$$

$$\left(\frac{x+1}{2}\right) \times 2 \times 3 = \left(\frac{x-1}{3}\right) \times 2 \times 3$$ (دونوں طرف 2x3 سے ضرب کرنے پر)

یا $$(x+1)\ 3 = (x-1)\ 2$$

اب اگر آپ کراس ضرب سے LHS کے نسب نما (Denominator) کو سیدھے، RHS کے شمار کنندہ (Numerator) سے ضرب کریں اور اِسی طرح RHS کے نسب نما کو LHS کے شمار کنندہ سے ضرب کریں۔

$$\frac{(x+1)}{2} = \frac{(x-1)}{3}$$ تب بھی آپ کو وہی حاصل ہوتا ہے

کراس ضرب کرنے پر

$$3 \times (x+1) = 2\ (x-1)$$

اِس کے علاوہ دوسرے ریاضی عملیات کا بھی استعمال مساوات کو سہل کرنے میں کرتے ہیں۔ اب مندرجہ ذیل مثالوں کے ذریعہ مشکل مساوات کو سہل کرکے ان کو حل کرتے ہیں۔

مثال 12: حل کیجیے:

$$\frac{6x+1}{3} + 1 = \frac{x-3}{6}$$

حل: $$\frac{6x+1}{3} + 1 = \frac{x-3}{6}$$

یا $$\frac{6x+1}{3} + \frac{1}{1} = \frac{x-3}{6}$$

یا $\dfrac{6x+1+3}{3} = \dfrac{x-3}{6}$

یا $\dfrac{6x+4}{3} = \dfrac{x-3}{6}$

یا $6(6x+4) = 3(x-3)$ (کراس ضرب کرنے پر)

یا $36x + 24 = 3x - 9$

یا $36x - 3x = -9 - 24$

یا $33x = -33$

یا $x = \dfrac{-33}{33}$

$\therefore$ $x = -1$

مثال13. حل کیجیے: $\dfrac{x+1}{2x+3} = \dfrac{3}{8}$

حل: $\dfrac{x+1}{2x+3} = \dfrac{3}{8}$

یا $(x+1)\times 8 = 3\times(2x+3)$ (کراس ضرب کرنے پر)

یا $8x + 8 = 6x + 9$

یا $8x - 6x = 9 - 8$

یا $2x = 1$

$\therefore$ $x = \dfrac{1}{2}$

مثال14: کسی مستطیل کے متصلہ اضلاع 4:3 کے تناسب میں ہیں۔ اگر ہر ایک 5 میٹر بڑھ جائے تو اُن کا تناسب 5:4 ہو جاتا ہے۔ اضلاع معلوم کیجیے۔

حل: مان لیا کہ مستطیل کے متصلہ اضلاع 4x میٹر اور 3x میٹر ہیں۔

ہر ایک میں 5 میٹر کا اضافہ ہونے پر اضلاع (4x+5) میٹر اور (3x+5) میٹر ہیں۔

سوال کے شرائط کے مطابق

$$\frac{4x+5}{3x+5} = \frac{5}{4}$$

یا $4(4x+5) = 5(3x+5)$ (کراس ضرب کرنے پر)

یا $16x + 20 = 15x + 25$

یا $16x - 15x = 25 - 20$

یا $x = 5$

∴ متصلہ اضلاع، $4x = 4 \times 5 = 20$ میٹر

$3x = 3 \times 5 = 15$ میٹر

سوالنامہ-2.3

مندرجہ ذیل مساوات کو حل کیجئے:

1. $\frac{7-6x}{9x} = \frac{1}{15}$
2. $\frac{z}{4} = \frac{z+15}{9}$
3. $x^2-(x-2)^2=32$
4. $(x+4)^2-(x-5)^2=9$
5. $(y+3)(y-3)-y(y+5)=6$
6. $\frac{5x-4}{6} = 4x+1-\frac{3x+10}{2}$
7. $\frac{4y+1}{3}+\frac{2y-1}{2}-\frac{3y-7}{5}=\frac{47}{10}$
8. $\frac{0.3+0.7x}{x} = 0.95$
9. $\frac{15(2-x)-5(x+6)}{1-3x} = 6$

10. دو ہندسوں کے ایک عدد میں دہائی کی جگہ کا ہندسہ، اکائی کی جگہ کے ہندسہ کا تین گنا ہے۔ اگر ہندسوں کی جگہ بدل دی جائے تو نیا عدد پہلے والے عدد سے 36 کم ہوگا۔ وہ عدد معلوم کیجئے۔

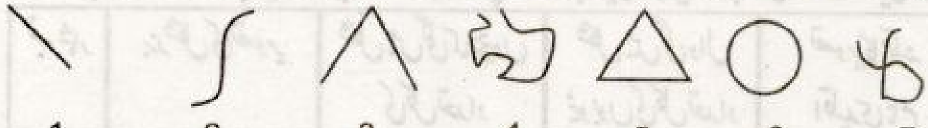
11. ایک ناؤ بہاؤ کی سمت میں چل کر دو گھاٹوں کے بیچ کی دوری 9 گھنٹے میں طے کرتی ہے۔ یہی دوری بہاؤ کے مخالف سمت میں چل کر 10 گھنٹے میں طے کرتی ہے۔ اگر بہاؤ کی چال 1 کیلومیٹر / گھنٹہ ہو تو ٹھہرے ہوئے پانی میں ناؤ کی چال اور دونوں گھاٹوں کے بیچ کی دوری معلوم کیجئے۔

باب-3 اقلیدسی شکلوں کی سمجھ وفہم

Understanding of Geometrical Fingures

3.1 تمہید:

پچھلی جماعت میں ہم نے خطوں کے بارے میں سیکھا ہے۔ آیئے ہم اپنے نوٹ بک کے کاغذ پر پینسل رکھیں اور بغیر اسے اٹھائے خط کھینچنے کا عمل کریں۔ آپ بھی بغیر پینسل اٹھائے زیادہ سے زیادہ طرح کے شکلیں بنائیے۔ آپ کے ذریعہ خط کھینچنے سے بنی شکلیں مندرجہ ذیل طرح کی ہوسکتی ہیں:

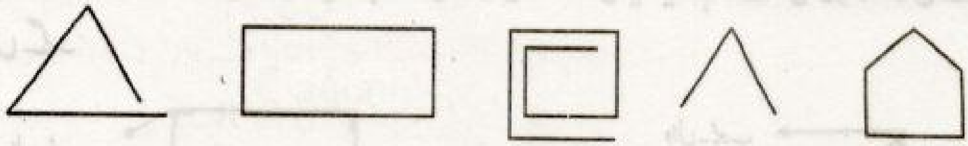


1 2 3 4 5 6 7

اوپر کی شکلوں کو دھیان سے دیکھئے۔ سوچئے اوپر کے شکلوں کے علاوے آپ نے جو دوسری شکلیں بنائی ہیں، ان میں سے کون کون سہل (simple) شکلیں ہیں کہ شکل 7 کو چھوڑ کر باقی سبھی شکلیں سہل ہیں کیونکہ یہ کہیں بھی خود کو نہیں کاٹتی ہیں۔ شکل 5 فاور 6 سہل بند (Simple closed) شکلیں ہیں۔ شکل 3,2,1 اور 4 بند شکلیں نہیں ہیں لیکن سبھی سہل شکلیں ہیں؟

خود کر کے دیکھئے:

.1 نیچے قطعہ خطوط سے بنی کچھ سہل شکلیں دی گئی ہیں، ان میں سے بند (Closed) اور کھلی (Open) شکلیں چھانٹئے۔



....

.2 پانچ۔ پانچ سہل کھلی (Simple open) اور سہل بند (Simple closed) شکلیں بنائیے۔ پانچ۔ پانچ کھلی اور بند ایسی شکلیں بنائیے جو سہل نہ ہو۔

سرگرمی (Activity):

درجہ کے سبھی بچے چھوٹے چھوٹے گروپ میں بیٹھ جائیں گے۔ سبھی گروپ کے پاس ایک ہی ناپ کی بانس کی کچھ کماچیاں اور سائیکل کے وال ٹیوب کے کچھ ٹکڑے رہیں گے۔ استاد سبھی کو ہدایت دیں گے کہ وے بانس کی کماچیوں اور وال ٹیوبوں کی مدد سے مختلف بند شکلیں بنائیں۔ تب بچے اپنے اپنے گروپ میں بانس کی کماچیوں اور وال ٹیوب کی مدد سے بند شکلیں بنانا شروع کر دیں گے۔ استاد بیچ بیچ میں بچوں کو ہدایت دیتے رہیں گے کہ وے نئی شکلیں بناتے وقت ہر بار کماچیوں کی تعداد ایک ایک کر کے بڑھاتے جائیں۔ ہر بار دو کماچیوں کو جوڑنے کے لئے وال ٹیوب کا استعمال کریں گے۔

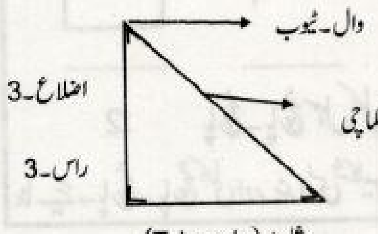
جب کچھ شکلیں بن جائیں گی تب استاد سبھی گروپ کو مندرجہ ذیل طریقے کا جدول بنانے کو دیں گے۔

نمبر شمار	بند شکل کی تصویر	شکل میں لگی کماچیوں کی کل تعداد	شکل میں لگی وال ٹیوبوں کی کل تعداد	تصویر کا ممکنہ اقلیدسی نام

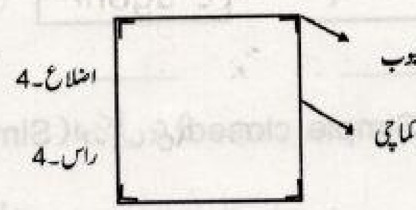
سبھی گروپ باری باری سے اپنے ذریعہ بنائے گئے شکلوں کو دکھاتے ہوئے اس میں لگے کل سامان کا تفصیل پیش کریں گے۔ کتنی کماچیاں لگیں؟ کتنے وال ٹیوب لگے؟

3.2.1 کثیر الاضلاع (Polygon):

قطعہ خطوط کی مدد سے بنی سہل اور بند شکلیں کثیر الاضلاع کہلاتی ہیں۔ اوپر کی سرگرمی میں آپکے ذریعہ بنائے گئے سبھی بند شکلیں کثیر الاضلاع کی مثال ہیں شکلوں کو بنانے میں جتنے کماچیوں کا استعمال کیا گیا ہے وے اس کثیر الاضلاع کے اضلاع ہوں گے۔ جتنے وال ٹیوبوں کا استعمال کیا گیا ہے وے اس کثیر الاضلاع کے راس ہوں گے۔

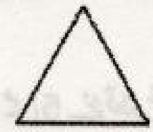
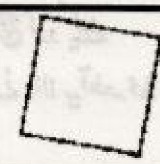
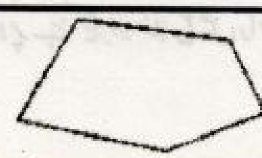
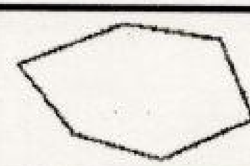
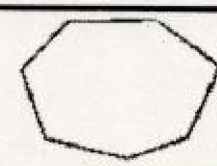


مثلث (Triangle)



ذوار بعۃ الاضلاع (Quadritateral)

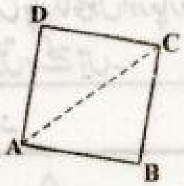
یہاں ہم نے دیکھا کہ تین کماچیوں اور تین وال ٹیوبوں سے بنی بند شکل مثلث ہے۔ اس میں تین اضلاع اور تین راس ہیں۔ اسی طرح چار کماچیوں اور چار وال ٹیوبوں سے بنی بند شکل ذوار بعۃ الاضلاع ہے۔ کثیر الاضلاع کا نام ہم اس کے اضلاع اور راس کے مطابق رکھتے ہیں۔

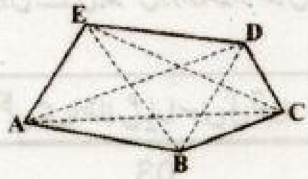
شکل کانمونہ	شکل میں اضلاع یا راسوں کی تعداد	شکل کا نام
	03	مثلث Triangle
	04	ذوار بعۃ الاضلاع Quardrilateral
	05	خمسۃ الاضلاع Pentagon
	06	مسدّس الاضلاع Hexagon
	07	مسبّع الاضلاع Heptagon

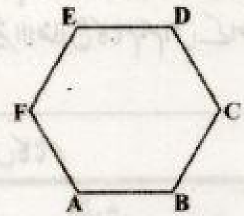
اِسی طرح نو اصلاع والے کثیر الاضلاع کو Nonagon اور دس اضلاع والے کثیر الاضلاع کو Decagon یعنی n اضلاع والے کثیر الاضلاع کو n اضلاع والا کثیر الاضلاع کہیں گے۔ سوچیے سہل بند شکل میں ضلع اور راسوں کی تعداد میں کیا رشتہ ہے؟

3.2.2 کثیر الاضلاع کا وتر:(Diagonals of polygon)

نیچے بنے کثیر الاضلاع کی شکلوں کی دیکھیے اور اس میں ان کے کسی دو راسوں کو جو متصل نہیں ہوں یعنی ٹھیک بغل کے نہیں ہوں، کو اسکیل کی مدد سے ملایئے۔ ذوار بعۃ الاضلاع ABCD میں راس A کو C راس سے جوڑ سکتے ہیں۔ اسی طرح B راس کو D راس سے جوڑ سکتے ہیں۔ یعنی ذوار بعۃ الاضلاع میں ایسے دو خطوط کھینچ سکتے ہیں۔







دوسری شکل خمسۃ الاضلاع (Pentagon) کی ہے۔ سلمیٰ کہتی ہے اس شکل میں 5 نئے قطعہ خطوط کھینچ سکتے ہیں اور مسدّس الاضلاع (Hexagon) میں 9- کیا آپ سلمیٰ سے متفق ہیں۔ کھینچ کر دیکھیے

کثیر الاضلاع میں اس کے کسی دو راسوں (متصلہ راسوں کو چھوڑ کر) کو ملانے والا یہ قطعہ خط اس کثیر الاضلاع کا وتر کہلاتا ہے۔

مسبّع الاضلاع اور مثمن الاضلاع میں کتنے کتنے وتر کھینچے جا سکتے ہیں۔ اوپر بنے کثیر الاضلاع میں راسوں اور کھینچے گئے وتروں کے نام لکھیے۔

شکل-1 ذو اربعۃ الاضلاع (Quadrilateral)

راس: ....، ....، ....، ....

وتر: ....، ....

شکل-2 خمسۃ الاضلاع (Pentagon)

راس: ....، ....، ....، ....، ....

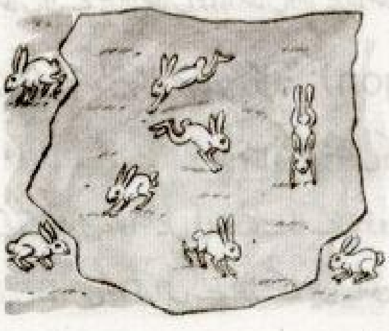
وتر: ....، ....، ....، ....، ....

شکل-3 مسدّس الاضلاع (Hexagon)

راس: ....، ....، ....، ....، ....، ....

وتر: ....، ....

سوچیں ایک مثلث میں کیا وتر کھینچے جا سکتے ہیں



3.2.3 کثیر الاضلاع کا اندرونی اور بیرونی حصّہ:

بغل کی تصویر کو غور سے دیکھیے۔ اس میں ایک کھیت میں کچھ خرگوش ہیں۔ کئی خرگوش ذو اربعۃ الاضلاع نما کھیت کے اندر اور کئی باہر ہیں۔

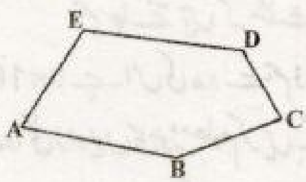
ذو اربعۃ الاضلاع کے اندر کا حصّہ اس کا اندرونی حصّہ اور باہر کا حصّہ بیرونی حصّہ کہلاتا ہے۔ اس طرح اس ذو اربعۃ الاضلاع نما

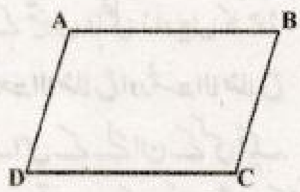
کھیت کے بیرونی حصّہ میں تین اور اندرونی حصّہ میں پانچ خرگوش ہیں۔ اِسی طرح ہر بند شکل کے اندر کا حصّہ اس کا اندرونی حصّہ اور باہر کا حصّہ بیرونی حصّہ کہلاتا ہے۔ پانچ بند شکل بنا کر اُن کے بیرونی حصّہ کے کچھ حصّے میں ہرا اور اندرونی حصّہ میں پیلا رنگ کریں۔ غور کریں! کیا اندرونی حصّہ اور بیرونی حصّہ کسی بند شکل میں ہی بتانا ممکن ہے؟

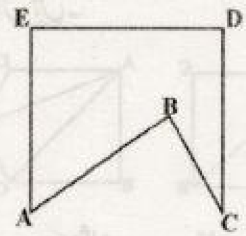
کثیر الاضلاع کے کچھ اقسام (Types of Polygon):

محدّب اور مجوّف کثیر الاضلاع (Convex and Concavepolygon)

نیچے تین کثیر الاضلاع دئے گئے ہیں۔ ان میں نمبر (iii) پر بنا ہوا کثیر الاضلاع باقی سے اور ابھی تک بنائے دوسرے کثیر ضلاع سے الگ ہے۔ کیا آپ پہچان سکتے ہیں کہ یہ الگ کیوں ہے؟





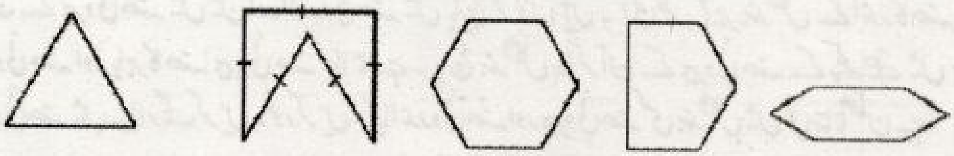


اگر درج بالا تینوں کثیر الاضلاع میں ہم وتر کھینچیں تو تیسرے کثیر الاضلاع کا ایک وتر کثیر الاضلاع کے باہر رہتا ہے۔ یہ ایک مجوّف کثیر الاضلاع (Concave polygon) کی مثال ہے۔ باقی بھی کثیر الاضلاع محدّب کثیر الاضلاع (Convex polygon) ہیں۔ تین ایسے مجوّف کثیر الاضلاع اور بنائیے اور ان میں اُن وتروں کو پہنچائیے جو پورا کا پورا یا اس کا کچھ حصّہ کثیر الاضلاع کے باہر ہو۔

3.2.4 مساوی اور غیر مساوی کثیر الاضلاع (Regular andrregular polygon):

جب کثیر الاضلاع کے سبھی اضلاع اور سبھی داخلی زاویے ایک ناپ (پیائش) کے ہوں تو وہ مساوی کثیر الاضلاع (Regular Polygon) کہلاتا ہے۔ مربع اور مثلث متساوی الاضلاع مساوی کثیر الاضلاع کے مثال ہیں۔

> **سوچئے:**
>
> - کیا مستطیل، مثلث قائم الزاویہ اور معیّن شکل (Rhombus) مساوی کثیر الاضلاع ہیں؟
> - کیا مثلث متساوی الاضلاع کے علاوہ کوئی اور مثلث، مساوی کثیر الاضلاع کا مثال ہوسکتا ہے؟
>
> کیا کوئی مجوّف کثیر الاضلاع، مساوی کثیر الاضلاع ہوسکتا ہے؟ وجہ بھی سوچئے۔
>
> جو کثیر الاضلاع، مساوی کثیر الاضلاع نہیں ہیں وے سبھی غیر مساوی کثیر الاضلاع ہیں۔



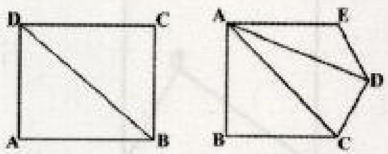
درج بالا تصاویر میں بناوٹ کے اعتبار سے مساوی اور غیر مساوی کثیرالاضلاع کو پہچانیں۔

....

3.2.5 کثیرالاضلاع کے داخلی زاویوں کی پیمائشوں کا جوڑ:

(Sum of the measures of the interior angles of a polygon)

مثلث، ذواربعۃ الاضلاع، خمسۃ الاضلاع وغیرہ کثیرالاضلاع کی مثال ہیں۔



ہم جانتے ہیں کہ مثلث کے تینوں داخلی زاویوں کا جوڑ 180 ہوتا ہے۔ اس کی مدد سے ہم ذواربعۃ الاضلاع اور خمسۃ الاضلاع کے داخلی زاویوں کا جوڑ معلوم کریں گے۔ اس کے لئے ان کے کسی ایک راس سے متصلہ راسوں کو چھوڑتے ہوئے باقی راسوں کو ملائیں گے اور کثیرالاضلاع کو مثلثوں میں بانٹیں گے۔ ذوار بعۃ الاضلاع ABCD میں ABD اور BCD دو مثلث ہیں۔ ان کے زاویوں کا جوڑ ذوار بعۃ الاضلاع کے چاروں راسوں کے داخلی زاویوں کا جوڑ ہے۔ یعنی داخلی زاویوں کا جوڑ 2x2 زاویہ قائمہ ہے۔ اس لئے داخلی زاویوں کا جوڑ 4 زاویہ قائمہ ہے اسی طرح ABCDE میں 6 مثلث ہیں۔ یعنی اس کے داخلی زاویوں کا جوڑ 6 زاویہ قائمہ ہے۔ اس طرح کثیرالاضلاع میں جتنے مثلث بنیں گے اس کثیرالاضلاع کے داخلی زاویوں کا جوڑ 180° کا اتنا گنا ہوگا۔ یعنی ذوار بعۃ الاضلاع ABCD کے داخلی زاویوں کا جوڑ 4 زاویوں قائمہ ہے اور خمسۃ الاضلاع ABCDE کے داخلی زاویوں کا جوڑ 6 زاویہ قائمہ ہے۔

اِس طرح مسدس الاضلاع اور مسبع الاضلاع میں بالترتیب 4 اور 5 مثلث بنیں گے۔ اِس لئے اِن کے داخلی زاویوں کا جوڑ بالترتیب 720° اور 900° ہوگا۔ کیا آپ اِس سے متفق ہیں؟

بنا کر دیکھئے۔

آیئے سوچیں کہ کیا ہم کثیرالاضلاع کے داخلی زاویوں کے ناپوں کا جوڑ معلوم کرنے کے لئے کوئی Pattern بنا سکتے ہیں کیا؟ اس کے لئے ابھی تک جمع کئے گئے آنکڑوں کو جدول میں بھریئے:

کثیر الاضلاع کا نام	اضلاع کی تعداد	کثیر الاضلاع میں بننے والے مثلثوں کی تعداد	داخلی زاویوں کی پیائش	داخلی زاویہ معلوم کرنے کا Pattern	کثیر الاضلاع زاویوں کا جوڑ
مثلث	3	1	2زاویہ قائمہ	$(3-2)\times180^\circ$	180°
ذوار بعتہ الاضلاع	4	2	4زاویہ قائمہ	$(4-2)\times180^\circ$	360°
خمستہ الاضلاع	5	3	6زاویہ قائمہ	$(5-2)\times180^\circ$	540°
مسدس الاضلاع	6	4	8زاویہ قائمہ	$(6-2)\times180^\circ$	720°
سبع الاضلاع	7	5	10زاویہ قائمہ	$(7-2)\times180^\circ$	900°
nاضلاع	n	n-2	(n-2)2زاویہ قائمہ	$(n-2)\times180^\circ$	$(n-2)\times180^\circ$

اِس طرح کثیر الاضلاع کے اضلاع کی تعداد معلوم رہنے پر ہم اس کے سبھی داخلی زاویوں کی پیائش کا جوڑ آسانی سے معلوم کرسکتے ہیں۔

n-اضلاع والے کثیر الاضلاع کے داخلی زاویوں کی پیائشوں کا جوڑ (n-2)2زاویہ قائمہ ہے۔

مثال 1: ایک کثیر الاضلاع کے اضلاع کی کل تعداد 9 ہے۔ اس کے داخلی زاویوں کی پیائشوں کا جوڑ کیا ہوگا؟

حل: کثیر الاضلاع کے اضلاع کی تعداد=9

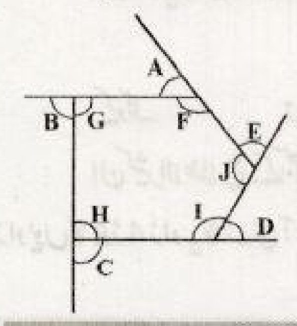
یعنی n=9

اِس کثیرِ الاضلاع کے داخلی زاویوں کی پیائشوں کا جوڑ (9-2)2زاویہ قائمہ

یعنی 14زاویہ قائمہ $=14\times90^\circ=1260^\circ$

3.2 6 کثیر الاضلاع کے خارجی زاویوں کی پیائشوں کا جوڑ:

(Sum of the measures of the exterior angles of a polygon)



بائیں جانب سے خمستہ الاضلاع کی تصویر کو غور سے دیکھئے۔ اِس میں D,C,B,A اور E خارجی زاویہ ہیں۔ I, H, G, F اور J داخلی زاویہ ہیں

ہمیں ان خارجی زاویوں کی پیائشوں کا جوڑ معلوم کرنا ہے۔

ہمیں معلوم ہے کہ خمستہ الاضلاع کے داخلی زاویوں کی پیائشوں کا جوڑ (5-2)2زاویہ قائمہ $=540^\circ$ ہوتا ہے۔

زاویہ F+زاویہ G+زاویہ H+زاویہ I+زاویہ J$=540^\circ$

بناوٹ سے،

ہم دیکھتے ہیں کہ داخلی زاویہ F + خارجی زاویہ $A = 180^\circ$

(دونوں ایک ہی خط مستقیم پر بنے زاویہ ہیں)

اِسی طرح داخلی زاویہ G + خارجی زاویہ $B = 180 = 2$ زاویہ قائمہ

داخلی زاویہ H + خارجی زاویہ $C = 180 = 2$ زاویہ قائمہ

داخلی زاویہ I + خارجی زاویہ $D = 180 = 2$ زاویہ قائمہ

داخلی زاویہ J + خارجی زاویہ $E = 180 = 2$ زاویہ قائمہ

ان سبھی زاویہ کو جوڑنے پر

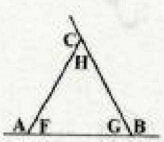
داخلی زاویہ F + خارجی زاویہ A + داخلی زاویہ G + خارجی زاویہ B + داخلی زاویہ H + خارجی زاویہ C + داخلی زاویہ I + خارجی زاویہ D + داخلی زاویہ J + خارجی زاویہ $E = 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ = 10$ زاویہ قائمہ

اِس طرح داخلی زاویہ $(F+G+H+I+J)$ + خارجی زاویہ $(A+B+C+D+E) = 900^\circ = 10$ زاویہ قائمہ

خارجی زاویہ $(A+B+C+D+E) = 900-(F+G+H+I+J)$

خارجی زاویہ $(A+B+C+D+E) = 900^\circ - 540^\circ = 360^\circ = 4$ زاویہ قائمہ

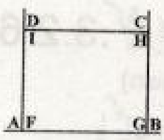
یعنی خمسۃ الاضلاع کے خارجی زاویوں کی پیمائشوں کا جوڑ 360^0 ہے۔ اِسی طرح ایک مثلث اور ایک ذو اربعۃ الاضلاع کو لیں۔



$\angle A + \angle F + \angle B + \angle G + \angle C + \angle H = 6$ زاویہ

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle F + \angle G + \angle H = 6$ زاویہ

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4$ زاویہ



$\angle A + \angle F + \angle B + \angle G + \angle C + \angle H + \angle D + \angle I = 8$ زاویہ قائمہ

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle F + \angle G + \angle H + \angle I = 8$ زاویہ قائمہ

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4$ زاویہ قائمہ

کیونکہ $\angle F + \angle G + \angle H + \angle I = 4$ زاویہ قائمہ

اِن کثیر الاضلاع کے سبھی خارجی زاویوں کو ملا کر پورا ایک چکّر لگ جاتا ہے، تب بھی کثیر الاضلاع کے خارجی زاویوں کا جوڑ 4 زاویہ قائمہ ہی آتا ہے۔ یعنی چونکہ ایک بند شکل کا پورا چکّر اس کے خارجی زاویوں کا جوڑ ہوتا ہے۔

اس لئے کتنے بھی اضلاع ہوں خارجی زاویوں کا جوڑ 4 زاویہ قائمہ ہی ہوگا۔

اِسی طرح کسی کثیر الاضلاع کے سبھی خارجی زاویوں کی پیمائشوں کا جوڑ معلوم کرنے کے لئے ہمیں اُس کثیر الاضلاع کا پورا ایک چکّر لگانا پڑتا ہے۔ کسی بھی محدّب (Convex) بند شکل کا پورا چکّر لگا کر ہم 360° کا زاویہ بناتے ہیں۔

مساوی کثیر الاضلاع مساوی کثیر الاضلاع کے سبھی خارجی زاویہ بھی یکساں ناپ کے ہوتے ہیں۔ کیا آپ متفق ہیں؟

آیئے خارجی زاویوں کی پیمائشوں کے جوڑ کے قاعدے پر کچھ سوالوں کو حل کریں:

مثال 1: ایک خمسۃ الاضلاع کے پانچ خارجی زاویوں میں سے چار زاویے بالترتیب $75^\circ, 55^\circ, 80^\circ$ اور 60° ہیں۔ اس کے پانچویں خارجی زاویہ کو معلوم کیجئے۔

حل: خمسۃ الاضلاع کے خارجی زاویوں کی پیمائشوں کا جوڑ 360° ہوتا ہے۔ خمسۃ الاضلاع کے چار زاویے بالترتیب $75^\circ, 55^\circ, 80^\circ$ اور 60° ہیں۔

پانچواں خارجی زاویہ $= 360^0-(75^0+55^0+80^0+60^0)$

$=360^0-270^0$

$=90^0$

مثال 2: ایک مساوی کثیر الاضلاع کا ایک خارجی زاویہ 60^0 ہے تو اس کثیر الاضلاع میں کتنے اضلاع ہیں؟

حل: کثیر الاضلاع کے خارجی زاویوں کی پیمائشوں کا جوڑ 360 ہوتا ہے۔

چونکہ مساوی کثیر الاضلاع کا ہر ایک خارجی زاویہ یکساں ناپ کا ہوتا ہے۔

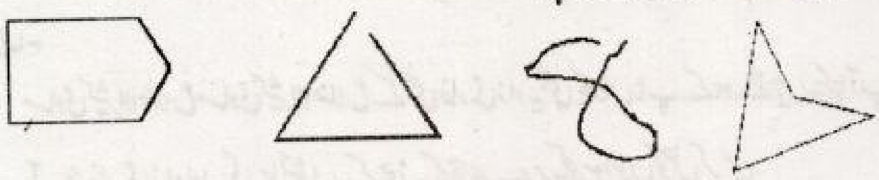
اضلاع کی تعداد $\frac{360}{60} = 6$

مطلوبہ کثیر الاضلاع ایک مسدّس الاضلاع ہے۔

سوالنامہ-3.1

1. سہل اور بند شکل کیا ہوتی ہیں؟ مثال دیتے ہوئے اسکی خاص حصوں کو سمجھائیے۔

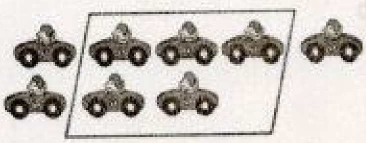
2. مندرجہ بالا شکلوں میں سے پہچان کریں کہ کون سی شکل سہل ہے کون سی بند ہے پر سہل نہیں، کون سی کھلی ہے، کون سی محدّب اور کون سی مجوّف ہے؟



3. درج بالا کثیر الاضلاع کا نام لکھئے اور اس کے سبھی ممکنہ وتر کھینچئے:

راسوں کی تعداد کتنی ہے؟

4. نیچے کی تصویریں کچھ کاریں کھڑی ہیں۔ بیچ میں چوکور شکل کا میدان ہے۔ بتائیے کہ کتنی کاریں کثیر الاضلاع کے اندرونی حصّہ میں ہیں؟ کتنی بیرونی حصّہ میں ہیں؟



5. نیچے کے دو کالم میں سے ایک میں کثیر الاضلاع کا نام اور دوسرے میں اسکے اضلاع کی تعداد دئے گئے ہیں۔ کثیر الاضلاع کے نام کو اسکے اضلاع کی تعداد سے ملائیے۔

مثلث	خمسۃ الاضلاع	مسبّع الاضلاع	Nonagon	مسدّس الاضلاع
7	9	3	6	5

6. ایک کثیر الاضلاع کے داخلی زاویوں کی پیائشوں کا جوڑ 540^0 ہے۔اس میں کتنے اضلاع ہیں؟ بتایئے۔

7. ایک مساوی کثیر الاضلاع کے 8 اضلاع ہیں، اس کے ہر ایک خارجی زاویہ کی پیائش معلوم کیجئے۔ ہر ایک داخلی زاویہ کی پیائش کیا ہوگی؟

3.3.1 ذواربعۃ الاضلاع (Quadrilateral):

آیئے نیچے بنے خانوں میں مختلف ناپ کے چار ضلع والے محدّب کثیر الاضلاع بنائیں۔

اوپر کے خانوں میں بنے کثیر الاضلاع کے شکلوں کو دھیان سے دیکھئے۔

ان میں کیا یکسانیت ہیں؟

- یہ سبھی شکلیں چار ضلعوں سے بنی ہیں۔
- ان سبھی شکلوں میں چار راس ہیں۔
- ان سبھی شکلوں میں چار زاویے ہیں۔

خود کر کے دیکھئے:

1. ذواربعۃ الاضلاع کی اور کیا کیا خاصیت آپ بتا سکتے ہیں؟
(جیسے خارجی زاویوں کی پیائشوں کا جوڑ..........)

2. ایک ذواربعۃ الاضلاع کا دوسرا، تیسرا اور چوتھا داخلی زاویہ، پہلے داخلی زاویہ کا بالترتیب دوگنا، تین گنا اور چار گنا ہے تو چاروں داخلی زاویوں کی پیائش بتایئے۔

اشارہ: مان لیا کہ ذواربعۃ الاضلاع کا پہلا زاویہ x ہے، تب

دوسرا زاویہ $= 2x$

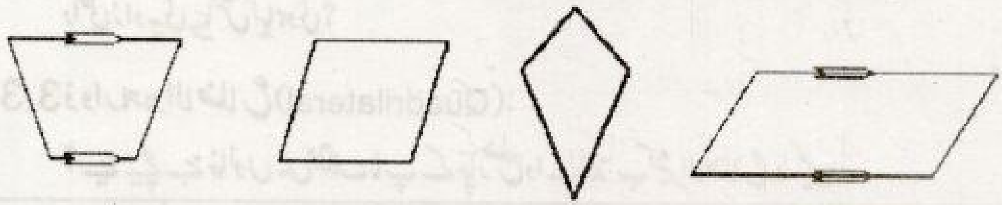
تیسرا زاویہ $= 3x$

چوتھا زاویہ $= 4x$

3. ایسے 3 اور سوال بنایئے اور دوستوں کو حل کرنے کو دیجئے۔

3.4 ذواربعۃ الاضلاع کے اقسام (Kinds of Quardrilaterals):

نیچے دئے گئے ذواربعۃ الاضلاع کو دیکھئے۔ یہ سب الگ الگ قسم کے ہیں۔



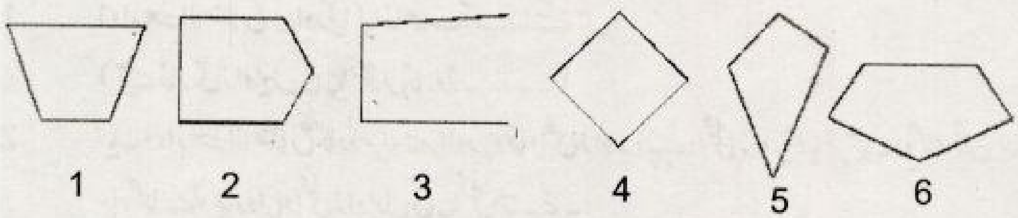
عام ذواربعۃ الاضلاع کے خاصیت کے علاوہ ان سب میں کچھ علیحدہ صفات ہیں۔

3.4.1 ذوذنقہ (Trapezium):

تصویر 1 میں آمنے سامنے کے اضلاع (مخالف اضلاع) کے جوڑے میں سے ایک جوڑا متوازی ہے۔ ایسا ذواربعۃ الاضلاع ذوذنقہ ذواربعۃ الاضلاع کہلاتا ہے۔

تصویر-1 میں متوازی مخالف اضلاع کو تیر سے دِکھلایا گیا ہے۔

نیچے بنے تصویروں میں پہچان کیجئے کہ کون ذوذنقہ ذواربعۃ الاضلاع ہے اور کون نہیں؟ جو ذواربعۃ الاصلاع، ذوذنقہ ہے اس کے متوازی مخالف اضلاع کے جوڑے کو تیر کے نشان سے دکھلایئے۔

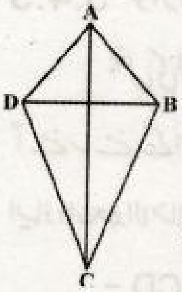


....

کچھ کریں:

1. آپ اپنے اور اپنے دوستوں کے جیومیٹری بکس سے چار سیٹ اسکوائر لیجیے اور ان کے استعمال سے مختلف طرح کا ذوذنقہ بنایئے اور اس کی شکل اپنے نوٹ بک میں لکھئے۔
2. ایک ایسا ذوذنقہ بنایئے جس میں اس کے دونوں غیر متوازی اضلاع برابر لمبائی کے ہوں۔ اس طرح کا ذوذنقہ مساوی الساقین ذوذنقہ کہلائے گا۔

3.4.2 پتنگ (Kite):

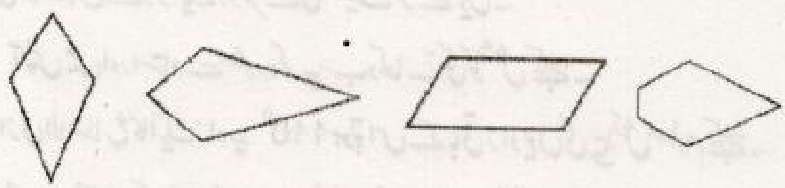


موسم بہار میں آپ نے لوگوں کو آسمان میں پتنگ اڑاتے ہوئے دیکھا ہوگا۔ حالانکہ دیکھنے میں یہ پتنگیں الگ الگ ہوتی ہیں، لیکن اس میں سے زیادہ تر ایک معین شکل کی ہوتی ہیں۔ پتنگ کی شکل بھی ایک خاص طرح کا ذوا ربعۃ الاضلاع ہوتا ہے۔ آیئے اِس کے کچھ خاصیت کو دیکھیں۔

- ذوا ربعۃ الاضلاع کے عام خاصیت کے علاوہ اِس میں متصلہ اضلاع کے دو ایسے جوڑے ہوتے ہیں جن میں شامل دونوں خطوں کی لمبائی برابر ہوتی ہے۔ بغل میں بنے پتنگ ABCD کو دھیان سے دیکھئے۔ یہاں متصلہ اضلاع کا پہلا جوڑا AD=AB اور دوسرا جوڑا BC=DC
- پتنگ کے دونوں وتر AC اور BD ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر تنصیف کرتے ہیں۔
- پتنگ کا ایک وتر اس پر بنے دونوں زاویوں کا خط ناصف بھی ہے۔
- پتنگ میں مخالف زاویوں کے دو جوڑوں میں ایک برابر ہوتے ہیں۔ دیئے گئے شکل میں کون سا جوڑا برابر ہے؟

کچھ کریں:

1. آیئے مندرجہ ذیل شکلوں میں پہچانئے کہ کون کون پتنگ ہیں؟

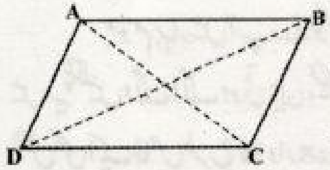


ان میں متصلہ اضلاع کے اِن کے وتروں کا نام لکھتے ہوئے ان کے جوڑے اور برابر زاویوں کے جوڑے بھی پہچانئے۔

2. کیا کوئی ذوذنقہ ذوا ربعۃ الاضلاع پتنگ بھی ہوسکتا ہے؟
وجہ کے ساتھ سمجھایئے۔

3. ایک پتنگ کی دو غیر برابر متصلہ اضلاع بالترتیب 7cm اور 5cm ہیں، اس کا احاطہ کیا ہوگا۔

3.4.3 متوازی الاضلاع (Parallelogram):



بغل کی تصویر کو دھیان سے دیکھئے۔ اس میں ذواربعۃ الاضلاع کے آمنے سامنے کے اضلاع یعنی مخالف اضلاع کے دونوں جوڑے متوازی ہیں۔

ایسا ذواربعۃ الاضلاع متوازی الاضلاع کہلاتا ہے۔

- ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔
- یہاں مخالف ضلع کا ایک جوڑا AB اور DC اور دوسرا جوڑا AD اور BC آپس میں متوازی ہیں۔
- متوازی الاضلاع کے مخالف زاویے برابر ہوتے ہیں۔ یعنی زاویہ A= زاویہ C اور زاویہ D= زاویہ B

کیا آپ متوازی خطوط اور اُن پر کھینچی گئی خط تقاطع (Transversal) کی بنیاد پر اِسے دکھا سکتے ہیں۔

- متوازی الاضلاع میں آمنے سامنے کے اضلاع برابر ہوتے ہیں یعنی AB=DC اور AD=BC

کیا آپ اِسے مثلث کی مماثلث استعمال کر کے دکھا سکتے ہیں؟

- متوازی الاضلاع میں متصلہ زاویے تتمہ ہوتے ہیں یعنی زاویہ A + زاویہ $B=180^0$

زاویہ B= زاویہ $C=180^0$

- متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

آپس میں اور استاد سے مشورہ کر کے یہ سب دکھانے کی کوشش کیجئے۔

مثال 4: ایک متوازی الاضلاع کا ایک زاویہ 110^0 ہو تو اس کے باقی زاویوں کی پیائش معلوم کیجئے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ متوازی الاضلاع میں متصلہ زاویے تتمہ (Supplementary) ہوتے ہیں۔

سوال کے شرط کے مطابق پہلا متصلہ زاویہ ہے 110^0

تب دوسرا متصلہ زاویہ $180^0-110^0=70^0$

پھر ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ متوازی الاضلاع میں مخالف زاویے بھی برابر ہوتے ہیں۔

اِس لئے، متوازی الاضلاع کا تیسرا اور چوتھا زاویہ بالترتیب 110^0 اور 70^0 ہوگا۔

اس طرح متوازی الاضلاع کے چاروں زاویے بالترتیب ہوگا $110^0, 70^0, 110^0$ اور 70^0 ہوگا۔

مثال5: ایک متوازی الاضلاع کے دو متصلہ ضلع بالترتیب 8cm اور 6cm ہیں۔ اس کا احاطہ کیا ہوگا؟

حل: ہم جانتے ہیں کہ متوازی الاضلاع میں آمنے سامنے کے اضلاع کی برابر لمبائی کے ہوتے ہیں۔

اس لئے دو متصلہ اضلاع اگر 8cm اور 6cm ہوں تو متوازی الاضلاع کے باقی دو اضلاع بالترتیب 8cm اور 6cm ہوں گے۔

اس لئے متوازی الاضلاع کا احاطہ- 28cm=8cm+6cm+8cm+6cm

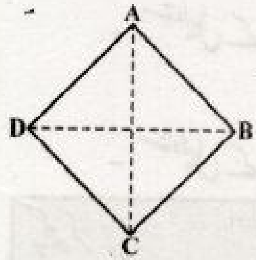
3.4.4. شکل معیّن (Rhombus):

ایسا ذو اربعۃ الاضلاع جس کے سبھی اضلاع برابر لمبائی کے ہوں، شکل معیّن کہلاتا ہے۔

ABCD- ایک شکل معین ہے

-شکل معیّن کے مخالف زاویے بھی برابر ہوتے ہیں۔ یعنی زاویہ A = زاویہ C اور زاویہ D = زاویہ B

سوچئے کیسے؟



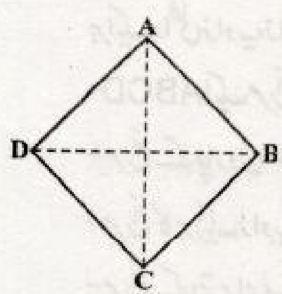
-اس میں آمنے سامنے کے اضلاع یعنی مخالف اضلاع کا ایک جوڑا AB اور DC اور دوسرا جوڑا AD اور BC آپس میں متوازی ہوگا۔ کیسے؟

-مثلثوں کی مماثلث کی بنیاد پر بتایئے کہ شکل معیّن میں متصلہ زاویہ تمّہ ہوتے ہیں۔ یعنی زاویہ A + زاویہ $B=180^0$، زاویہ B + زاویہ $C=180^0$

زاویہ C + زاویہ $D=180^0$ اور زاویہ D + زاویہ $A=180^0$

-شکل معین کے وتر ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر تنصیف کرتے ہیں۔

مثال6: بغل کی تصویر میں A B C D ایک شکل معیّن ہے۔ اس کا ایک وتر 10 cm اور ایک ضلع 13cm ہے تو اس کا دوسرا وتر کیا ہوگا؟



حل: ہم جانتے ہیں کہ شکل معیّن کے وتر ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر تنصیف کرتے ہیں اور شکل معین کو چار برابر مثلث قائمۃ الزاویہ میں بانٹتے ہیں۔

اگر ہم ایک مثلث قائمۃ الزاویہ کو لیں تو اس کا وتر 13cm اور زاویہ قائمہ بنانے والے دو اضلاع میں سے ایک ضلع 5cm لمبائی کی ہوگی۔ اس طرح زاویہ قائمہ بنانے والے دوسرے ضلع کی لمبائی =12cm (سوچئے کیسے؟)

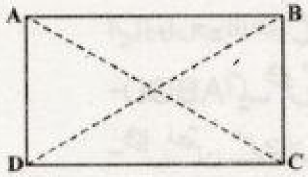
اس طرح دوسرا وتر 2x12 =24cm ہوگا۔

3.4.5 مستطیل(Rectangle):

ایسا ذواربعۃ الاضلاع جس کے آمنے سامنے کے اضلاع یعنی مخالف اضلاع برابر ہوں اور ہر ایک داخلی زاویہ، زاویہ قائمہ ہو، مستطیل کہلاتا ہے۔

-ABCD ایک مستطیل ہے۔

- مستطیل کے آمنے سامنے کے اضلاع برابر ہوتے ہیں۔یعنی



AB=CD اور BC=DA

- مستطیل کا ہر ایک زاویہ، زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔یعنی

$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90^0$

- مستطیل کے وتر برابر لمبائی کے ہوتے ہیں۔یعنی

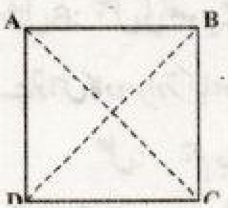
AC=BD

- مستطیل کے وتر ایک دوسرے کو تنصیف (Bisect) کرتے ہیں۔

کچھ کریں:

1. ایک مستطیل کی لمبائی 4cm اور چوڑائی 3cm ہے، اس کے دونوں وتروں کی لمبائی معلوم کیجیے۔
2. بتائیے کہ ایک متوازی الاضلاع کب مستطیل ہوگا؟

3.4.6 مربع (Square):



ایسا ذواربعۃ الاضلاع جس کے چاروں اضلاع برابر ہوں اور ہر ایک داخلی زاویہ، زاویہ قائمہ ہو، مربع کہلاتا ہے۔

-ABCD ایک مربع ہے۔

-مربع کے چاروں اضلاع برابر ہوتے ہیں یعنی AB=BC=CD=DA

-مربع کا ہر ایک زاویہ، زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔یعنی $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90^0$

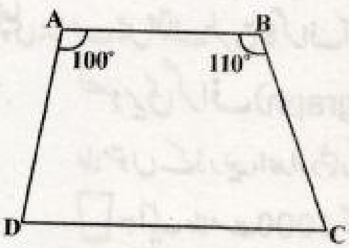
-مربع کے وتر برابر لمبائی کے ہوتے ہیں یعنی AC=BD

-مربع کے وتر ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر تنصیف کرتے ہیں۔

کچھ کریں:

1. کیا سبھی مربع ایک مستطیل ہے، اگر ہاں تو کیسے؟
2. کیا سبھی مربع ایک شکل معین (Rhombus) ہے، اگر ہاں تو کیسے؟
3. کیا سبھی مربع ایک متوازی الاضلاع ہے، اگر ہاں تو کیسے؟

سوالنامہ-3.2



1. ذوذنقہ (Trapezium) ABCD میں زاویہ $A=100^\circ$ اور زاویہ $B=110^\circ$ ہے تب باقی دونوں زاویوں کی پیمائش کیا ہوگی؟
2. ایک متوازی الاضلاع کے متصلہ اضلاع 3:2 کے تناسب میں ہیں ۔اگر پہلا متصلہ ضلع 6cm ہو، تب اس متوازی الاضلاع کا احاطہ کیا ہوگا؟
3. متوازی الاضلاع کا ایک زاویہ 120° ہے، تب اس کے باقی تینوں زاویوں کی پیمائش کیا ہوگی؟
4. ایک شکل معین (Rhombus) کے وتروں کی لمبائی 6cm اور 8cm ہے، تب اس کے ہر ایک ضلع کی لمبائی معلوم کیجئے۔
5. ایک مستطیل اور متوازی الاضلاع میں کیا یکسانیت اور کیا فرق ہے؟ لکھیے۔

باب-4 اعدادوشمارکا انتظام(Management of Data)

4.1 اطلاعات کی کھوج میں(Looking for information):

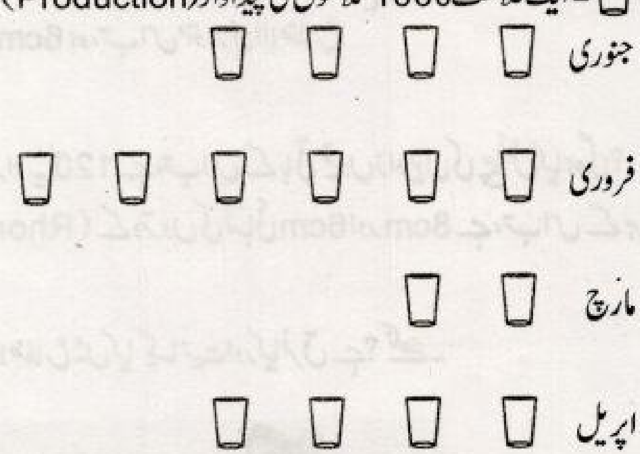
ہم اپنے آس پاس اکثر اخبارات، رسائل اور TV پر کئی طرح کے اعدادوشمار، جدول اور گراف دیکھتے ہیں۔ یہ چیزیں ہمیں کچھ جانکاریاں فراہم کرتی ہیں۔ آپ بھی اپنے آس پاس سے اطلاعات فراہم کر مطالعہ کر سکتے ہیں۔ اعداد وشمار جمع کرنے کے پہلے ہمیں یہ جاننا ہوگا کہ ہم کیا مطالعہ کرنا چاہتے ہیں۔ جیسے آپ جاننا چاہتے ہیں کہ آپ کے کلاس کے ساتھیوں کا اوسط وزن کیا ہے؟ اِسے جاننے کے لئے کلاس کے ساتھیوں کے وزن کا اعدادوشمار جمع کرنا پڑے گا۔

اعدادوشمار(Data) کیا بتاتے ہیں؟ اِسے بالکل واضح کرنے کے لئے گراف کے ذریعہ پیش کرتے ہیں۔ پچھلی جماعت میں مختلف طرح کا گراف آپ نے پڑھا ہے۔ آیئے انہیں پھر سے دیکھیں۔

1. تصویری گراف(Pictograph):

علامتوں کے ذریعہ، اعدادوشمار کی تصویری پیشکش (مظاہرہ):

= ایک علامت 1000 گلاسوں کی پیداوار(Production) کو بتاتا ہے۔

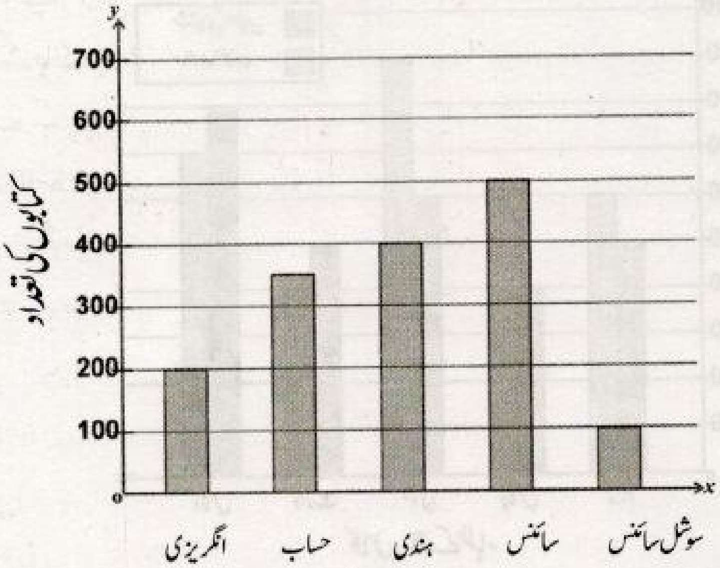


(الف) مارچ کے مہینے میں کتنے گلاسوں کی پیداوار ہوئی؟

(ب) کن دو مہینوں میں برابر پیداوار ہوئی؟

2. بارگراف(Bargraph):

بارگراف میں ہر ایک بار کی چوڑائی برابر (یکساں) ہوتی ہے اور وہ ایک دوسرے سے برابر (یکساں) دوری پر ہوتے ہیں۔ باروں کی لمبائی (اونچائی) بالترتیب ان کی قیمتوں کے تناسب میں ہوتی ہے۔



بار کی لمبائی (اونچائی) آنکڑے کی تعداد بتاتی ہے۔

بار یکساں (برابر) چوڑائی کے ہیں اور دو لگاتار باروں کے بیچ میں برابر دوری رکھی گئی ہے۔

(i) سب سے زیادہ کس مضمون کی کتابیں ہیں اور وہ کتنی ہیں؟

(ii) سب سے کم کس مضمون کی کتابیں ہیں اور وہ کتنی ہیں؟

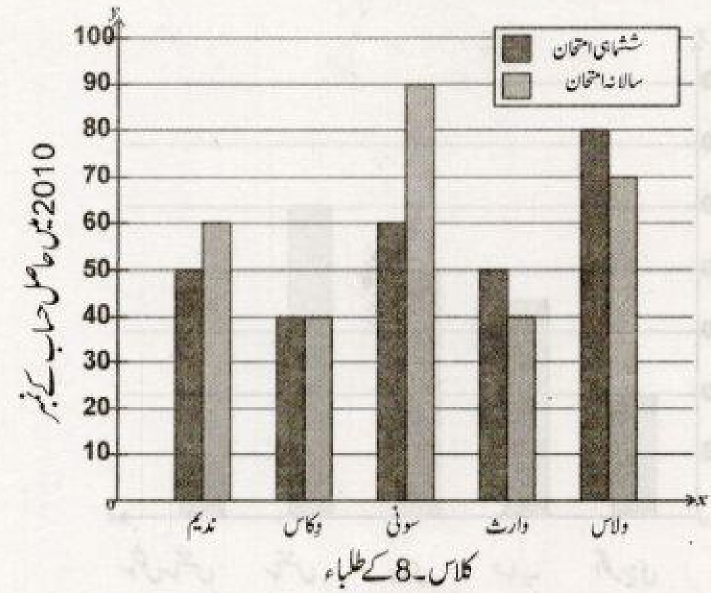
(iii) لائبریری میں کل کتنی کتابیں ہیں؟

(iv) اس بار کے ذریعہ کیا اطلاع دی گئی ہے؟

(v) کن دو مضامین کی کتابوں کی تعداد کا فرق سب سے کم ہے؟

دوہرا بار گراف (Double Bar Graph):

جب ہمیں آنکڑوں کے دو گروپوں سے موازنہ کرنے کی ضرورت ہوتی ہے تو دوہرے باڑھ گراف (Double Bar Graph) کھینچتے ہیں۔



بار کو دیکھ کر آپ درج ذیل سوالوں کا جواب دیجئے:

(i) کس طالب علم کی کارکردگی ششماہی اور سالانہ میں یکساں ہے؟

(ii) کس طالب علم کی کارکردگی ششماہی کے مقابلے میں سالانہ میں سب سے اچھی رہی ہے؟

(iii) کتنے طلباء نے سالانہ امتحان میں 50 سے زیادہ نمبر حاصل کیے؟

(iv) اس دوہرے بار گراف سے کیا اطلاع دی گئی ہے؟

(v) ششماہی کے نمبروں کا اوسط کیا ہے؟ کیا یہ سالانہ امتحان 100 نمبروں کے اوسط نمبر سے کم ہے؟

> یہاں ششماہی اور سالانہ امتحان کے کل نمبروں کو 100 مانا گیا ہے۔ سوچئے اگر شش ماہی امتحان 50 نمبروں کا اور سالانہ امتحان 100 نمبروں کا ہو تو آپ موازنہ کیسے کریں گے۔

خودکر کے دیکھئے:

دیئے گئے رپورٹوں کو دکھلانے کے لئے الگ الگ گراف کھینچئے:

.1

سال	2007	2008	2009	2010	2011
لائبریری کے لئے خریدی گئی کتابیں	190	160	180	150	200

.2

گاؤں کا نام	بڑی پہاڑی	آشانگر	منصور نگر
مردوں کی تعداد	2000	1500	1900
عورتوں کی تعداد	1800	1500	2000

.3

مضمون	ہندی	انگریزی	حساب	سائنس	سوشل سائنس
رحیم کے ذریعہ حاصل شدہ نمبر	50	40	80	70	48

.4 8 بہترین کرکٹ ٹیموں کے ذریعہ ODI میں جیتنے کا فیصد:

ٹیم	چمپئن ٹرافی سے ورلڈ کپ 2006 تک	2007 میں پچھلے ODI-10
ساؤتھ افریقہ	75%	78%
آسٹریلیا	61%	40%
سری لنکا	54%	38%
نیوزی لینڈ	47%	50%
انگلینڈ	46%	50%
پاکستان	45%	44%
ویسٹ انڈیز	44%	30%
بھارت	43%	56%

4.2 آنکڑوں کی تنظیم (Organization of Data):

آیئے ایک کلاس میں ہوئے حساب کے امتحان کا ریزلٹ دیکھیں:

28, 28, 28, 8, 10, 38, 28, 28, 15, 1,
28, 29, 18, 20, 36, 36, 10, 28, 15, 8

اس مثال میں ہر ایک نمبر ایک مشاہدہ (Observation) ہے۔اس طرح فراہم (جمع) مشاہدوں کے مجموعہ کو شمارِ خام (Raw data) کہتے ہیں۔ معنی خیز نتیجہ نکالنے کے لئے ہمیں شمار خام کو ترتیب وار (بڑھتے ہوئے یا گھٹتے ہوئے) شکل میں سجانے کی ضرورت ہے۔یعنی

38, 36, 36, 29, 28, 28, 28, 28, 28, 28,

28, 20, 18, 15, 15, 10, 10, 8, 8, 1

یہاں سب سے زیادہ حاصل شدہ نمبر اور سب سے کم حاصل شدہ نمبر کا فرق کتنا ہے؟

یہ فرق 37=1-38 ہے۔ یہی فرق (37) درج بالا آنکڑوں کا فصل (Range) ہے۔فصل کے کم یا زیادہ ہونے پر ہمیں آنکڑوں کے پھیلاؤ کا پتہ چلتا ہے۔

کون نمبر سب سے زیادہ مرتبہ حاصل کیا ہوگا اور کون سا نمبر سب سے کم مرتبہ حاصل کیا گیا؟ اس کے لئے مِلان نشان (Tally Mark) کا استعمال کرتے ہوئے، درج ذیل جدول بناتے ہیں۔

جدول۔4.1

کل دفعہ (بار)	ملان نشان	حاصل شدہ نمبر
1	I	38
2	II	36
1	I	29
7	~~IIII~~ II	28
1	I	20
1	I	18
2	II	15
2	II	10
2	II	8
1	I	1
20	Total	

ہرایک حاصل شدہ نمبر کے سامنے لکھے ملان نشانوں کی تعداد سے ہمیں اُس نمبر کو حاصل کرنے والے طلباء کی تعداد کا پتہ چلتا ہے۔ یہ تعداد اس حاصل شدہ نمبر کی آمد (Frequency) کہلاتی ہے۔ کسی مشاہدہ کا آمد وہ نمبر ہے، جتنی بار وہ مشاہدہ آنکڑوں میں آتا ہے۔ جدول :4.1 میں حاصل شدہ نمبر 28 کی آمد 7 ہے اور حاصل شدہ نمبر 10 کی آمد 2 ہے۔ درج بالا طریقے سے بنایا گیا جدول، آمد ترتیب جدول (Frequency Distribution Table) کہلاتا ہے۔ اس سے پتہ چلتا ہے کہ ایک مشاہدہ کتنی دفعہ شامل ہے۔

جدول 4.1 کی رپورٹوں کو اپنی کاپی پر بار گراف کے ذریعہ ظاہر (پیش) کیجئے۔

4.3 آنکڑوں کی درجہ بندی (Grouping of Data):

کبھی کبھی ہمیں ایسے آنکڑے حاصل ہوتے ہیں جو بہت زیادہ ہوتے ہیں۔ جیسے کسی کلاس کے 30 طلباء کے حاصل شدہ نمبروں پر غور کیجئے:

11,	14,	3,	20,	17,	5,	8,	7,	13,	11,
13,	4,	5,	14,	18,	10,	8,	13,	1,	8,
12	18,	13,	20,	16,	12,	11,	12,	9,	4,

اگر ہم ہرایک نمبر کے لئے ایک آمد ترتیب جدول بنائیں تو وہ بہت لمبا ہوگا۔ اس لئے ہم سہولت کے لئے مشاہدوں کا کچھ گروپ یا درجہ۔ وقفہ بناتے ہیں۔ جیسے 12-8،8-4،4-0 وغیرہ اور ہرایک گروپ یا درجہ میں آنے والے مشاہدوں کی تعداد کی بنیاد پر ایک آمد ترتیب (Frequency Distribution) حاصل کرتے ہیں۔ اس طرح درج بالا آنکڑوں کے لئے درجہ بند آمد ترتیب جدول (Grouped Frequency Distribution Table) درج ذیل ہوسکتا ہے۔

جدول۔4.1

درجہ۔وقفہ (Class Interval)	ملان نشان (Tally Mark)	آمد (Frequency)
0-4	II	2
4-8	IIII̸	5
8-12	IIII̸ III	8
12-18	IIII̸ IIII	9
16-20	IIII	4
20-24	II	2
	Total	30

درج بالا جدول میں 30 طلباء کے حاصل شدہ نمبروں کو پانچ درجوں (8-4،4-0 وغیرہ) میں تقسیم کرکے سبھی مشاہدوں (Observations) کو شامل کرلیا گیا ہے۔ اس میں ہر ایک گروپ کو درجہ۔وقفہ (class Interval) یا مختصر میں ایک درجہ (class) بھی کہتے ہیں۔

جب آنکڑوں کو اس شکل میں لکھا جاتا ہے تب دے درجہ بند آنکڑے (Grouped Data) کہلاتے ہیں اور اس طرح کے تقسیم کو درجہ بند آمد ترتیب (Grouped Frequency Distribution) کہتے ہیں۔ اس سے معنی خیز نتیجہ نکالنے میں مدد ملتی ہے۔ جیسے:

1. 7 طلباء نے 0 اور 8 کے بیچ نمبر حاصل کئے ہیں۔
2. زیادہ تر طلباء نے 8 اور 16 کے بیچ نمبر حاصل کئے ہیں۔
3. 20 نمبروں کے امتحان میں 6 طلباء نے 16 سے 20 نمبر حاصل کئے ہیں۔
4. ان آنکڑوں کا وسطی درجہ (Mode Class) 16-12 ہے۔

غور کیجئے کہ مشاہدہ 4 دونوں ہی درجوں 4 - 0 اور 8 - 4 میں شامل ہے۔ اسی طرح مشاہدہ 8,12,16,20, دو۔دو درجوں میں شامل ہے۔ لیکن کوئی بھی مشاہدہ ایک ساتھ دونوں درجوں میں شامل نہیں ہوسکتا۔ اس سے بچنے کے لئے ہم یہ طریقہ اپناتے ہیں کہ، مشترک مشاہدہ بعد میں آنے والے درجہ میں شامل کرتے ہیں۔ یعنی مشاہدہ 4 درجہ۔وقفہ 8-4 میں شامل ہے (4-0 میں نہیں)۔ اسی طرح 8 درجہ۔وقفہ 12-8 میں شامل ہے (8-4 میں نہیں)۔

یہاں ہر ایک درجہ کو متعین کرنے کے لئے دو اعداد ہیں۔ جیسے درجہ وقفہ 8-4 میں 4 اور 8 درجہ کی حد ہیں۔ جس میں 4 درجہ کی نچلی حد (Lower Limit) اور 8 درجہ کی بالائی حد (Upper Limit) کہلاتی ہے۔ کیا آپ درجہ۔وقفہ 20-16 میں بالائی حد اور نچلی حد بتا سکتے ہیں؟

کسی بھی درجہ۔وقفہ کے دونوں حدوں کے فرق کو درجہ ناپ (Class Size) یا درجہ چوڑائی (Class Width) کہتے ہیں۔ یہاں درجہ وقفہ 8-4 کا درجہ ناپ 4 ہے۔ درجہ۔وقفہ 12-8 اور 16-12 کا درجہ سائز کیا ہے؟

خود کر کے دیکھئے:

نیچے دیئے گئے آمد ترتیب جدول کا مطالعہ کیجئے اور ان کے نیچے دیئے ہوئے سوالوں کے جواب دیجئے:

آمد (مزدوروں کی تعداد)	درجہ وقفہ (روپیوں میں روز کی آمدنی)
45	75-100
25	100-125
55	125-150
125	150-175
140	175-200
55	200-225
35	225-250
50	250-275
20	275-300
550	Total

.1 (i) درجہ وقفوں کی ناپ کیا ہے؟

(ii) درجہ وقفہ 225-250 کی بالائی حد کیا ہے؟

(iii) کس درجہ کی آمد سب سے زیادہ ہے؟

(iv) کن دو درجوں کی آمد یکساں (برابر) ہے؟

.2 کلاس-8 کے 32 طلباء کی سالانہ بچت (روپیوں میں) اس طرح ہے:

38, 42, 40, 35, 72, 59, 80, 84, 73, 65, 38, 60, 58, 38, 54, 71,

83, 45, 38,80, 27, 57, 61, 41, 76, 40, 39, 50, 44, 77, 53, 49

(i) درجہ وقفہ 30-40 (40 شامل نہیں ہے) وغیرہ لے کر ایک آمد جدول بنائیے:

(ii) درجہ وقفہ 20-30 کی درجہ حدود کیا ہے؟

(iii) درجہ وقفہ کا درجہ سائز کیا ہے؟

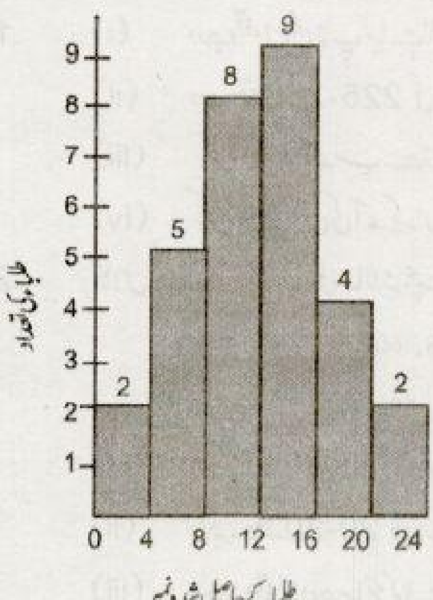
4.3.1 مستطیل گراف(Histogram): آنکڑوں کا گرافی پیشکش:

آیئے 30 طلباء کے ذریعہ حساب کے امتحان میں حاصل کئے گئے نمبروں کے درجہ بند آمد ترتیب پر غور کریں۔ (جدول۔4.3)

جدول۔4.3

درجہ۔وقفہ	آمد
0-4	2
4-8	5
8-12	8
12-16	9
16-20	4
20-24	2
Total	30

تصویر: 4.1 میں درج بالا آمد ترتیب جدول کو گراف کی شکل میں دکھایا گیا ہے۔



تصویر: 4.1

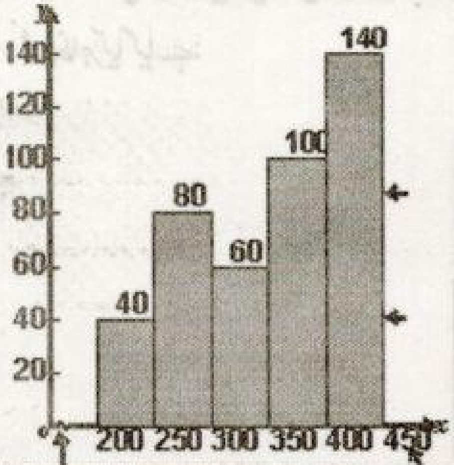
کیا یہ گراف، ان بارگرافوں سے الگ ہے، جو آپ نے کلاس 7 میں کھینچے تھے؟ واضح ہے یہاں باروں کے بیچ کوئی خالی جگہ نہیں ہے۔ کیونکہ درجہ۔ وقفوں کے بیچ میں کوئی خلا نہیں ہے۔ دوسرے یہ افقی ساق (Horizontal line) پر درجہ۔وقفوں (مشاہدوں کے مجموعہ) کو دکھلایا گیا ہے۔ بار کی لمبائی درجہ۔وقفہ کی آمد کو ظاہر کرتی ہے۔ آنکڑوں کا اس طرح گرافی پیشکش ایک مستطیل گراف (Histogram) کہلاتا ہے۔ یعنی مستطیل گراف ایک عمودی بارگراف ہوتا ہے جس میں مختلف باروں کے بیچ کوئی خالی جگہ نہیں ہوتی ہے۔ آیئے ایک اور مستطیل گراف دیکھیں۔

اس مستطیل گراف کے باروں سے ہم بتا سکتے ہیں کہ:

(الف) کتنے خاندانوں کا خرچ سب سے کم ہے؟

(ب) کتنے خاندانوں کا خرچ سب سے زیادہ ہے؟

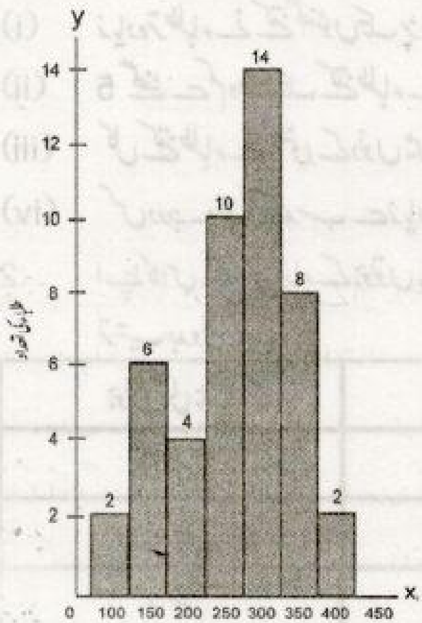
(ج) 350 روپیہ سے کم خرچ والے کتنے خاندان ہیں؟



یکساں چوڑائی والے بار جن کے بیچ میں کوئی خلا نہیں ہے۔

بار کی اونچائی کسی مخصوص درجہ میں آنے والے مشاہدوں کی تعداد ظاہر کرتی ہے اور یہی اُس درجہ کی آمد ہے۔

ٹیڑھا میڑھا خط ⌒ افقی ساق کے سمت میں یہ بتاتا ہے کہ 0 سے 200 تک اِسی خط پر ہے۔



تصویر۔4.3

خود کر کے دیکھئے:

مستطیل گراف (تصویر۔4.3) کو دیکھئے اور درج ذیل سوالوں کے جواب دیجئے۔

(i) اس مستطیل گراف کے ذریعہ کیا اطلاع دی جارہی ہے؟

(ii) کس درجہ۔وقفہ میں سب سے زیادہ طلباء ہیں؟

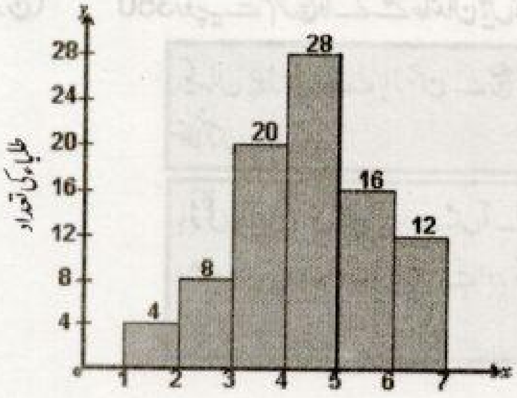
(iii) کتنے طلباء کا خرچ 300 یا اس سے زیادہ ہے؟

(iv) درجہ سائز کیا ہے؟

(v) کیا اس گراف سے 100 روپیہ سے کم خرچ کرنے والے طلباء کی تعداد کا پتہ چلتا ہے؟

سوالنامہ۔4.1

1. چھٹی کے دنوں میں کلاس۔8 کے طلباء کے ذریعہ ہر روز پڑھنے کا وقت (گھنٹوں میں) دیئے ہوئے گراف میں ظاہر کیا گیا ہے:



درج ذیل سوالوں کے جواب دیجئے:

(i) زیادہ تر طلباء نے کتنے گھنٹوں تک پڑھا؟

(ii) 5 گھنٹے سے کم وقت تک کتنے طلباء نے پڑھا؟

(iii) کل کتنے طلباء نے چھٹی کے دنوں میں بھی پڑھا؟

(iv) کس درجہ۔ وقفہ کی آمد سب سے زیادہ ہے؟

2. اپنے کلاس کے سبھی طلباء کے جوتوں یا چپلوں کے ناپ جمع کیجئے۔ انہیں درج ذیل جدول میں بھر کر ایک آمد ترتیب جدول بنایئے۔

جوتوں کی ناپ	ملان نشان	آمد
5 نمبر		
6 نمبر		
7 نمبر		
8 نمبر		

3. ویشالی گاؤں کے 27 مکانوں کے ایک ماہ کا بجلی بل روپیوں میں درج ذیل ہے:

324, 700, 617, 400, 356, 365, 435, 548, 780, 570, 312, 584, 506, 736, 378, 685, 630, 674, 754, 776, 596, 745, 763, 422, 580, 565, 570

درجہ۔وقفہ 400-300 وغیرہ لے کر ایک آمد جدول بنائیے۔

4. سوال۔3 میں دیئے آنکڑوں سے حاصل جدول کے لئے ایک مستطیل گراف بنائیے اور درج ذیل سوالوں کے جواب دیجئے۔

(i) کس گروپ میں بجلی صارفین (Consumer) کی تعداد سب سے زیادہ ہے؟

(ii) کتنے بجلی صارفین 500 روپے یا اس سے زیادہ بل جمع کرتے ہیں؟

(iii) کتنے صارفین 400 روپے سے کم کا بل جمع کرتے ہیں؟

(iv) درجہ۔وقفہ 500-400 کی بالائی حد اور نچلی حد کیا ہے؟

(v) گراف میں کتنے درجہ۔وقفہ ہیں؟

5. راجو اپنے گھر کے کپڑوں کو رنگوں کی بنیاد پر الگ کر کے اس طرح درج کرتا ہے۔

سفید (W)، لال (R)، کالا (B)، پیلا (Y)، دوسرا رنگ (O) بنائی گئی فہرست (List) درج ذیل شکل میں ہے:

R R O W R B Y R B W W O O R B Y Y O W R

B Y Y B R R O W W R W O O R Y W B Y

مِلان نشانوں کا استعمال کرتے ہوئے ایک آمد ترتیب جدول بنائیے۔اسے پیش کرنے کیلئے ایک بار گراف کھینچئے۔

6. اپنے کلاس کے طلباء سے یہ جانکاری حاصل کیجئے کہ وہ گھر پر پچھلے دن کتنے دیر پڑھے۔ان آنکڑوں کو درج ذیل درجہ بند آمد جدول میں بھریئے۔

وقت (منٹ میں)	مِلان نشان	آمد
0-30		
30-60		
60-90		
90-120		
120-150		
150-180		
180-210		
210-240		

درج بالا آنکڑوں کا ایک مستطیل گراف بنائیے:

7. درج ذیل میں سے کس طرح کے آنکڑوں کو ظاہر (پیش) کرنے کے لئے آپ ایک مستطیل گراف کا استعمال کریں گے؟

(i) گھر کے مختلف اناجوں کی مقدار۔

(ii) کسی اسکول کے سبھی طلباء کی اونچائی۔

(iii) 5 کمپنیوں کے ذریعہ بنائے گئے ٹیلی ویژنوں کی تعداد۔

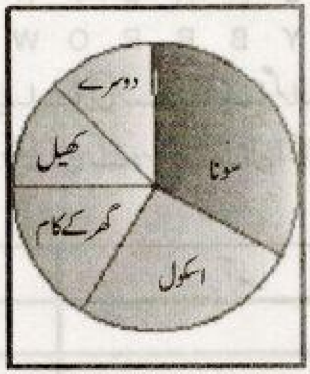
(iv) ایک مصروف شاہراہ پر صبح 8.00 بجے سے دوپہر 2.00 بجے تک گزرنے والی گاڑیوں کی تعداد

(v) آپ کے کلاس کے سبھی طلباء کا گھر سے اسکول کی دوری (میٹر میں)۔

4.4۔ دائرہ گراف یا پائی چارٹ (Circle Graph or Pie Chart):

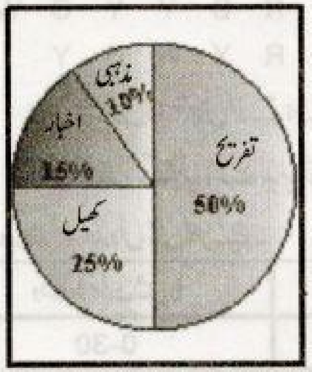
نیچے دائرہ کی شکل میں آنکڑے دیئے گئے ہیں۔ انہیں دھیان سے دیکھئے۔

ایک دن میں ایک بچّے کے ذریعہ مختلف کاموں میں گزارا گیا وقت



تصویر۔(i) 4.5

T.V. پر مختلف پروگراموں کو دیکھنے والوں کی تعداد



تصویر۔(ii)4.5

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ:

(i) کس کام میں بچّے کا سب سے زیادہ وقت گزرا؟ (ii) کس پروگرام کو دیکھنے والوں کی تعداد سب سے کم ہے۔

آپ نے درج ذیل بالا سوالوں کا حل کیسے ڈھونڈا؟

آپ جانتے ہیں کہ کسی دائرہ کے مرکز پر بنے زاویوں کا جوڑ 360° ہوتا ہے۔ تصویر۔(i)4.5 میں سونے

کا علاقہ مرکز پر سب سے بڑا زاویہ بنا رہا ہے۔ جبکہ تصویر۔ (ii)4.5 میں مذہبی پروگرام کا علاقہ مرکز پر سب سے چھوٹا زاویہ بنا رہا ہے۔ یہاں مکمل دائرہ کو قطعہ نصف قطروں (Sectors) میں بانٹا گیا ہے۔ ہر ایک قطعہ نصف قطر (Sector) کا Size اس کے ذریعہ پیش کش کئے گئے رپورٹ کے تناسب میں ہوتا ہے۔ اس طرح کا پیش کش دائرہ گراف (Circle Graph) یا پائی چارٹ (Pie Chart) کہلاتا ہے۔

4.4.1 پائی چارٹ کو کھینچنا (Drawing Pie Charts):

تصویر۔ (i)4.5 درج ذیل آنکڑوں کا دائرہ کے شکل میں پیشکش ہے:

کام	سونا	اسکول	گھر کا نام	کھیل	دوسرا
وقت گھنٹے میں	8	6	4	3	3

آیئے ان آنکڑوں کو ایک پائی چارٹ میں پیش کرنے کے مرحلوں (Step) کو سمجھیں:

مرحلہ۔1: سب سے پہلے سبھی مشاہدوں کو جوڑتے ہیں۔

یہاں $8 + 6 + 4 + 3 + 3 = 24$

سوچئے اگر مشاہدوں کی کل اکائی 24 ہے تو آپ 24 میں سے $\frac{8}{24}$ = 8 کو کس طرح سے دائرہ میں ظاہر کر سکتے ہیں؟

مرحلہ۔2: ہر ایک مشاہدہ (رپورٹ) کو ظاہر کرنے والے دائرہ کا حصّہ (مکمل کا حصّہ) معلوم کرتے ہیں۔

جیسے: اسکول کے وقت کا مکمل میں حصہ (Part)

= اسکول کے گھنٹوں کی تعداد / مکمل دن

= 6 گھنٹہ / 24 گھنٹہ $= \frac{1}{4}$

اس لئے اسکول کے گھنٹوں کو پورے دائرہ کے $\frac{1}{4}$ ویں حصہ میں کھینچا جائے گا۔

کیا آپ دوسرے کاموں کا حصہ معلوم کر سکتے ہیں؟ سبھی کاموں کے حصوں کو جوڑیئے۔ کیا سبھی کا جوڑ ایک ہی حاصل ہوتا ہے؟

دائرہ کے $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{4}$ .... وغیرہ کرنا تو آسان ہے۔ سوچئے $\frac{1}{6}$ یا $\frac{1}{10}$ وغیرہ حصے کرنے ہوں تو کون سا طریقہ کام میں لایا جا سکتا ہے؟ حصے

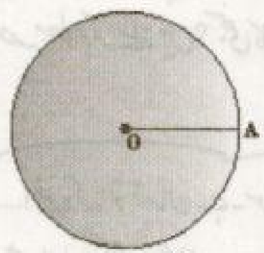
مرحلہ۔3: مکمل مرکزی زاویہ (360°) کے ہر ایک کام کے لئے زاویائی ناپ معلوم کرتے ہیں۔ جیسا کہ جدول میں دکھلایا گیا ہے۔

جدول۔4.4

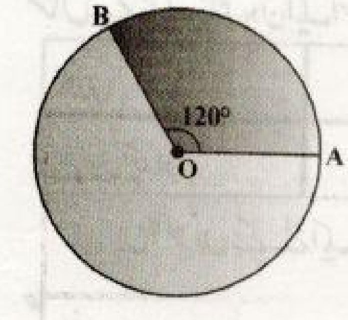
کام	کام کے گھنٹے	مکمل کا حصہ	360^0 کا حصہ
سونا	8	$\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$	360^0 کا $\frac{1}{3}=120°$
اسکول	6	$\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$	360^0 کا $\frac{1}{4}=90°$
گھر کا کام	4	$\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$	360^0 کا $\frac{1}{6}=60°$
کھیل	3	$\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$	360^0 کا $\frac{1}{8}=45°$
متفرق (دوسرا)	3	$\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$	360^0 کا $\frac{1}{8}=45°$

$\frac{1}{10}$ کے لئے زاویائی ناپ کیا ہوگا؟ سوچئے۔

مرحلہ۔4: سہولت کے اعتبار سے کسی نصف قطر کا ایک دائرہ کھینچئے۔ اس کا مرکز (O) اور ایک نصف قطر (O A) درج کیجئے۔



تصویر: 4.6

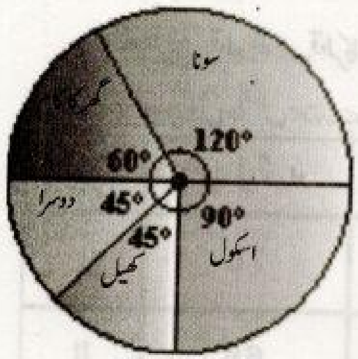


مرحلہ۔5: سونے کے گھنٹے کے قطعہ نصف قطر کا زاویہ 120° ہے۔

چاند کا استعمال کرکے $\angle AOB = 120°$ کھینچیے۔

مرحلہ۔6: بچے ہوئے قطعات نصف قطر کے زاویوں کو اسی طرح چاند سے کھینچیے۔ مکمل دائرہ مختلف قطعات نصف قطر میں بٹ جائے گا۔

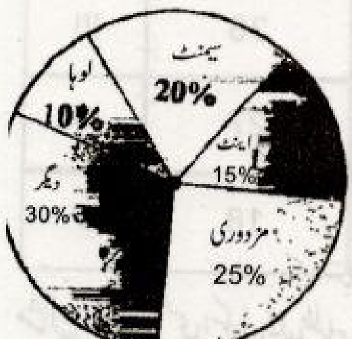
مثال۔1: منسلک پائی چارٹ (تصویر۔4.7) ایک مکان کو بنانے میں مختلف مدوں (items) میں خرچ کو ظاہر کرتا ہے۔



(i) کس مد میں خرچ سب زیادہ ہے؟

(ii) کن دو مدوں کا خرچ کل خرچ کا آدھا ہے؟

(iii) اگر اینٹ کا خرچ 30,000 روپیہ ہے تو لوہے کا خرچ کیا ہے؟



حل: (i) دوسرے مد کا خرچ سب سے زیادہ ہے۔

(ii) سیمنٹ اور دوسرے مد کا خرچ، کل خرچ کا آدھا ہے۔

(iii) 15% ظاہر کرتا ہے 30,000 روپیہ

1% ظاہر کرے گا $\frac{30000}{15}$ روپیہ

10% ظاہر کرے گا۔۔ روپیہ $\frac{\cancel{30}^{2}\,000}{\cancel{15}} \times 10 = 20000$ روپیہ

مثال۔2: ایک خاص دن ایک اسکول میں طلباء کی حاضری درج ذیل ہے:

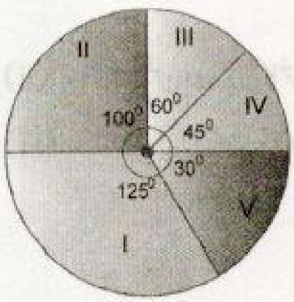
کلاس	I	II	III	IV	V
طلباء کی تعداد	75	60	36	27	18

ان آنکڑوں کے لئے ایک پائی چارٹ کھینچئے۔

حل:

ہم ہر ایک قطعہ نصف قطر کا مرکزی زاویہ معلوم کرتے ہیں۔ یہاں کل طلباء 216 ہیں۔ اس سے ہمیں درج ذیل جدول حاصل ہوتا ہے۔

کلاس	طلباء کی تعداد	مرکزی زاویہ
I	75	$\left(\frac{75}{216}\times 360^\circ\right)=125^\circ$
II	68	$\left(\frac{60}{216}\times 360^\circ\right)=100^\circ$
III	36	$\left(\frac{36}{216}\times 360^\circ\right)=60^\circ$
IV	27	$\left(\frac{27}{216}\times 360^\circ\right)=45^\circ$
V	18	$\left(\frac{18}{216}\times 360^\circ\right)=30^\circ$



تصویر:4.8

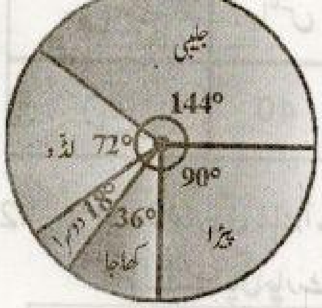
مثال۔3: کسی اسکول میں طلباء کے ذریعہ پسند کی جانے والی مٹھائیاں درج ذیل ہیں۔

مٹھائیاں	جلیبی	لڈو	پیڑا	کھاجا	دوسرا
طلباء کا فیصد	40%	20%	25%	10%	5%

ان آنکڑوں کو ایک پائی چارٹ کی شکل میں ظاہر کریں۔

حل:

یہاں کل فیصد=100 ہے۔اس سے درج ذیل جدول حاصل ہوتا ہے:



مٹھائی	طلباء کا فیصد	مرکزی زاویہ
جلیبی	40%	$\frac{40}{100} \times 360° = 144°$
لڈو	20%	$\frac{20}{100} \times 360° = 72°$
پیڑا	25%	$\frac{25}{100} \times 360° = 90°$
کھاجا	10%	$\frac{10}{100} \times 360° = 36°$
دوسرا	5%	$\frac{5}{100} \times 360° = 18°$

خود کر کے دیکھئے:

1. نیچے دیئے آنکڑوں کے لئے ایک پائی چارٹ کھینچئے۔

ایک بچہ کے ذریعہ ایک اتوار کو گزارا گیا وقت اس طرح ہے:

ٹیلی ویژن دیکھنا	–	3 گھنٹے
دوستوں کے ساتھ کھیلنا	–	2 گھنٹے
گھر کا کام	–	6 گھنٹے
دوسرا کام	–	3 گھنٹے
سونا	–	8 گھنٹے
صفائی	–	2 گھنٹے

2. اپنے پانچ دوستوں کے خاندان میں ممبروں کی تعداد کو لکھیں اور اسے پائی چارٹ کے ذریعہ ظاہر کریں۔
3. اپنے خاندان کے ایک ماہ کی کل آمدنی کا پتہ کریں اور مختلف مدوں پر خرچ کا ایک جدول بنائیں اور اُسے پائی چارٹ کے ذریعہ ظاہر کریں۔

سوالنامہ۔4.2

1. کسی طالب علم کی چھوٹی سی لائبریری میں مختلف مضامین کی کتابیں نیچے دی گئی ہیں۔ ان آنکڑوں کو ایک پائی چارٹ کے ذریعہ ظاہر کریں۔

مضامین	سائنس	حساب	انگریزی	ہندی	سوشل سائنس	میزان
کتابیں	40	12	9	7	4	72

2. ایک خاندان کی ماہانہ آمدنی 12,000 روپیہ ہے۔ خاندان کا ماہانہ خرچ درج ذیل ہے۔ دیئے گئے آنکڑے سے پائی چارٹ بنائیے۔

مد	مکان کرایہ	غذا	تعلیم	تفریح	صحت
خرچ (روپیہ میں)	1,500	6,000	2,000	1,000	1,500

3. وبھوتی کے ذریعہ حساب کے چھ مہینوں کی ماہانہ جانچ امتحان میں حاصل شدہ نمبر درج ذیل ہے۔

مہینوں کے نام	اپریل	مئی	جون	جولائی	اگست	ستمبر
حاصل شدہ نمبر (100 میں)	40	45	65	35	55	60

درج بالا آنکڑوں سے پائی چارٹ بنائیے۔

4.5 اتفاق اور امکان (Chance and Probability):

کبھی کبھی ایسا ہوتا ہے کہ پچھلے کئی دنوں سے آپ کے گھر پینے کا پانی صبح 6 بجے سے 7.30 بجے تک آتا ہے لیکن جب آپ کسی دن دیر سے 7 بجے اٹھ کر پانی بھرنے جاتے ہیں تو وہ جلد ہی بند ہو جاتا ہے۔

ہر ایک آدمی جاننا چاہتا ہے کہ ایک خاص ریل گاڑی صحیح وقت سے چلتی ہے لیکن جس دن آپ صحیح وقت پر پہنچتے ہیں، اسی دن وہ دیر سے آتی ہے۔

آپ کو درج بالا قسم کی کئی حالات کا سامنا کرنا پڑتا ہے۔ جہاں آپ اتفاق (Chandce) کا سہارا لے کر کام کرنا چاہتے ہیں۔ لیکن وہ اس طرح سے نہیں ہوتا جیسا آپ چاہتے ہیں۔ کیا آپ ایسی کچھ اور مثالیں دے سکتے ہیں؟

جب کوئی آدمی لاٹری کا ٹکٹ خریدتا ہے تو اس کے جیتنے اور ہارنے کا امکان برابر نہیں ہوتا۔ اِس لئے جیتنے کا امکان بہت کم و ہارنے کا امکان بہت زیادہ ہوتا ہے۔ لیکن یہاں ہم کچھ ایسے عملوں کی بات کریں گے جن کے نتائج آنے کا امکان برابر ہے۔

کوئی نتیجہ حاصل کرنا (Getting a result):

ڈبلو اور بلو پاسے سے کھیل رہے تھے۔ تبھی ڈبلو نے بلو سے کہا کہ پاسے میں چھ سب سے کم دفعہ آتا ہے۔

آپ کیا سوچتے ہیں؟ کیا ایسا ہی ہوتا ہے؟.....

یہ جاننے کے لئے کہ کیا 6 باقی نمبروں 1,2,3,4,5 سے حقیقت میں کم آتا ہے یا نہیں۔ ڈبلو اور بلو نے 25-25 مرتبہ پاسے کو پھینک کر آئے نمبروں کا ایک آمد جدول بنایا۔

بلو کے ذریعہ 25 مرتبہ پھینکے پاسے کے لئے جدول:

1	~~IIII~~ I
2	~~IIII~~
3	I
4	III
5	IIII
6	IIII

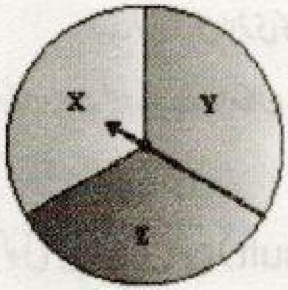
آپ بھی پاسے لے کر دیکھیں کہ 25 مرتبہ پھینکے پر آپ کو حاصل نمبروں کا جدول کیسا بنتا ہے؟

اس لئے یہ ضروری نہیں ہے کہ کوئی نمبر کم آئے یا زیادہ۔ پاسے کے کسی بھی نمبر کے آنے کا امکان برابر ہے۔ اس طرح کا عمل Random Experiment (دفعتاً عمل) کہلاتا ہے 1,2,3,4,5 اور 6۔ اس عمل کے 6 نتائج ہیں۔

جب نتائج حاصل ہوتے ہیں؟

خود کر کے دیکھئے:

1. اگر آپ ایک موٹر سائیکل چلانا شروع کریں تو ممکن نتیجہ کیا ہے؟
2. جب ایک پاسے (die) کو پھینکا جاتا ہے تو ممکنہ چھ نتائج کیا ہیں؟



3. جب آپ پہیے کو گھمائیں گے تو ممکنہ نتائج کیا ہوں گے۔ ان کی فہرست بنائیے۔
(یہاں نتیجہ کا مطلب ہے کہ وہ قطعہ نصف قطر جہاں پر Pointer گھمانے پر رُکے گا۔)

4. آپ کے پاس ایک تھیلا ہے۔ اس میں مختلف رنگوں کی پانچ ایک جیسی گیندیں ہیں۔ آپ بغیر دیکھے اس میں سے ایک گیند نکالتے ہیں۔ حاصل ہونے والے نتائج کو لکھیے۔

یکساں ممکنہ نتائج (Egually Likely Outcomes):

اپنے کلاس کے بچوں کو 4-3 کی ٹولیوں میں بانٹ کر ہر ایک ٹولی کو ایک سکّہ دے دیجئے۔ کہئے کہ وے سکّے کو کئی دفعہ اچھالیں اور ہر دفعہ نوٹ کریں کہ چِت (Head) آیا یا پٹ (Tail)۔ ہر ایک ٹولی ان آنکڑوں کو جدول میں بتائے گئے طریقے کے مطابق دو کالم میں درج کر سکتی ہے۔ چت آنے پر گولا (O) اور پٹ آنے پر چوکور (□) کا نشان لگایا جا سکتا ہے۔ 15 بار سکّہ اچھالنے کے بعد آپ یہ دیکھیں کہ کون سا نشان زیادہ دیر تک دہرایا جا رہا ہے۔ مثلاً کیا لگاتار 6 دفعہ چت آیا؟ یا کتنی بار ایک کے چت پٹ بعد آئے؟ ہر ایک ٹولی اپنی اپنی سب سے لمبی زنجیر کو پہچان کر لکھیں۔ مثلاً، کیا دو پٹ کے بعد ایک چت یا دو چت کے بعد ایک پٹ آتا ہے۔ یا کیا چت اور پٹ لگاتار ایک کے بعد ایک آتے ہیں؟ یا کیا ایسا کوئی Pattern ہے ہی نہیں۔

اب اُن سے کہیں زیادہ دفعہ سکہ اُچھال کر ہر ایک 10 اُچھال کے بعد اپنے نتائج کو درج کرنے کو کہئے۔

اب سب سے لمبی زنجیر کون سی ہے؟ اب کیا کوئی Pattern ہے؟

آیئے اپنے نتائج چارٹ کو دیکھیں، جہاں ہم اُچھالوں کی تعداد میں اضافہ کرتے جارہے ہیں:

اچھالوں کی تعداد	ملان نشان (H)	چت کی تعداد	ملان نشان (T)	پٹ کی تعداد
40	卌 卌 卌 卌 ||	22	卌 卌 卌 |||	18
50	卌 卌 卌 卌 |||	23	卌 卌 卌 卌 卌 ||	27
60	....	28	....	32
70	....	33	....	37
80	....	38	....	42
90	....	44	....	46

دھیان دیجئے کہ جب آپ اچھالوں کی تعداد زیادہ سے زیادہ بڑھاتے ہیں جاتے ہیں، تب چت کی تعداد اور پٹ کی تعداد باہم زیادہ سے زیادہ نزدیک آتے جاتے ہیں۔

ایسا ہی ایک پاسے کے ساتھ بھی ہوسکتا ہے، جب اسے ایک بڑی تعداد میں پھینکا جاتا ہے۔ چھ نتائج میں سے ہر ایک کی تعداد باہم لگ بھگ برابر ہوجاتی ہے۔

ایسی حالت میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ عمل کے مختلف نتائج، یکساں ممکنہ (Equally Likely) ہیں۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ سبھی میں سے ہر ایک نتیجہ کے آنے کا اتفاق (Chance) ایک ہی ہے۔

اتفاق کو امکان سے جوڑنا (Linking Chances to Probability):

جب ہم ایک سکہ اچھالتے ہیں تو یہاں چت آنے کا امکان 2 نتائج (چت اور پٹ) میں سے 1 ہے یعنی $\frac{1}{2}$ ہے۔

دوسرے لفظوں میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک چت آنے کا امکان = $\frac{1}{2}$ ایک پٹ آنے کا امکان کیا ہے؟

یہاں دونوں ہی نتائج یکساں ممکنہ (Equally likely) ہیں۔

اب اگر آپ ایک پاسے کو پھینکیں تو کیا نتائج حاصل ہوں گے؟ واضح ہے 1,2,3,4,5,6 میں سے کوئی ایک۔ یہاں چھ یکساں ممکنہ نتائج ہے۔ ان میں 3 حاصل کرنے کا امکان ہوگا۔

$$\frac{\text{تین دینے والے نتائج کی تعداد} \longrightarrow 1}{\text{امکانی نتائج کی تعداد} \longrightarrow 6}$$

2 حاصل کرنے کا امکان کیا ہے؟ 7 حاصل کرنے کا امکان کیا ہوگا؟ واقعات کے شکل میں نتائج ـــ ہر ایک عمل کے ہر ایک نتائج کے مجموعہ سے ایک واقعہ بنتا ہے۔ مثال کے طور پر ایک سکے کو اچھالنے کے عمل میں ایک چت حاصل کرنا ایک واقعہ ہے اور پٹ حاصل کرنا بھی ایک واقعہ ہے۔ ایک پاسے کو پھینکنے کے عمل میں نتائج 1,2,3,4,5,6 میں سے ہر ایک نتیجہ حاصل کرنا ایک واقعہ ہے۔

ایک جفت عدد حاصل کرنے کا امکان کیا ہے؟

یہ ہے: $\frac{3 \longrightarrow \text{ان نتائج کی تعداد جو واقعہ بناتے ہیں} (2,4,6)}{6 \longrightarrow \text{ممکنہ نتائج کی تعداد}}$

مثال ـ 4: ایک تھیلے میں 5 کالی گیندیں اور 2 لال گیندیں ہیں۔ (یہ گیندیں رنگ کے علاوہ سبھی طرح سے یکساں ہیں)۔ تھیلے کے اندر سے بغیر دیکھے ایک گیند نکالی جاتی ہے۔ ایک لال گیند حاصل کرنے کا کیا امکان ہے؟ کیا یہ ایک کالی گیند حاصل کرنے کے امکان سے زیادہ ہے یا کم؟

حل: یہاں واقعہ کے کل 7=2+5 نتائج ہیں۔ لال گیند حاصل کرنے کے لئے 2 نتائج ہیں۔ (کیوں؟)

اس لئے لال گیند حاصل کرنے کا امکان $\frac{2}{7}$ ہے۔

اسی طرح کالی گیند حاصل کرنے کا امکان $\frac{5}{7}$ ہے۔ (کیوں؟)

اس لئے لال گیند حاصل کرنے کا امکان، کالی گیند حاصل کرنے کے امکان سے کم ہے۔

سوالنامہ۔4.3

1. دو سکّوں کو ایک ساتھ۔ ساتھ اچھالا جاتا ہے۔ ایک سکّے کے چت آنے کا کیا امکان ہے۔
2. ایک تھیلے میں 6 سفید، 11 لال اور 7 پیلے رنگ کی گیند ہیں۔ اس تھیلے میں سے ایک پیلے گیند نکالنے کا امکان معلوم کیجئے۔
3. اچھی طرح سے پھینٹی ہوئی 52 تاشوں کی ایک گڈّی میں سے 1 اکّا حاصل کرنے کا امکان کیا ہوگا؟
4. جب ایک پاسے کو پھینکا جاتا ہے تب درج ذیل ہر ایک واقعہ سے حاصل ہونے والے امکانوں کو لکھیے:
   (i) (a) ایک غیر منقسم عدد (b) ایک غیر منقسم عدد نہیں
   (ii) (a) 4 سے بڑا ایک عدد (b) 4 سے بڑا عدد نہیں
   (iii) ایک جفت عدد
5. 12 الگ۔ الگ پرچیوں پر 1 سے 12 تک اعداد لکھا ہوا ہے (ایک پرچی پر ایک عدد)۔ انہیں ایک ڈبے میں رکھ کر اچھی طرح سے ملا دیا جاتا ہے۔ ڈبّے کے اندر سے بغیر دیکھے ایک پرچہ نکالا جاتا ہے۔ درج ذیل کا امکان کا ہوگا؟
   (i) عدد 5 حاصل کرنا (ii) عدد 13 حاصل کرنا
   (iii) اعداد 1 سے 12 میں کوئی ایک حاصل کرنا۔

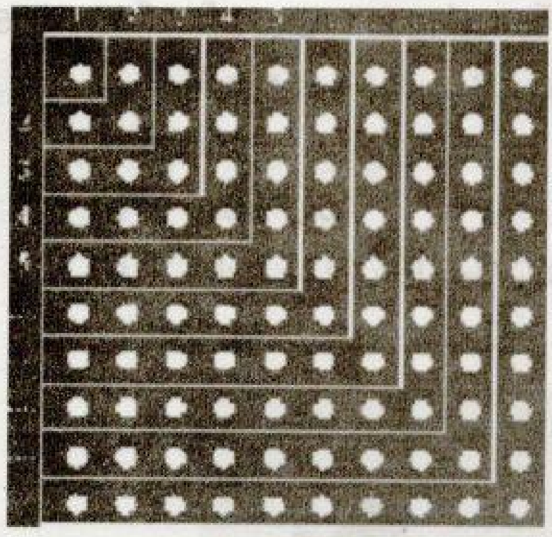
باب-5 مربع اور جذرالمربع [Square and Squareroot]

5.1 تمہید

دی گئی تصویر میں ہر ایک قطار (افقی) (Row) اور کالم (عمودی) میں نقطوں کی تعداد ایک جیسی ہے۔ اِن سے ہر ایک میں 5-5 نقطے ہیں۔ اس جماوٹ میں نقطوں کی کُل تعداد کتنی ہوگی؟

آپکو اسطرح نقطوں کے جال کے ذریعہ بنی شکل کیسی لگ رہی ہے؟

ہاں یہ مربع جیسی ہے؟



آیئے جیو بورڈ پر ربر بینڈ کی مدد سے مربع نما اشکال بنائیں۔

سامنے جیو بورڈ (Geo-Board) دیا گیا ہے۔ اس میں برابر دوری پر پنیں لگی ہوتی ہیں۔ ربر بینڈ کی مدد سے ہر ایک قطار اور کالم میں برابر تعداد میں دو-دو، تین-تین، چار-چار، وغیرہ نقطے لیکر کچھ مربع نما پیٹرن بنایئے اور دیے گئے جدول کو بھرئے۔

مربع عدد کو ہم $a \times a = a^2$ کی شکل میں بھی ظاہر کرتے ہیں

جدول 5.1

ترتیب نمبر	ہر ایک قطار یا کالم میں نقطوں کی تعداد	ہر بدنما پیٹرن کے اندر نقطوں کی کل تعداد
1	1	1
2	2	......
3	3	9
4	4	....
5	....	....
6	....	....

آخری کالم میں آئے سبھی اعداد ایسے ہیں جو ایک عدد کو اُس سے ضرب کر کے حاصل کی گئی ہیں۔

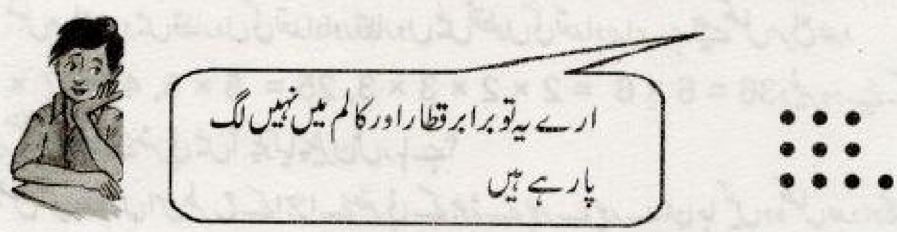
4=2x2،25=5x5 ۔ یہ سبھی اعداد 1، 4، 9، 16، 25 .... مکمل مربع اعداد (Perfect Square number) کہلاتے ہے۔ آپ بھی دوسرے 5 مکمل مربع اعداد لکھئے ....

یہ اعداد تو ہم نے خود مکمل مربع اعداد کی شکل میں لیا ہے۔ لیکن اگر ہمیں کوئی عدد دیا جائے تو ہم کیسے پتا کرینگے کہ وہ عدد مکمل مربع عدد ہے یا نہیں؟

5.2.1 مکمل مربع عدد کی پہچان

آپ 9 نقطوں کو تین تین نقطوں کی تین قطار میں جما سکتے ہیں۔ اسی طرح 16 نقطوں کو چار- چار کی چار قطار میں جما کر سکتے ہیں۔ آپ 9 اور 16 نقطے لیکر جما کر دیکھیں۔ کیا آپ 10، 11 یا 12 نقطوں کو اسطرح جما سکتے ہیں کہ کل قطاروں کی تعداد اور ہر ایک قطار میں نقطوں کی تعداد برابر ہو۔ سوچئے؟

آپ نے ٹھیک سوچا ہم اِن اعداد کو برابر کھڑی اور آڑی قطاروں میں نہیں جما سکتے ہیں۔



آپ نے جیو بورڈ میں پیٹرن سے جانا تھا کہ دے اعداد جو برابر قطار اور کالم کی شکل میں جمائی جا سکتے ہیں وہ مکمل مربع اعداد ہوتے ہیں۔

12,11,10 نقطے ہونے پر تو ہم اسطرح جما کر دکھنے کی کوشش کر سکتے ہیں لیکن اگر اعداد 109 یا 784 ہوں یا اور بھی بڑا ہو تو اسطرح نقطوں کو جما کر جانچنا شکل ہو سکتا ہے۔

مکمل مربع عدد پہچاننے کے لئے ایک اور طریقہ ہے۔ غیر منقسم اجزائے ضربی کا طریقہ آپ نے غیر منقسم اجزائے ضربی کے بارے میں پڑھ رکھا ہے، آیئے پہلے اُس کو پھر سے یاد کریں۔ آپ جانتے ہیں کہ کسی بھی عدد غیر منقسم اجزائے ضربی کیا جا سکتا ہے۔ یعنی ایسے جز ضربی جنھیں اور چھوٹے ٹکروں میں باٹنا نہیں جا سکے جیسے

سوچئے کیا 1 غیر منقسم عدد ہے؟ اپنے دوستوں سے اس پر چرچا کیجئے

2	60
2	30
3	15
5	5
	1

2	12
2	6
3	3
	1

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ $\qquad$ $12 = 2 \times 2 \times 3$

16 اور 64 کے اور 72،20 کے غیر منقسم اجزائے ضربی کو دیکھ کر بتایئے کہ اُن میں کیا فرق ہے؟

خود کر کے دیکھئے

1. 16 اور 20 کے غیر منقسم اجزائے ضربی
2. 64 اور 72 کے غیر منقسم اجزائے ضربی

....

آؤ اس فرق کو جانیں:

5.2.2 غیر منقسم اجزائے کے ضربی کے ذریعہ مکمل مربع کی پہچان

مکمل مربع عدد میں قطاروں کی تعداد اور قطاروں میں نقطوں کی تعداد برابر ہے جیسے مکمل مربع عدد

$36 = 6 \times 6 = 2 \times 2 \times 3 \times 3,\ 25 = 5 \times 5,\ 49 = 7 \times 7$ وغیرہ دیئے گئے اعداد کے غیر منقسم اجزائے ضربی میں آپکو کیا پیٹرن مل رہا ہے؟

جس بھی عدد میں اس طرح کے اجزائے ضربی کے جوڑے پورے پورے بن جائیں وہ مکمل عدد ہوگا۔ اسی طرح آپ نے دیکھا ہوگا کہ 16 اور 64 کے غیر منقسم اجزائے ضربی میں آپ کو غیر منقسم اعداد کے جوڑے ملے ہونگے۔ لیکن 20 اور 72 میں سبھی جز ضربی جوڑے میں نہیں ملے۔

5.2.3 غیر منقسم اجزائے ضربی طریقہ

اس طریقہ میں دئے گئے عدد کا غیر منقسم اجزائے ضربی کر کے جوڑے بناتے ہیں۔جن اعداد میں سبھی غیر منقسم اجزائے ضربی کے جوڑے بن جاتے ہیں۔وہ مکمل مربع عدد ہوگا۔

مثال 1 کیا 256 ایک مکمل مربع عدد ہے؟

2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
2	1

حل: $256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2$

ہم دیکھتے ہیں کہ 256 کے سبھی اجزائے ضربی کے اوپر دکھائے گئے کے مطابق جوڑے بن سکتے ہیں

اس لئے 256 ایک مکمل مربع عدد ہے

یہ $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ کا مربع ہے

مثال 2- کیا 200 ایک مکمل مربع ہے

2	200
2	100
2	50
5	25
5	5
	1

حل: $200 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$

$= 2^2 \times 2 \times 5^2$

اگر ہم 200 کے غیر منقسم اجزائے ضربی کو جوڑوں یا مربعوں میں سمائیں تو یہ پاتے ہیں کہ ہمارے پاس ایک جز ضربی 2 باقی بچ جاتا ہے۔اسلئے 200 مکمل مربع نہیں ہے۔

خود کر کے دیکھئے:

1. کیا مندرجہ ذیل اعداد مکمل مربع ہیں؟

   (i) 400 (ii) 600

2. دیئے گئے اعداد کے بیچ مکمل مربع اعداد معلوم کریں

   (i) 20 اور 30 (ii) 50 اور 60

3. نیچے دیئے گئے اعداد کا غیر منقسم اجزائے ضربی کر کے خالی جگہوں کو بھریں

جدول-5.2

ترتیب نمبر	عدد	غیر منقسم اجزائے ضربی کے جوڑے بن رہے ہیں	کیا سبھی یکساں غیر منقسم عدد یا نہیں	مکمل مربع ہے
1	36	$\overline{2x2}x\overline{3x3}$	ہاں	مکمل مربع ہے
2	32	$\overline{2x2}x\overline{2x2}x2$	نہیں	نہیں
3	16			
4	39			
5	40			
6	49			
7	56			
8	64			

5.3 مربع اعداد کی خاصیتیں:

مندرجہ ذیل جدول کا مطالعہ کریں۔

عدد	عدد کا مربع
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

عدد	عدد کا مربع
11	121
12	144
13	169
14	196
16	225
15	256
17	289
18	324
19	361
20	400

I. مندرجہ ذیل جدول سے مربع اعداد کے اکائی کے ہندسوں کو دیکھیں کیا آپ نے کوئی پیٹرن دیکھا؟

II. ہم پاتے ہیں کہ ہر ایک مربع عدد میں اکائی کا ہندسہ 0,1,2,3,4,5,6 اور 9 ہے۔ لیکن کسی بھی مربع عدد کے اکائی کے مقام پر 2,3,7 یا 8 نہیں ہے۔ کیا 1,22,32,23,33,78 وغیرہ مکمل مربع ہیں۔ ہاں یا نہیں وجہ کے ساتھ بتایئے۔ اسلیئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ جس عدد کے اِکائی مقام پر 2,3,7 اور 8 ہے وہ عدد کبھی بھی مکمل عدد نہیں ہوسکتا ہے۔

89,56,54,111,200 میں سے کون سے مکمل مربع اعداد ہیں؟

اسلیئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ کچھ اعداد جن کے اِکائی کے مقام پر 0,1,4,5,6,9 ہوتا ہے مکمل مربع ہوسکتے ہیں۔ اور نہیں بھی۔ پیچھے کے جدول سے کھوجیئے۔ جفت اعداد اور طاق اعداد کے مربع میں آپکو کوئی پیٹرن ملتا ہے۔

....

....

ہاں آپ نے ٹھیک ڈھونڈا! جفت اعداد کے مربع جفت اور طاق اعداد کے مربع طاق عدد ہی ہوتے ہیں ہیں۔ سوچئے اس کی وجہ کیا ہے؟..

خود کر کے دیکھئے:

1. مندرجہ ذیل ذیل اعداد میں سے بغیر غیر منقسم اجزائے ضربی کئے بغیر بتائیں کہ کون سے اعداد مکمل مربع اعداد نہیں سکتا ہے۔

(i) 522 (ii)237 (iii)23 (iv)100 (v) 58

2. چار ہندسوں کے پانچ اعداد خود سے لکھیں۔ کن اعداد کے بارے میں آپ دعوے کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ یہ مکمل مربع اعداد ہیں

3. خالی جگہوں کو بھریں

(i) جفت اعداد کے مربع..........اعداد ہوتے ہیں

(ii) طاق اعداد کے مربع..........اعداد ہوتے ہیں

4. مندرجہ ذیل میں کن اعداد کے مربع طاق/ جفت ہونگے کیوں؟

(i) 727 (ii) 158 (iii) 269 (iv) 1980

5.3.1 درج ذیل جدول کو دیکھئے:

اعداد	مربع
1	1
9	81
11	121
19	361
21	441

خود کر دیکھئے

درج ذیل میں سے کون سے عدد کے اکائی کے مقام پر 1 ہوگا؟

(i)23^2 (ii)27^2 (iii)22^2 (iv)61^2 (v)39^2

جدول سے واضح ہے کہ عدد کا اِکائی ہندسہ 1 یا 9 آتا ہے اُس عدد کا مربع کا اکائی ہندسہ بھی 1 ہی ہوتا ہے۔

5.3.2: ذیل کے مربع جدول کو دیکھئے:

اعداد	مربع
4	16
6	36
14	196
16	256

خود کر دیکھئے

درج ذیل میں سے کن اعداد کے اکائی کے مقام پر 6 ہوگا؟

(i)29^2 (ii)19^2 (iii)24^2 (iv)36^2 (v)34^2 (vi)26^2

جدول سے واضح ہے کہ جس عدد کے اکائی کا ہندسہ 4 یا 6 ہے اُس عدد کے مربع عدد کے اکائی کا ہندسہ 6 ہوتا ہے۔

کیا آپ اسطرح کے کچھ اور اصول جدول میں لکھے گئے اعداد اور اُن کے مربعوں کے جانچ سے معلوم کر سکتے ہیں...

5.3.3 مندرجہ ذیل مربع جدول پر غور کیجئے۔

اعداد	مربع
10^2	100
20^2	400
30^2	900
100^2	10000
200^2	40000
400^2	16000

میرے پاس ایک صفر ہے

میرے پاس دو صفر ہے

میرے پاس دو صفر ہے

میرے پاس چار صفر ہے

خود دہائی کے دوسرے اعداد لیکر اُنکے مربع نکالئے کیا اُنکے مربعوں میں بھی آپکو دو صفر ملتے ہیں؟..................

سوچئے اگر کسی عدد میں تین صفر ہوں تو اُسکے مربعوں میں کتنے صفر ہونگے؟

خود کر کے دیکھئے

1. مندرجہ اعداد کے مربع میں صفر کے تعداد کیا ہوگی؟

(i)50 (ii)400 (iii)5000

5.4 کچھ دلچسپ پیٹرن

5.4.1 مندرجہ ذیل دو لگاتار مربع اعداد کے فرق کو دیکھئے

$2^2-1^2=4-1=3$	$2+1=3$
$3^2-2^2=9-4=5$	$3+2=5$
$4^2-3^2=16-9=7$	$4+3=7$
$5^2-4^2=25-16=9$	$5+4=9$

مندرجہ بالا پیٹرن سے آپ کیا نتیجہ نکال سکتے ہیں؟

مذکورہ پیٹرن کی بنیاد پر کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ

$8^2-7^2=$........ $25^2-24^2=$........

$9^2-8^2=$........ $225^2-224^2=$.......

$12^2-11^2=$....... $50^2-49^2=$..........

یہ جوابات آپ نے کس بنیاد پر معلوم کئے۔

5.4.2 مندرجہ ذیل پیٹرن پر غور و خوض کریں۔

$15^2=1\times2$(سیکڑہ)$+5^2=225$

$25^2=2\times3$(سیکڑہ)$+5^2=625$

$35^2=3\times4$(سیکڑہ)$+5^2=1225$

$45^2=$..........................

اصول:

$(n\ 5)^2 = (10n + 5)^2$

$= 100\,n^2 + 100\,n + 25$

$= 100\,n\,(n + 1) + 25$

$= n\,(n+1)$ سیکڑے $+ 25$

خودکر کے دیکھئے:

مندرجہ ذیل اعداد کے مربع نکالیں

(i) 75 (ii)105 (ii)85(iv)95

5.4.3 مندرجہ ذیل پر غور کریں

1 (ایک طاق عدد) $=1 = 1^2$

1 + 3 =(پہلے دو طاق اعداد کا جوڑ) $=4 = 2^2$

1 + 3 + 5 (پہلے تین طاق اعداد کا جوڑ) $=9 = 3^2$

1 + 3 + 5 + 7 (.........) $=16 = 4^2$

1 + 3 + 5 + 7 + 9 (..........) $=25 = 5^2$

1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 (.........) $=36 = 6^2$

اسلئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اول n طاق قدرتی اعداد کا جوڑ n^2 ہے

1 سے 51 کے بیچ کتنے طاق اعداد ہیں آپ آخری عدد لیں جیسے 51 کو 2 سے تقسیم کریں

$\frac{51}{2} = 25$ پورا + باقی 1

اسلئے کل 26 طاق اعداد

مثال 3-1 سے 51 تک کے طاق اعداد کا حاصل جمع معلوم کیجئے

حل: 1+3+5+............51

یہاں n=26

اسلئے اسے لگاتار طاق اعداد کے n رکنوں کا حاصل جمع $= n^2$

اسلئے 1+3+5+..........+51=26^2=676

خودکر کے دیکھئے:

مندرجہ ذیل طاق اعداد کا حاصل جمع معلوم کریں۔

(i) 1+3+........+23 (ii) 1+3+5+........65

اب ذرا سوچئے اگر آپ 676 میں سے لگاتار طاق اعداد گھٹائیں تو کیا ہوگا؟ 26 لگاتار طاق عدد یعنی 1 سے 51 تک گھٹانے پر آپ کو صفر حاصل ہوگا کیا اس پیٹرن کا استعمال آپ مکمل مربع اعداد کو معلوم کرنے میں کر سکتے ہیں۔

اس لئے 9 مکمل مربع ہے 5-5=0 8-3=5 9-1=8

جبکہ 5-7=-2 10-5=5 13-3=10 14-1=13

اس لئے 14 مکمل مربع عدد نہیں ہے۔

5.4.4 فیثاغورث/ پائیتھا گورس تثلیث (Pythagorous Triplet)

نیچے دیئے گئے پیٹرن کو سمجھئے۔

$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$

$3^2 + 4^2 = 5^2$

اسی طرح $8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 = 17^2$

اسلئے $8^2 + 15^2 = 17^2$

اعداد (3,4,5) اور (8,15,17) وغیرہ کو مجموعے کو پائیتھا گورس تثلیث کہتے ہیں۔ ایسے اعداد جن میں دو اعداد کے مربع کا جوڑ تیسرے عدد کے مربع کے برابر ہو۔ پائیتھا گورس تثلیث کہلاتے ہیں۔ آپ دوسرے اعداد کو مربعوں کو لیکر جوڑیں دیکھیں کیا یہ سبھی اعداد میں ہوتا ہے۔

1+2

1+4=5=

کیا 5 مربع عدد ہے

خود کر کے دیکھئے:

نیچے دیئے گئے اعداد میں سے کون کون سے پائیتھا گورس تثلیث ہیں۔

(i) (6,8,10) (ii) (3,8,9) (iii) (5,12,13)

5.4.5 مندرجہ ذیل اعداد کے مربعوں کا تجزیہ کیجئے

1^2	=	1
11^2	=	1 2 1
111^2	=	1 2 3 2 1
1111^2	=	1 2 3 4 3 2 1
11111^2	=	....
111111^2	=	....

اعداد 121 ,12321 ,1234321 ,123454321 وغیرہ کے کچھ اور بھی دلچسپ خصوصیات ہیں۔ اس طرح کے سبھی اعداد کے ہندسوں کا جوڑ ایک مکمل مربع ہوتا ہے۔ جیسے:۔

$1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$

$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9 = 3^2$

$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16 = 4^2$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25 = 5^2$

....

خود کر کے دیکھئے:

پیٹرن کے استعمال سے مندرجہ ذیل اعداد کے مربع معلوم کیجئے

(i) 11111 (ii)11111111 (iii)1111

5.4.6 دوسرے دلچسپ پیٹرن

$7^2 = 49$

$67^2 = 4489$

$667^2 = 444889$

$6667^2 = 44448889$

$666667^2 =$ ....

$666666667^2 =$ ....

لگاتار مربع اعداد کو آپ مندرجہ ذیل طرح سے بنا سکتے ہیں۔

$20^2 = 400$

$21^2 = 20^2 + 20 + 21 = 441$

اب سوچو اگر آپ کو 32 کا مربع اُسی طریقہ سے نکالنا ہو تو

$30^2 = 900$

$31^2 = 30^2 + 30 + 31 = 961$

$32^2 = 31^2 + 31 + 32 = 1024$

سوالنامہ 5.1

1. مندرجہ ذیل اعداد کے مربع معلوم کیجئے۔

(i)42 (ii)46 (iii)58 (iv)98 (v)94 (vi)45

2. مندرجہ ذیل کا مربع معلوم کریں

(i)25 (ii)55 (iii)95 (iv)105 (v)115

3. مندرجہ ذیل اعداد میں کون سے اعداد مکمل مربع ہیں؟ جانچ کیجئے۔

(i)256 (ii)360 (iii)324 (iv)400

4. مندرجہ ذیل اعداد میں سے کون کون مکمل مربع ہیں؟

13, 16, 17, 48, 49, 64, 72, 343, 373758

5. مندرجہ ذیل میں سے کون جفت اعداد کے مربع ہیں؟

169, 196, 256, 1296, 6561

6. مندرجہ ذیل میں کون کون مکمل مربع اعداد ہیں

400, 4000, 330550, 12345600000

7. برائیکٹ میں صحیح عدد لکھیں

(a) $24^2-23^2=\boxed{}$ (b) $102^2-101^2=\boxed{}$

(c) $501^2-500^2=\boxed{}$ (d) $400^2-399^2=\boxed{}$

8. مندرجہ ذیل میں کون سا ٹرپلیٹ پائتھاگورس ٹرپلیٹ ہے؟

(1, 2, 3), (3, 4, 5), (6, 8, 10), (1, 1, 1), (2, 2, 3,), (15, 36, 39)

9. مندرجہ ذیل پیٹرن کا بغور مطالعہ کر کے چھوٹے ہوئے اعداد کو معلوم کریں

1^2	+	2^2	+	2^2	=	3^2
2^2	+	3^2	+	6^2	=	7^2
3^2	+	4^2	+	12^2	=	13^2
4^2	+	$\boxed{.....}^2$	+	$\boxed{.....}^2$	=	21^2
5^2	+	6^2	+	$\boxed{.....}^2$	=	31^2
6^2	+	7^2	+	$\boxed{.....}$	=	$\boxed{.....}$

10. طاق اعداد کے لگاتار گھٹاؤ کے عمل کے ذریعہ مندرجہ ذیل اعداد کی جانچ کریں کہ کون سا عدد مکمل مربع عدد ہے۔

(i) 81 (ii) 121 (iii) 144 (iv) 36

11. مندرجہ ذیل میں سے کن کن اعداد کا مربع طاق عدد ہوگا؟

(i) 531 (ii) 5436 (iii) 3249 (iv) 82004

12. جوڑ کا عمل کیے بغیر حاصل جمع معلوم کیجئے

(i) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11

(ii) 1 + 3 + 5 + ... + 51

(iii) 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 101

(iv) 7 + 9 + 11 + 13 + ... + 21

13. مندرجہ ذیل اعداد کے مربعوں کے اکائی کا ہندسہ کیا ہوگا

(i) 25 (ii) 64 (iii) 272

(iv) 799 (v) 5423 (vi) 2467

(vii) 5438 (viii) 99880 (ix) 43546

14. مندرجہ اعداد میں صاف ظاہر ہے کہ یہ مکمل مربع اعداد نہیں ہیں۔ اسکی وجہ بتائیے۔

(i)1052 (ii)23457 (iii)54328 (iv)325473

(v)25000 (vi)743522 (vii)543000 (viii)56430

5.5 تقسیم کے طریقہ سے جذرالمربع معلوم کرنا

جب اعداد بڑے ہوتے ہیں تب غیر منقسم اجزائے ضربی کے طریقہ سے جذرالمربع معلوم کرنا مشکل ہو جاتا ہے۔ ایک دوسرے طریقہ سے بھی ہم جذرالمربع نکال سکتے ہیں جسے طویل تقسیمی طریقہ کہتے ہیں۔ جس سے بڑے اعداد کا جذرالمربع نکالا جاتا ہے۔ اسکے لئے ہمیں جذرالمربع میں ہندسوں کی تعداد کو معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

مندرجہ ذیل جدول کو دیکھیں

عدد(جذرالمربع)	مربع عدد	
1	$1^2=1$	جو 1 ہندسہ کا سب سے چھوٹا مکمل مربع عدد ہے۔
3	$3^2=9$	جو 1 ہندسہ کا سب سے بڑا مکمل مربع عدد ہے۔
4	$4^2=16$	جو 2 ہندسہ کا سب سے چھوٹا مکمل مربع عدد ہے۔
9	$9^2=81$	جو 2 ہندسہ کا سب بڑا مکمل مربع عدد ہے۔
10	$10^2=100$	جو 3 ہندسہ کا سب سے چھوٹا مربع عدد ہے۔
31	$31^2=961$	جو 3 ہندسہ کا سب سے بڑا مربع عدد ہے۔
32	$32^2=1024$	جو 4 ہندسہ کا سب سے چھوٹا مربع عدد ہے۔
99	$99^2=9801$	جو 4 ہندسہ کا سب سے بڑا مربع عدد ہے۔

مندرجہ بالا جدول کا بغور مطالعہ کرنے سے پتا چلتا ہے کہ اگر مکمل مربع عدد 1 یا 2 ہندسوں کا ہے تب اسکا جذرالمربع 1 ہندسہ کا ہی ہوگا۔ اگر مکمل مربع عدد 3 یا 4 ہندسوں کا ہے تب اسکا جذرالمربع 2 ہندسوں کا ہوگا۔ کیا آپ 5 یا 6 ہندسوں والے مکمل مربع عدد کے جذرالمربع میں ہندسوں کی تعداد بتا سکتے ہیں؟

خود کر کے دیکھئے

کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک مکمل مربع عدد میں اگر n ہندسے ہیں تو اُسکے جذرالمربع میں $\frac{n}{2}$ ہندسے ہونگے جب جفت=n ہو یا $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ہندسے ہونگے جب طاق=n ہوں؟

ذیل طریقے سے کسی عدد کے جذرالمربع میں ہندسوں کی تعداد معلوم کرنے میں فائدہ مند ہوگا۔526 کا جذرالمربع طویل تقسیمی طریقہ کے ذریعہ معلوم کرنے کے لئے مندرجہ ذیل مرحلوں پرغور کریں۔

	2
2	$\overline{5}\ \overline{76}$
	-4
	1

کیا آپ اس عدد کے جذرالمربع ہندسوں کی تعداد کا اندازہ لگا سکتے ہیں؟

مرحلہ 1: اکائی مقام سے شروع کرتے ہوئے ہرایک جوڑے پر'بار' لگائیں۔اگر ہندسوں کی تعداد طاق ہے تب بائیں طرف ایک ہندسہ پر بار لگائیں۔جیسے: $\overline{5}\overline{76}$ اسطرح لکھتے ہیں۔

	2
2	$\overline{5}\ \overline{76}$
	-4
	176

مرحلہ 2: وہ سب سے بڑا اعدد معلوم کریں جسکا مربع سب سے بائیں طرف کے بار کے نیچے لکھے عدد کے برابر یا کم ہو ($2^2<5<3^2$) سب سے بائیں 'بار' کے نیچے مقسوم (یہاں 5) کے ساتھ مقسوم علیہ اور حاصل تقسیم کی شکل میں اس عدد کو لیں۔ تقسیم کریں اور باقی معلوم کریں (موجودہ حالت میں باقی 1 ہے)۔

	2
2	$\overline{5}\ \overline{76}$
2	-4
4_	176

مرحلہ 3: اگلے'بار' کے نیچے کے عدد کو باقی کے دائیں طرف لکھیں۔
(جو موجودہ حالت میں 76 ہے) اسلئے اگلا مقسوم عدد 176 ہوگا۔

مرحلہ 4: مقسوم علیہ (Divisor) کے ساتھ مقسوم علیہ کے برابر جوڑیں (یعنی مقسوم علیہ کو دوگنا کریں) اور اسے اسکے دائیں میں خالی جگہ کے ساتھ لکھیں

	24
2	$\overline{5}\ \overline{76}$
2	- 4
44	176
4	176
	0

مرحلہ 5: خالی جگہ کو بھرنے کے لئے سب سے بڑے ممکنہ ہندسے کا اندازہ لگائیں جوکہ حاصل تقسیم میں نیا ہندسہ ہوگا اور نئے مقسوم علیہ کو نئے حاصل تقسیم سے ضرب کرنے پر حاصل ضرب مقسوم کے برابر یا مقسوم سے کم ہوگا

اس حالت میں

$$43 \times 3 = 129$$

اور

$$44 \times 4 = 176$$

اسلئے باقی حاصل کرنے کے لئے نیا ہندسہ 4 چنتے ہیں۔

مرحلہ-6 کیونکہ باقی صفر ہے اور دیئے گئے عدد میں کوئی ہندسہ باقی نہیں ہے۔

اسلئے $\sqrt{576} = 24$

مثال 4: اب 7056 کا جذرالمربع معلوم کریں

مرحلہ-1 اکائی مقام سے شروع کرتے ہوئے ہر ایک جوڑے کے اوپر 'بار' لگائیں

(جیسے $\overline{70}\ \overline{56}$ اسطرح لکھتے ہیں)

$$\begin{array}{r|l} & 8 \\ \hline 8 & \overline{70}\ \overline{56} \\ & -64 \\ \hline & 6 \end{array}$$

مرحلہ-2 ایک سب سے بڑا عدد معلوم کریں جو سب سے بائیں طرف کے بار کے نیچے لکھے عدد سے کم یا برابر ہو ($9^2 < 70 < 8^2$) اس عدد کو مقسوم علیہ اور سب سے بائیں طرف بار کے نیچے لکھے عدد کو مقسوم کی شکل میں لیں۔ تقسیم دیں اور باقی (جو یہاں 6 ہے) معلوم کریں۔

$$\begin{array}{r|l} & 8 \\ \hline 8 & \overline{70}\ \overline{56} \\ & -64 \\ \hline & 656 \end{array}$$

مرحلہ-3 اگلے 'بار' کے نیچے لکھے عدد کو باقی کے دائیں لکھیں۔ (جو یہاں 56 ہے) اسطرح نیا مقسوم 656 ہوگا۔

$$\begin{array}{r|l} & 8 \\ \hline 8 & \overline{70}\ \overline{56} \\ 8 & -64 \\ \hline 16\_ & 656 \end{array}$$

مرحلہ-4 مقسوم علیہ کے ساتھ مقسوم علیہ کے برابر جوڑیں (یا مقسوم علیہ کو دُوگنا کریں) اور اسے انکے دائیں میں خالی جگہ کے ساتھ لکھیں۔

$$\begin{array}{r|l} & 84 \\ \hline 8 & \overline{70}\ \overline{56} \\ 8 & -64 \\ \hline 164 & 656 \\ 4 & 656 \\ \hline & 0 \end{array}$$

مرحلہ-5 خالی جگہ کو بھرنے کے لئے سب سے بڑے ممکنہ ہندسے کا اندازہ لگائیں جو ہندسہ حاصل تقسیم میں نیا ہوگا۔ اسطرح نیا ہندسہ جب ضرب ہوتا ہے تب حاصل ضرب مقسوم کے برابر یا چھوٹا ہوگا۔ اس حالت میں ہم دیکھتے ہیں کہ 164x4=656 اسلئے حاصل تقسیم میں نیا ہندسہ 4 ہے۔ باقی معلوم کریں۔

نوٹ: اگر اسکے بعد بھی باقی بچے اور عدد میں 'بار' کے نیچے کا عدد اُتارنا پڑے تو مقسوم علیہ کے اکائی ہندسہ کو مقسوم میں جوڑ کر مرحلہ-5 کا قاعدہ لگاتے ہیں۔ یہ عمل تب تک چلتا رہتا ہے جب تک کہ باقی صفر نہ

ہو پائے۔ یہ قاعدہ مکمل مربع عدد کے لئے ہے۔

چونکہ باقی صفر ہے اور بار، کے نیچے کوئی عدد نہیں ہے اسلئے $\sqrt{7056} = 84$

5.6 عدد کا اندازہ یا قیاس

مندرجہ بالا مکمل مربع عدد 576 اور 7056 کے جذرالمربع میں ہندسوں کی تعداد معلوم کرنے کے لئے 'بار' کا استعمال کرتے ہیں۔

$\sqrt{\overline{5}\,\overline{76}} = 24$ اور $\sqrt{\overline{70}\,\overline{56}} = 84$

اِن دونوں اعداد یعنی 576 اور 7056 میں 'بار' کی تعداد 2 ہے اور اِن کے جذرالمربع میں ہندسوں کی تعداد 2 ہے۔

کیا آپ 25600 کے جذرالمربع میں ہندسوں کی تعداد بتا سکتے ہیں؟ بار لگانے پر ہم $\overline{2}\,\overline{56}\,\overline{00}$ میں 3 بار حاصل کرتے ہیں۔ اسلئے 25600 کے جذرالمربع میں 3 ہندسہ ہوگا۔

خود کر کے دیکھئے

مندرجہ ذیل اعداد کے جذرالمربع میں ہندسوں کی کُل تعداد معلوم کیجئے (بغیر جذرالمربع نکالے)

(i)19600 (ii)6400000000 (iii)4401604

مثال-5 وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد معلوم کریں جسے 16180 میں سے گھٹانے پر وہ مکمل مربع عدد بن جائے۔ اس مکمل مربع عدد کا جذرالمربع بھی معلوم کریں۔

	127
1	$\overline{1}\,\overline{61}\,\overline{80}$
1	-1
22	061
2	-44
247	1780
7	-1729
	051

حل: سب سے پہلے طویل تقسیمی طریقہ سے معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔ اسطرح ہمیں 51 باقی حاصل ہوتا ہے۔ یہ ظاہر کرتا ہے کہ 127^2، 16180 سے 51 کم ہے۔ یعنی اگر ہم 16180 میں سے 51 گھٹا دیں تو ہمیں ایک مکمل مربع عدد حاصل ہوگا۔ اسلئے مطلوبہ مکمل مربع عدد $= 16180 - 51 = 16129$ اور $\sqrt{16129} = 127$

مثال-6 وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد معلوم کریں جسے 7609 میں جوڑنے پر وہ مکمل مربع عدد بن جائے۔ اس مکمل مربع عدد کا جذرالمربع بھی معلوم کریں۔

حل:

	87
8	7609
8	-64
167	1209
7	1169
	040

واضح ہے کہ $87^2 < 7609 < 88^2$

وہ عدد جسے 7609 میں جوڑنے سے مکمل مربع بنے گا وہ ہے۔

$$88^2 - 7609 = 7744 - 7609 = 135$$

اس لئے مطلوبہ عدد =135

اور مکمل مربع عدد = 7609 + 135 =7744

اب 7744 کا جذرالمربع نکالینگے

	88
8	7744
8	-64
168	1344
8	-1344
	0

$\therefore \sqrt{7744} = 88$

مثال-7 پانچ ہندسوں کا وہ بڑے سے بڑا عدد معلوم کریں جو کہ مکمل مربع ہے۔ عدد کا جذرالمربع بھی معلوم کریں۔

حل: پانچ ہندسوں کا سب سے بڑا عدد 99999 جو مکمل مربع عدد نہیں ہے

اب چھوٹے سے چھوٹا عدد معلوم کرتے ہیں جسے 99999 میں سے گھٹانے پر یہ مکمل مربع عدد بن جائے۔

اسلئے ہم 99999 کا جذرالمربع معلوم کرتے ہیں۔

	316
3	$\overline{9}\,\overline{99}\,\overline{99}$
3	-9
61	099
1	-61
626	3899
6	-3756
632	143

واضح ہے کہ $316^2 < 99999$

فرق ہے 143

اسلئے مطلوبہ عدد = $99999 - 143 = 99856$

ساتھ ہی $\sqrt{99856} = 316$

مثال-8 ایک مربع نما کھیت میں گھاس لگانے کا خرچ 15 روپیہ فی مربع میٹر کی در سے 1837500 روپیہ ہے۔ اس کھیت کے چاروں طرف تار لگانے کا خرچ 60 روپیہ فی میٹر کی شرح سے کتنا ہوگا؟

حل: گھاس لگانے کا خرچ =1837500 روپیہ

کھیت کا رقبہ = $\frac{1837500}{15}$ مربع میٹر

=122500 مربع میٹر

اسلئے مربع نما کھیت کا ضلع = $\sqrt{122500}$

=350mt

کھیت کا احاطہ = 4x ضلع

=4x350

=1400mt

اسلئے تار لگانے کا خرچ =60x1400 روپیہ

=84000 روپیہ

مثال-9 $\frac{144}{256}$ کا جذر المربع معلوم کریں

حل: $\frac{144}{256}$ کا جذر المربع کرنے کے لئے سب سے پہلے

	16
1	256
1	1
26	156
6	156
	0

اور

	12
1	144
1	-1
22	044
2	44
	0

$\therefore \sqrt{256} = 16$ $\qquad$ $\therefore \sqrt{144} = 12$

اب $\sqrt{\frac{144}{256}} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

کسر اعداد کا جذر المربع معلوم کرنے کے لئے نسب نما اور شمار کنندہ کا جذر المربع الگ الگ نکالتے ہیں۔ پھر حاصل جذر المربع کو شمار کنندہ کی شکل میں لکھتے ہیں۔

5.7 اعشاریہ اعداد کا جذر المربع

ابھی تک ہم نے مکمل مربع اعداد کے ہی جذر المربع نکالے ہیں۔ پر ہم دوسرے اعداد جیسے اعشاریہ اعداد کے بھی جذر المربع بھی نکال سکتے ہیں۔ مندرجہ ذیل مثالوں کو سمجھیں۔

اعشاریہ والے اعداد کا جذر المربع معلوم کرنے کے لئے سب سے پہلے مکمل عدد والا حصہ کا جوڑ دائیں سے بائیں کی طرف لگاتے ہیں پھر اعشاریہ والے عدد کے ہندسوں کا جوڑا۔

مثال 10. 150.0625 کا جذر المربع معلوم کریں۔

حل:

	12.25
1	144
1	-1
22	050
2	44
242	0606
2	-484
2445	12225
5	-12225
	0

$\therefore \sqrt{150.0625} = 12.25$

سوالنامہ-5.2

1. مندرجہ ذیل اعداد کا جذر المربع طویل تقسیمی عمل سے معلوم کریں

(i) 625 (ii) 900 (iii) 1444 (iv) 3249 (v) 5776

(vi) 10404 (vii) 19600

2. مندرجہ ذیل اعداد میں سے ہر ایک کے جذر المربع میں ہندسوں کی تعداد بنا جذر المربع نکالے معلوم کریں۔

(i) 81 (ii) 121 (iii) 256 (iv) 4489 (v) 361

(vi) 27225 (vii) 390625

3. مندرجہ ذیل کسروں کا جذر المربع معلوم کریں

(i) $\sqrt{\frac{9}{16}}$ (ii) $\sqrt{\frac{25}{36}}$ (iii) $\sqrt{\frac{36}{121}}$ (iv) $\sqrt{\frac{196}{225}}$ (v) $\sqrt{\frac{54}{486}}$

(vi) $\sqrt{3\frac{13}{36}}$ (vii) $\sqrt{\frac{80}{405}}$

4. مندرجہ ذیل اعشاریہ اعداد کا جذر المربع معلوم کریں

(i) 2.25 (ii) 6.76 (iii) 156.25 (iv) 9.8596

(v) 31.36 (vi) 1.0816 (vii) 0.2916

5. مندرجہ ذیل اعداد میں سے ہر ایک میں سے سب سے چھوٹا کون سا عدد گھٹایا جائے کہ مکمل مربع عدد حاصل ہو جائے۔ اسطرح حاصل اعداد کا جذر المربع بھی معلوم کیجیے:

(i) 90 (ii) 7581 (iii) 1989 (iv) 3250

(v) 402 (vi) 825 (vii) 4000 (viii) 2509

6. مندرجہ ذیل اعداد میں سے ہر ایک میں چھوٹے سے چھوٹا کون سا عدد جوڑا جائے کہ وہ ایک مکمل مربع عدد بن جائے۔ اس طرح حاصل مکمل مربع اعداد کا جذر المربع بھی معلوم کریں۔

(i) 130 (ii) 8400 (iii) 6203 (iv) 6412

(v) 525 (vi) 1750 (vii) 252 (viii) 1825

7. چھ ہندسوں کا وہ بڑے سے بڑا عدد معلوم کریں جو کہ ایک مکمل مربع عدد ہے عدد کا جذر المربع بھی معلوم کریں۔

8. چار ہندسوں کا وہ بڑے سے بڑا عدد معلوم کیجئے جو کہ ایک مکمل مربع عدد ہو حاصل مربع عدد کا جذر المربع بھی معلوم کیجئے

9. چھ ہندسوں کا وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد معلوم کریں جو کہ ایک مکمل مربع عدد ہو اسطرح حاصل مربع عدد کا جذر المربع بھی معلوم کیجئے

10. ایک مربع نما میدان کا رقبہ $60025m^2$ ہے۔ایک آدمی سائیکل سے 5 میٹر فی سکنڈ کی چال سے میدان کے چاروں طرف چلتا ہے تو کتنے وقت میں وہ اُس نقطہ پر آ جائیگا جہاں سے چلنا شروع کیا تھا۔

ہم نے سیکھا

1. کسی عدد کو اُسی عدد سے ضرب کرنے پر جو حاصل ضرب حاصل ہوتا ہے اُس عدد کو مربع عدد کہتے ہیں۔یعنی مانا کہ n کوئی عدد ہے۔اس عدد کو n عدد سے ضرب کرنے پر حاصل ضرب اگر m حاصل ہوتا ہے تو n کو مربع عدد کہتے ہیں

یعنی $n x n = m$

یعنی $m = n^2$

2. کسی عدد کو غیر منقسم اجزائے ضربی کو یکساں اجزائے ضربی کے جوڑوں یا گروپوں میں تبدیل کر پہچان کرتے ہیں کہ دیا گیا عدد مربع ہے یا نہیں

3. جذر المربع ، مربع کا معکوس عمل ہے

4. ایک مکمل مربع عدد کے دو مکمل جذر المربع ہوتے ہیں۔

مثبت جذر المربع کو علامت $\sqrt{\ }$ کے ذریعہ ظاہر کیا جاتا ہے

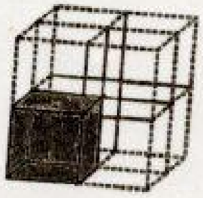
مثال کے لئے $4^2 = 16 \quad \sqrt{16} = 4$

نوٹ

باب-6 مکعب اور جذر المکعب

Cube and Cuberoot

6.1 تمہید:



سامنے مکعب کی تصویر دی گئی ہے۔ مکعب کی سبھی ضلع آپس میں برابر ہوتے ہیں اور مکعب کا حجم = ضلع x ضلع x ضلع ہوتا ہے۔ اگر آپکے پاس 1cm کے مکعب ہوں تو بتائیے 2cm ضلع والا ایک مکعب 1cm ضلع والے کتنے مکعبوں سے بنے گا۔

سیما نے اسے کرنے کے لئے 1cm کے مکعبوں کو اسطرح جمایا (شکل 6.1) اب سوچئے 1cm ضلع والے کتنے مکعبوں سے 3cm ضلع والا ایک مکعب بنے گا۔ آپ اسے حجم = ضلع x ضلع x ضلع میں ضلع=3 رکھ کر بھی نکال سکتے ہیں۔ مکعب کے حجم کے علاوہ بھی جب ہم کسی عدد کو خود سے تین بار ضرب کرتے ہیں تو حاصل عدد کو ہم مکعب عدد کہتے ہیں۔ جیسے کوئی عدد a کے لئے مکعب = axaxa۔ اسے ہم a^3 سے بھی ظاہر کرتے ہیں۔

کیا اعداد 1728,1000,729 بھی ایک مکمل مکعب ہیں۔

اعداد 1,8,27,64........ پر غور کریں یہ مکمل مکعب (Perfect cube) یا مکمل مکعب اعداد (Perfect cube numbers) کہلاتے ہیں۔

$216=6\times6\times6=6^3$ اسلئے 216 ایک مکعب عدد ہے۔ کیا 49 ایک مکعب عدد ہے۔ سوچئے 49 کے مکعب ہونے کے لئے ایک ایسا قدرتی عدد کا ہونا ضروری ہے جسے تین بار خود سے ضرب کرنے 49 حاصل ہوتا ہو۔ نہیں، کیونکہ $49=7\times7$ اور کوئی ایسا قدرتی عدد نہیں ہے جسے خود سے ضرب کرنے پر 49 ملتا ہو۔ ہم جانتے ہیں کہ $27=3\times3\times3$ اور $64=4\times4\times4$ اس سے یہ واضح ہے کہ 27 اور 64 کے بیچ کوئی مکعب عدد نہیں ہے۔ اسلئے 49 ایک مکمل مکعب نہیں ہے۔

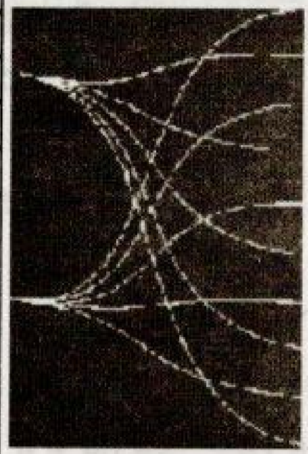
نیچے 1 سے 10 تک کے اعداد کے مکعب دیئے گئے ہیں۔

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	اعداد
10^3	9^3	8^3	7^3	6^3	5^3	4^3	3^3	2^3	1^3	مکعب عدد
1000	......	......	.....	......	125	64	27	8	1	عددی قیمت

یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ 1 سے 1000 تک صرف 10 مکمل مکعب ہیں۔ 1 سے 100 تک کتنے مکمل مکعب ہیں؟ جفت اعداد کے مکعبوں کو دیکھیں۔ کیا یہ سبھی جفت ہے ں؟ آپ طاق اعداد کے مکعبوں کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟

اب 11 سے 20 تک کے اعداد کے مکعب نیچے دیئے جاتے ہیں۔

مکعب	عدد
1331	11
1728	12
2197	13
2744	14
3375	15
4096	16
4913	17
5832	18
6859	19
8000	20



ہم جفت ہیں اور ہمارے مکعب بھی جفت ہیں

ہم طاق ہیں ہمارے مکعب بھی طاق ہیں

اب درج ذیل جدول کے اعداد پر غور کریں

سوچیے 1 اکائی ہندسہ والے اعداد کے مکعبوں میں ہمیشہ '1' ہی اکائی ہوتا ہے

مکعب	اعداد
$1^3=1$	1
$11^3=1331$	11
$21^3=$.......	21
$31^3=$........	31
$41^3=$........	41
$51^3=$........	51
$61^3=$........	61

اوپر کے جدول کو دیکھ کر بتائے کہ وہ اعداد جن کا اکائی کا ہندسہ 1 ہے کے مکعب میں اکائی کا ہندسہ کیا ہے؟

....

کیا آپکو کوئی اور پیٹرن ملتا ہے؟..

22,12,2 کو مکعبوں کا اکائی ہندسہ ہمیشہ 8 ہی ہوگا۔ اسی طرح 0,9,8,7,6,5,4,3 کے اکائی ہندسہ والے اعداد کے پیٹرن کھوج کر لکھئے۔..

خود کر کے دیکھئے:

مندرجہ ذیل اعداد میں سے ہر ایک کے مکعب کا اکائی ہندسہ معلوم کریں۔

(i) 543 (ii) 8765 (iii) 43254 (iv) 5321

(v) 321456 (vi) 3257 (vii) 876549

6.2.1 کچھ دلچسپ پیٹرن

1. لگا تار طاق اعداد کو جوڑنا

درج ذیل پیٹرن کو دیکھئے:

$$1 = 1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 8 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$$

اس پیٹرن کو آگے پڑھایئے۔..........................

2 کے مکعب میں اور اُسکے پیٹرن 3+5 کے پہلے طاق عدد 7^3 کے بیچ آپکو کوئی پیٹرن دکھائی دیتا ہے؟

....

اسی طرح 3 کے مکعب اور اُسکے پیٹرن 7+9+11 کے پہلے طاق عدد 7 کے بیچ آپکو کوئی پیٹرن دِکھتا ہے؟

آپ نے ٹھیک ڈھونڈا 2x1+1=3

3x2+1=7

خود کر کے دیکھئے

10^3 حاصل کرنے کے لئے کتنے لگا تار طاق اعداد کی ضرورت ہوگی؟ اور یہ اعداد کس طاق عدد سے شروع ہوگا۔

مندرجہ ذیل مکعب اعداد کو طاق اعداد کے حاصل جمع کی شکل میں ظاہر کریں

(i) 5^3 (ii) 7^3 (iii) 9^3 (iv) 11^3

ہرایک عدد کے مکعب کے لئے پہلا طاق عدد خود سے 1 کم سے ضرب میں 1 جوڑنے سے شروع ہوتا ہے۔ اسطرح اس پیٹرن سے ہمیں کسی بھی عدد کا مکعب طاق اعداد کے حاصل جمع کے ذریعہ نکالنے میں سہولت ہوگی۔

2. مندرجہ ذیل کو دھیان سے دیکھیں

غیر منقسم اجزائے ضربی	مکعب عدد	غیر منقسم اجزائے ضربی	اعداد
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2 \times 2^3$	4^3	2x2	4
$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^3$	6^3	2x3	6
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2 \times 2^3 \times 2^3$	8^3	2x2x2	8
$3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 3 \times 5^3$	15^3	3x5	15

2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

جدول سے واضح ہے کہ ایک عدد کا ہرایک غیر منقسم جُز منقسم جزی ضربی اُس عدد مکعب کے غیر منقسم اجزائے ضربی میں تین بار آتا ہے۔

اگر کسی عدد کے غیر منقسم اجزائے ضربی میں ہرایک جُز ضربی تین بار آتا ہے تو کیا وہ عدد ایک مکمل مکعب ہوتا ہے؟ اسکے بارے میں سوچئے

مثال 1۔ کیا 512 ایک مکمل مکعب ہے؟

حل: 512 کا اجزائے ضربی کرنے پر

$$512 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2}$$

ہاں 512 ایک مکمل مکعب ہے کیونکہ اجزائے ضربی کے تین تین کے مجموعے بنائے جاسکتے ہیں۔

2	600
2	300
2	150
2	75
5	25
5	5
	1

مثال 2۔ کیا 600 مکمل مکعب ہے

حل: 600 کا اجزائے ضربی کرنے پر

$$600 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$$

انکے غیر منقسم اجزائے ضربی میں تین تین کا مجموعہ صرف 2 کا ہے

3 اور 5 کا نہیں

اسلئے 600 ایک مکمل مکعب نہیں ہے۔

خود کر کے دیکھئے۔

مندرجہ ذیل میں کون سے اعداد مکمل مکعب ہیں

(i) 216 (ii) 8000 (iii) 800 (iv) 15625

(v) 2025 (vi) 1000 (vii) 625 (viii) 343

مثال-3 کیا 500 ایک مکمل مکعب ہے؟ اگر نہیں تو ایسا سب سے چھوٹا قدرتی عدد معلوم کیجئے جس سے 500 کو ضرب کرنے پر حاصل ضرب ایک مکمل مکعب ہو جائے

2	500
2	250
5	125
5	25
5	5
	1

حل: $500 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

ان میں 2 تین کا مجموعہ میں نہیں آرہا ہے۔

اس لئے 500 ایک مکمل مکعب نہیں ہے۔ اسے مکمل مکعب عدد بنانے کے لئے ایک اور 2 کی ضرورت ہے۔ ایسی حالت میں $500\times 2 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 = 1000$

جو ایک مکمل مکعب ہے۔

اس لئے مطلوبہ عدد = 2

مثال-4 وہ سب سے چھوٹا عدد معلوم کیجئے جسے 23625 میں تقسیم دینے پر حاصل تقسیم مکمل مکعب بن جائے۔

3	23625
3	7875
3	2625
5	875
5	175
5	35
7	7
	1

حل: $23625 = \underline{3\times3\times3}\times\underline{5\times5\times5}\times7$

یہاں 23625 کے اجزائے ضربی میں 7 تین کے مجموعے میں نہیں ہے۔ اسلئے ان میں 7 سے تقسیم دینے پر حاصل تقسیم مکمل مکعب حاصل ہوگا

اسلئے مطلوبہ عدد = 7 ہے

سوالنامہ 6.1

1. مندرجہ ذیل میں کون سے اعداد مکمل مکعب نہیں ہیں ــــ

(i)400 (ii)342 (iii)68600 (iv) 2744

(v)800 (vi)46656 (vii)408375 (viii) 9000

2. وہ سب سے چھوٹا عدد معلوم کریں جسے مندرجہ ذیل اعداد سے ضرب کرنے پر مکمل مکعب حاصل ہو جائے۔

(i)320 (ii)243 (iii)675 (iv)432

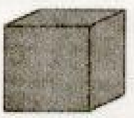
3. وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد معلوم کریں جس سے مندرجہ ذیل اعداد کو تقسیم دینے پر حاصل تقسیم ایک مکمل مکعب حاصل ہو جائے

(i)256 (ii)3125 (iii)1408 (iv)192

4. مندرجہ ذیل مکعب اعداد کو اُسکے لگاتار طاق اعداد کے حاصل جمع کی شکل میں لکھیں

(i)2^3 (ii)4^3 (iii)5^3 (iv)8^3

6.3 جذرالمکعب (Cube root)

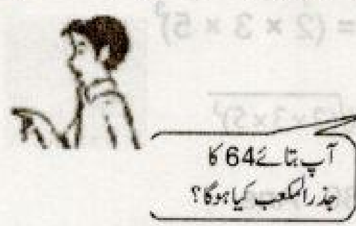


ذیل کے حالات کا مطالعہ کریں اگر مکعب کا حجم $125cm^3$ ہے تو مکعب کا ضلع کیا ہوگا؟ اگر مکعب کا حجم = ^{3}(ضلع) ہوتا ہے۔ اگر ہم ضلع کی لمبائی کی قیمت a لیتے ہیں تب $a^3=125$ ضلع کی لمبائی معلوم کرنے کے لئے ضروری ہے کہ ایک ایسا عدد معلوم کریں جس کا مکعب 125 ہے۔

مندرجہ بالا حالت میں ہمیں ایک عدد کی ضرورت ہے جسکا مکعب معلوم ہے۔ اُس عدد کو جذرالمکعب کی شکل میں جانا جاتا ہے۔

جذرالمکعب معلوم کرنا

جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ جذرالمربع، مربع کا معکوس عمل ہے اُسی طرح جذرالمکعب بھی مکعب کا معکوس عمل ہے اسلئے



$8=2^3$ اسلئے 8 کا جذرالمکعب 2 ہے

$27=3^3$ اسلئے 27 کا جذرالمکعب 3 ہے

جذرالمکعب کا علامتی نشان "$\sqrt[3]{\ }$" لکھتے ہیں

اسلئے مندرجہ ذیل بالا بیان کو ہم مندرجہ ذیل طریقہ سے لکھ سکتے ہیں جیسے۔

$1^3 = 1$ اسلئے $\sqrt[3]{1} = 1$

$2^3 = 8$ اسلئے $\sqrt[3]{8} = 2$

$3^3 = 27$ اسلئے $\sqrt[3]{27} = 3$

$4^3 = 64$ اسلئے $\sqrt[3]{64} = 8$

خود کر کے دیکھئے:

مندرجہ ذیل اعداد کا جذر المکعب بتائے

(i)8 (ii)27 (iii)64 (iv)512 (v)729

6.3.1 غیر منقسم اجزائے ضربی کے ذریعہ جذر المکعب

مثال5۔ 2744 کا جذر المکعب غیر منقسم اجزائے ضربی کے ذریعہ معلوم کریں

2	2744
2	1372
2	686
7	343
7	49
7	7
	1

حل:

$2744 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{7 \times 7 \times 7}$

$= 2^3 \times 7^3 = (2 \times 7)^3$

$\therefore \sqrt[3]{2744} = \sqrt[3]{(2 \times 7)^3}$

$= 2 \times 7 = 14$ Ans.

مثال6۔ 27000 کا جذر المکعب معلوم کریں

2	27000
2	13500
2	6750
3	3375
3	1125
3	375
5	125
5	25
5	5
	1

$27000 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{5 \times 5 \times 5}$

$2700 = 2^3 \times 3^3 \times 5^3 = (2 \times 3 \times 5)^3$

$\sqrt[3]{27000} = \sqrt[3]{(2 \times 3 \times 5)^3}$

$= 2 \times 3 \times 5 = 30$ Ans.

مثال 7۔ وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد معلوم کریں جس سے 256 کو ضرب کرنے پر حاصل ضرب ایک مکمل مکعب عدد بن جائے اسطرح حاصل مکعب عدد کا جذر المکعب بھی معلوم کریں۔

2	256
2	128
2	64
22	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

حل: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$

یہاں 256 کے غیر منقسم اجزائے ضربی میں 2 سے تین تین کے دو مجموعے بن رہے ہیں۔ لیکن تیسرا مجموعہ نہیں بن رہا ہے۔ اسلئے واضح ہے دیئے ہوئے عدد میں 2 سے ضرب کرنے پر حاصل ضرب ایک مکعب عدد ہوگا۔ اسلئے مطلوبہ عدد = 2 ہوگا۔

اب حاصل مکمل عدد = 256x2

= 512

اسلئے جذر المکعب $\sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 2^3}$

$= 2 \times 2 \times 2 = 8$

مثال-8 وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد معلوم کریں جس سے 8019 کو تقسیم دینے پر حاصل تقسیم ایک مکمل مکعب بن جائے

حل: $\sqrt[3]{8019} = \sqrt[3]{\underline{3\times3\times3}\times\underline{3\times3\times3}\times11}$

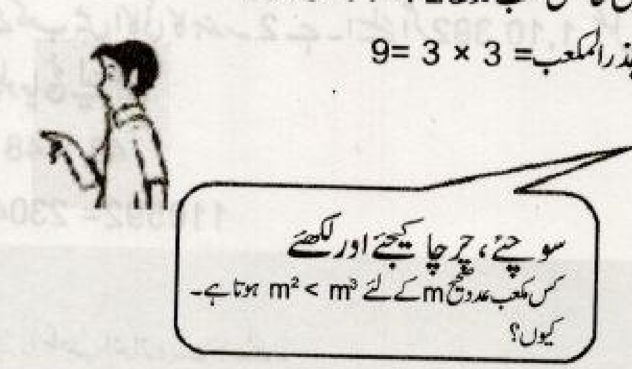
یہاں 8019 کے غیر منقسم اجزائے ضربی میں عدد میں 11 تین تین کے مجموعہ میں نہیں ہے۔ اسلئے مذکورہ عدد میں 11 سے تقسیم دینے پر معلوم حاصل تقسیم ایک مکعب عدد ہوگا۔

3	8019
3	2673
3	891
3	297
3	99
3	33
11	11
	1

اسلئے مطلوبہ عدد = 11

اور اس طرح حاصل مکعب عدد $8019 \div 11 = 729$

729 کا جذر المکعب $= 3 \times 3 = 9$



6.3.2 کسی مکعب عدد کا جذر المکعب قیاس کے ذریعہ معلوم کرنا

مان لیا کہ ایک مکعب عدد110592 لیتے ہیں۔اس عدد کا جذر المکعب ہم قیاس یا اندازہ طریقہ سے مندرجہ طریقے سے معلوم کر سکتے ہیں

نیچے دیئے گئے جدول کو پورا کرو

A	B
$1^3=1$	$10^3=1000$
$2^3=8$	$20^3=8000$
$3^3=27$	$30^3=27000$
$4^3=64$	$40^3=64000$
$5^3=....$	$50^3=125000$
$6^3=....$	$60^3=..........$
$7^3=....$	$70^3=..........$
$8^3=....$	$80^3=..........$
$9^3=....$	$90^3=..........$

مندرجہ بالا جدول دیکھ کر آپ کیا بتا سکتے ہیں110592 کا جذر المکعب کن دو اعداد کے بیچ ہوسکتا ہے؟ کیا یہ20 اور30 کے بیچ ہوسکتا ہے؟ اوپر کے جدول سے20 اور30 کے مکعب کو دیکھیں۔آپ نے دیکھا کہ 30 کا مکعب27000 ہے۔110592 اس سے بڑا ہے۔40 کا مکعب64000 اور50 اور مکعب 125000 ہے اسلئے عدد110692 کا جذرلکمعب ملتے ہے کہ 40 اور 50 کے بیچ میں ہوگا۔40 اور 50 کے بیچ میں اعداد 41,42,43,44,45,46,47,48 اور49 ہیں۔

پھر جدول A دیکھئے کس کے مکعب میں اکائی کا ہندسہ 2 ہے۔

صرف8 کے مکعب میں اکائی کا ہندسہ 2 ہے۔اسلئے اگر1,10,392 مکمل مکعب عدد ہے تو اسکا جذر المکعب48 ہوگا۔چلو جانچ لیتے ہیں

$$48 \times 48 \times 48 =$$

$$110592 = 2304 \times 48 =$$

خود کر کے دیکھئے

79507 کا جذر المکعب اندازہ سے نکالئے۔

سوالنامہ 6.2

1. مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک عدد کا جذر المکعب غیر منقسم اجزائے ضربی کے طریقہ سے معلوم کریں۔

(i)125 (ii)729 (iii)512 (iv)1331

(v)5832 (vi)421875 (vii)157464 (viii)74088

(ix)175616 (x) 35937

2. مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک عدد کے لئے وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد بتائیں جس سے اس عدد کو ضرب کرنے پر وہ ایک مکمل مکعب بن جائے۔ اسطرح سے حاصل مکمل مکعب عدد کا جذر المکعب بھی معلوم کریں

(i)320 (ii)1352 (iii) 243

(iv)675 (v)432

3. وہ چھوٹا سے چھٹا عدد معلوم کریں جس سے مندرجہ ذیل اعداد کو تقسیم کرنے پر حاصل تقسیم ایک مکمل مکعب بن جائے۔ اس طرح معلوم مکمل مکعب عدد کا جذر المکعب بھی معلوم کریں

(i)256 (ii)3125 (iii)8019

(iv)1408 (v)192

4. اندازہ لگا کر مندرجہ ذیل مکعب عدد کا جذ المکعب معلوم کریں

(i)5832 (ii)74088 (iii)421875 (iv)157464

(v)4913 (vi)12167 (vii)32768

5. مندرجہ ذیل میں صحیح اور غلط کو بتائیں

(الف) کسی بھی طاق عدد کا مکعب جفت ہوتا ہے

(ب) ایک مکمل مکعب دو صفر پر ختم نہیں ہوتا ہے

(ج) اگر کسی عدد کا مربع 5 پر ختم ہوتا ہے تو اُس کا مکعب 25 پر ختم ہوتا ہے

(د) ایسا کوئی مکمل مکعب نہیں ہے جو 8 پر ختم ہوتا ہے

(ہ) دو ہندسوں والے عدد کا مکعب تین ہندسوں والا عدد ہو سکتا ہے

(ر) دو ہندسوں والے عدد کا مکعب میں ساتھ یا زیادہ ہندسے ہو سکتے ہیں

(س) ایک ہندسہ والے عدد کا مکعب ایک ہندسہ والا عدد ہو سکتا ہے

ہم نے سیکھا

1. جب ایک عدد کو خود سے تین بار ضرب کیا جاتا ہے تب جو حاصل ضرب حاصل ہوتا ہے اُسے مکمل مکعب عدد کہتے ہیں۔

جیسے $2 \times 2 \times 2 = 8, 3 \times 3 \times 3 = 27, 4 \times 4 \times 4 = 64$ وغیرہ

2. جفت عدد کا مکعب بھی جفت عدد ہوتا ہے۔

جیسے: $2^3 = 8, 4^3 = 64, 6^3 = 216, 12^3 = 1728$ وغیرہ

3. طاق عدد کا مکعب بھی طاق عدد ہوتا ہے۔ جیسے

$1^3 = 1, 3^3 = 27, 5^3 = 125, 11^3 = 1331$ وغیرہ

4. جس عدد کے اکائی کا ہندسہ 1 (ایک) ہوتا ہے۔ اسکے مکعب کے اکائی کا ہندسہ بھی 1 (ایک) ہوتا ہے۔

جیسے:- $1 \rightarrow 1^3 = 1, 11 \rightarrow 11^3 = 1331$

5. لگاتار طاق اعداد کے حاصل جمع سے بھی ایک مکعب عدد حاصل ہوتا ہے

6. اگر کسی عدد کے غیر منقسم اجزائے ضربی میں ہر ایک جُزِ ضربی تین بار آتا ہے تو وہ عدد ایک مکمل مکعب ہوتا ہے۔

جیسے: 8 کا غیر اجزائے ضربی=2x2x2 اور 216 کا غیر منقسم اجزائے ضربی=3x3x3x2x2x2x وغیرہ

اسلئے 8 اور 216 مکمل مکعب ہیں۔

باب-7 اقلیدسی (جیومیٹریکل) اشکال کی تشکیل یا بناوٹ
(Construction of Geometrical Fitures)

7.1 تمہید:

آپ مختلف اقسام کے مثلثوں کو بنانا جانتے ہیں۔ آپ یہ بھی جانتے ہیں کہ مثلث کے تین اضلاع اور تین زاویوں میں کوئی بھی تین حصے لے کر بے مثل (Unique) مثلث نہیں بنایا جاسکتا ہے۔ بے مثل مثلث بنانے کے لئے نیچے دیئے گئے حالات معلوم ہونا ضروری ہیں۔

(1) مثلث کے تینوں ضلعوں کی لمبائی دی ہوئی ہو۔

(2) مثلث کے دو اضلاع اور اُن کے بیچ کا زاویہ دیا ہو۔

(3) مثلث کے دو زاویے اور دیئے زاویے کا مشترک ضلع دیا ہو۔

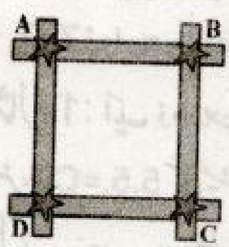
(4) مثلث کا ایک زاویہ زاویہ قائمہ اور اُس کا وتر اور کوئی ایک ضلع دیا ہو۔

سوچئے کیا مثلث کے تینوں زاویے معلوم ہونے پر ایک بے مثل مثلث بنایا جاسکتا ہے۔ اپنے جواب کی وجہ بھی دیجئے۔

اسی طرح ایک ذوار بعتہ الاضلاع یا چار ضلعی کی بناوٹ کے لئے ہمیں کم سے کم کتنی پیمائشوں کی جانکاری ہو جس سے ہمیں چار بے مثل نقطے حاصل ہو جائیں۔

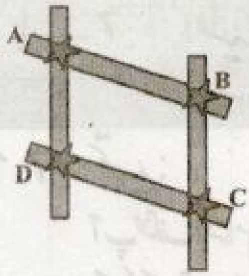
ذوار بعتہ الاضلاع کی خصوصیات کو سیکھنے کے سلسلہ میں ہم نے جانا کہ ذوار بعتہ الاضلاع میں چار ضلع، چار زاویے اور دو وتر ہوتے ہیں۔ اس طرح ذوار بعتہ الاضلاع کے تحت کل دس پیمائشیں ہوتی ہیں۔ آیئے دیکھیں کہ ان دس پیمائشوں میں سے کم سے کم کتنی پیمائش کے مدد سے ہمیں ذوار بعتہ الاضلاع کی تشکیل کے لئے چار بے مثل نقطے

خود کر کے دیکھئے:

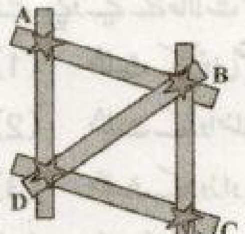


اسکول میں رکھے ریاضی کِٹ سے پانچ اسکیل لیجئے۔ اسکرو کی مدد سے اِن میں سے چار اسکیلوں کو تصویر کے مطابق آپس میں جوڑیئے۔ اس طرح آپ کو ایک ذوار بعتہ الاضلاع حاصل ہوتا ہے۔ اس ذوار بعتہ الاضلاع کی تشکیل ہم چار ضلعوں کی لمبائی معلوم رہنے پر کی ہے۔

آیئے اب دیکھیں کہ کیا یہ بناوٹ بے مثل ہے۔ اس کی جانچ کیلئے چار اسکیل کی مدد سے بنے ذوار بعتہ الاضلاع کو B اور D نقطہ کی طرف سے



ہلکا دکھائیے۔ آپ پائیں گے کہ ضلعوں کی لمبائی میں تبدیلی نہیں ہونے کے باوجود بھی ایک الگ طرح کا ذوار بعتہ الاضلاع بنا ہے۔ اس سے پتہ چلتا ہے کہ صرف چار ضلعوں کی لمبائی معلوم رہنے پر ہم ذوار بعتہ الاضلاع کی تشکیل کے لئے مطلوبہ چار بے مثل نقطے نہیں حاصل کر سکتے ہیں۔ اب پانچویں اسکیل کو اسکرو کی مدد سے اس طرح جوڑیئے کہ اُس کا ایک سرا B نقطہ پر ہو تو دوسرا سرا D نقطہ پر رہے۔ اس طرح چار ضلعوں کی لمبائی کے علاوہ ایک وتر کی لمبائی بھی ہمیں پتہ ہوجاتی ہے۔ اب اس ذوار بعتہ الاضلاع کو پھر سرے B اور سرے D کی طرف سے دبائیے۔ اس بار بناوٹ کی حالت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی ہے۔ اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ بنائی گئی شکل بے مثل ہے۔ یہاں ذوار بعتہ الاضلاع کے دس حصوں میں سے صرف پانچ حصوں (چار ضلعوں اور ایک وتر) کی مدد سے ہی ذوار بعتہ الاضلاع کی تشکیل ہوتی ہے۔ سوچئے کیا کسی بھی پانچ پیمائشوں کی مدد سے ہم بے مثل ذوار بعتہ الاضلاع بنا سکتے ہیں۔



حاصل ہوجائیں۔

7.2 ایک ذوار بعتہ الاضلاع کی بناوٹ:

آیئے مختلف حالات میں پانچ پیمائشوں کی مدد سے ہم بے مثل (ذوار بعتہ الاضلاع) کی تشکیل کریں۔

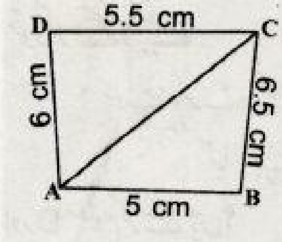
1. جب چاروں ضلع اور ایک وتر دیا ہو۔
2. جب تین اضلاع اور دونوں وتر دیئے ہوں۔
3. جب تین ضلعے اور اُن کے بیچ کے دو زاویے دیئے ہوں۔
4. جب تین زاویے اور اُن کے بیچ کے دو ضلعے دیئے ہوں۔
5. جب کچھ مخصوص حالات دیئے گئے ہوں۔

آیئے باری۔باری سے اوپر دیئے گئے حالات کے مطابق ذوار بعتہ الاضلاعوں کی تشکیل کریں۔

7.2.1 ذوار بعتہ الاضلاع کی بناوٹ کرنا جب چاروں ضلعے اور ایک وتر کی لمبائی دی ہوئی ہو۔

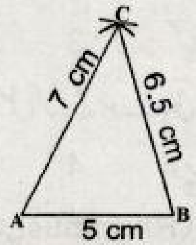
مثال 1: ایک ذوار بعتہ الاضلاع ABCD بنایئے جس میں AB = 5 سنٹی میٹر، BC = 6.5 سنٹی میٹر، CD = 5.5. سنٹی میٹر، AD = 6 سنٹی میٹر اور وتر AC = 7 سنٹی میٹر ہے۔

حل : سب سے پہلے ہم ذوار بعتہ الاضلاع ABCD کا ایک کچا خاکہ بنالیں گے جس میں وتر AC بھی درج

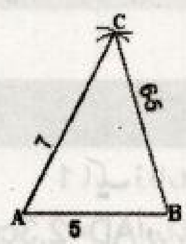


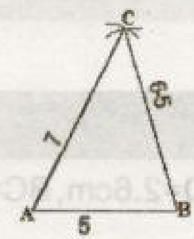
کریں گے۔اس کچے خاکے پر سبھی پیمائشوں کو درج کردیں گے۔ کچھ خاکہ کو دیکھنے سے پتہ چلتا ہے کہ ہمیں سب سے پہلے مثلث ABC کی تشکیل کرنی ہوگی پھر مثلث ACD کی تشکیل کی جائے گی۔اس طرح ہمیں ذواربعتہ الاضلاع کے لئے مطلوبہ چار بےشل نقطے حاصل ہوجائیں گے۔آیئے مرحلہ وار بناوٹ کریں۔

بناوٹ کے مرحلے



1. ضلع-ضلع-ضلع (S.S.S) شرط لازم کے استعمال کرتے ہوئے مثلث ABC بنایئے۔سب سے پہلے AB=5cm کا قطعہ خط کھینچیے۔پھر A اور B کو مرکز مانتے ہوئے بالترتیب AC=7cm اور BC=6.5cm کا نصف قطر کا قوس اسطرح کھینچیے کہ دونوں قوس ایک دوسرے کو کاٹیں۔اسطرح ہمیں AB کے علاوہ تیسرا نقطہ C بھی حاصل ہوگا۔



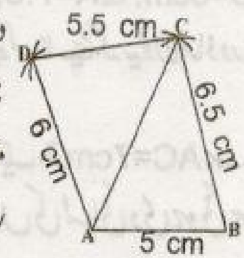


2. A کو مرکز مان کر AB=6cm نصف نظر کا ایک قوس کھینچیں گے نقطہ D اسی قوس پر کہیں واقع ہوگا۔

3. پھر CD=5.5cm نصف قطر کا ایک قوس کھینچیں گے۔نقطہ D اسی قوس پر کہیں واقع ہوگا۔

4. چونکہ D اوپر کے دونوں قوسوں پر واقع ہے یعنی نقطہ D دونوں قوسوں کا مشترک نقطہ یعنی اُنکا نقطہ تقاطع (Point of Interseetion) ہوگا۔نقطہ تقاطع پر D کو درج کریں گے اور اُسے نقطہ A اور C سے ملائیں گے۔اسطرح حاصل ذواربعتہ الاضلاع ABCD مطلوبہ ذواربعتہ الاضلاع ہے۔

ہر ایک ذواربعتہ الاضلاع دو مثلثوں سے ملکر بنتا ہے۔پہلے مرحلہ کے ایک مثلث اور دوسرے مرحلہ میں دوسرا مثلث۔اوپر والی بناوٹ میں ہم نے سب سے پہلے مثلث ABC بنایا جسکے لئے (S.S.S) اصول سے بناوٹ کی اِسکے بعد دوسرے مرحلہ میں مثلث ACD بنایا اور اُسکے لئے (S.S.S) اصول سے بناوٹ کی آخر میں چاروں راس D,C,B,A کو ملاکر ذواربعتہ الاضلاع ABCD کی بناوٹ کی۔



خود کر کے دیکھئے

سوچئے، کر کے دیکھئے اور اپنے دوستوں سے چرچا کیجئے کہ۔

1. کیا ہم پہلے وترAC کھینچ کر اُسکے بعد ذواربعۃ الاضلاع کی تشکیل کے لئے دو دوسرے نقطے B اور D معلوم کر سکتے ہیں؟

2. کیا مثلث ACD پہلے کھینچ کر مطلوبہ ذواربعۃ الاضلاع ABCD حاصل کر سکتے ہیں

3. کیا ہم ضلع AB کے علاوہ کسی بھی ضلع کو پہلے کھینچ کر ذواربعۃ الاضلاع کے لئے اوّل دو نقطوں کو حاصل کرتے ہوئے باقی دو نقطے اور حاصل کر سکتے ہیں؟

4. اوپر حاصل جانکاری کے بنیاد پر کیا آپ 3.5cm ضلع اور 5cm وتر والا ایک شکل (معین Rhombus) کھینچ سکتے ہیں

5. اوپر حاصل جانکاری کی بنیاد پر کیا آپ 5cm اور 6cm متصلہ اضلاع والا اور 6.5cm وتر والا ایک متوازی الاضلاع کھینچ سکتے ہیں۔

سوالنامہ 7.1

1. ایک ذواربعۃ الاضلاع ABCD بنائیے جسمیں AB=4 cm, BC=6cm, CD=2.6cm, AD=2.3cm, اور ایک وتر AC=4cm ہو۔

2. ایک ذور بعۃ الاضلاع PQRS کی تشکیل کیجئے جسمیں PQ=3.8cm, PS=5.5cm, QR=2.6cm, RS=5cm اور ایک وتر PR=8cm ہو۔

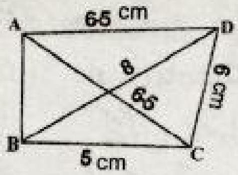
3. ایک ذواربعۃ الاضلاع ABCD کی تشکیل کیجئے جسمیں AB=4.5, BC=5.5, CD=4cm, AD=6cm اور ایک وتر AC=7cm ہو۔

4. ایک ذواربعۃ الاضلاع PQRS کی تشکیل کیجئے جسمیں PQ=6, QR=7.5, RS=6cm, PS=7.5cm, اور ایک وتر PR=8cm ہو بنے ذواربعۃ الاضلاع کی شکل کو دیکھ کر بتائیے کہ یہ کون سا ذور بعۃ الاضلاع ہے۔

5. ایک شکل معین ABCD کو تشکیل کیجئے جس میں AB=4.5cm اور ایک وتر AC=7cm ہو۔

7.2.2 ذواربعۃ الاضلاع کی تشکیل کرنا جب تین ضلع اور دونوں وتروں کی لمبائی دی ہوئی ہو۔

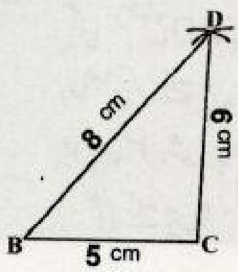
مثال 1: ایک ذواربعۃ الاضلاع ABCD کی تشکیل کیجئے جسمیں BC=5cm, AD=6.5cm, AD=



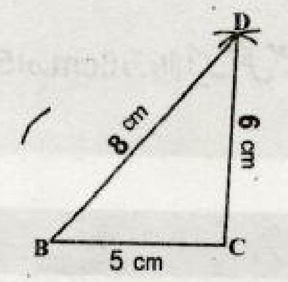
CD=6cm ایک وتر AC=6.5cm اور دوسرا وتر BD=8cm ہے۔

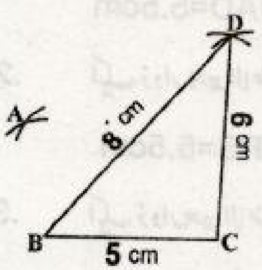
حل: سب سے پہلے ہم ذواربعتہ الاضلاع ABCD کا کچا خاکہ بنا لیں گے جس میں دونوں AC اور BD بھی درج کریں گے۔ کچے خاکہ بھی بھی پیائشوں کو درج کر دینگے۔ کچے خاکہ کو دیکھنے سے پتہ چلتا ہے کہ ہمیں سب سے پہلے مثلث BCD کی تشکیل کرنی ہوگی۔ پھر مثلث ABD کی تشکیل کی جائیگی اسطرح ہمیں ذواربعتہ الاضلاع کے لئے مطلوبہ چار بے مثل نقطے حاصل ہوجائیں گے آیئے مرحلہ وار تشکیل کریں۔

تشکیل کے مرحلے



1. ضلع ضلع ضلع (S.S.S) شرط کا استعمال کرتے ہوئے مثلث BCD بنایئے۔ سب سے پہلے BC=5cm کا قطعہ خط کھینچئے۔ پھر B اور C کو مرکز مانتے ہوئے بالترتیب BD=8cm اور CD=6cm کے نصف قطر کا قوس اس طرح کھینچئے کہ دونوں قوس ایک دوسرے کو کاٹیں۔ اسطرح ہمیں B اور C کے علاوہ تیسرا نقطہ D بھی حاصل ہوگا۔ B اور C کو D سے ملایئے۔

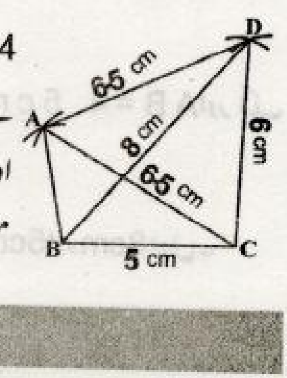




2. D کو مرکز مان کر DA=6.5 کا ایک قوس کھینچے گے نقطہ A اسی قوس پر کہیں واقع ہوگا۔

3. پھر C کو مرکز مان کر AC=6.5cm نصف قطر کا ایک قوس کھینچے گے نقطہ A اسی قوس پر کہیں واقع ہوگا۔

4. چونکہ نقطہ A اوپر کے دونوں قوسوں پر واقع ہے یعنی نقطہ A دونوں قوسوں کا نقطہ تقاطع پر واقع ہوگا۔ نقطہ تقاطع پر A درج کرینگے۔ اور اُسے B اور D سے ملائیں گے۔ اسطرح حاصل ذواربعتہ الاضلاع ABCD ایک مطلوبہ ذواربعتہ الاضلاع ہے



خود کر کے دیکھئے

☆ اوپر کی بناوٹ میں ذوار بعۃ الاضلاع بنانے کے لئے آپ نے کن دو مثلثوں کی تشکیل کی اور ہر ایک کے لئے کون سا اصول اپنایا۔

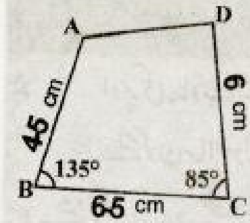
سوچئے، کر کے دیکھئے اور اپنے دوستوں سے چرچا کیجئے کہ۔

1. کیا ہم پہلے وتر BD کھینچ کر اُسکے بعد ذوار بعۃ الاضلاع کی تشکیل کے لئے مطلوبہ دو دوسرے نقطے A اور C معلوم کر سکتے ہیں؟
2. کیا ACD مثلث پہلے کھینچ کر پھر مطلوبہ ذوار بعۃ الاضلاع ABCD حاصل کر سکتے ہیں۔
3. کیا ہم ضلع AD پہلے کھینچ کر ذوار بعۃ الاضلاع کے لئے پہلا دو نقطہ حاصل کرتے ہوئے باقی دو نقطے اور حاصل کر سکتے ہیں۔
4. اوپر حاصل شدہ جانکاری کے بنیاد پر کیا آپ 4.5cm ضلع اور 5cm اور 6cm وتر والا ایک شکل معین کھینچ سکتے ہیں؟

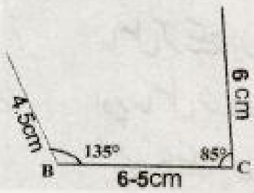
سوالنامہ 7.2

1. ایک ذوار بعۃ الاضلاع ABCD کی تشکیل کیجئے، جس میں CD=5cm, BC=4.5cm, AD=5.5cm اور AC=5.5cm اور BD=7cm ہو۔
2. ایک ذوار بعۃ الاضلاع PQRS کی تشکیل کیجئے جس میں RS=5cm, QR=4.5cm, PS=5.5cm اور ایک وتر PR=5.5cm اور دوسرا وتر QS=7cm ہو۔
3. ایک ذوار بعۃ الاضلاع PQRS کی تشکیل کیجئے جس میں PQ=6cm، QR=7.5cm، RS=6cm، ایک وتر PS=7.5cm اور دوسرا وتر PR=8cm ہو۔
4. ایک ذوار بعۃ الاضلاع ABCD کی تشکیل کیجئے جس میں AB = 4.5 cm اور ایک وتر AC=7cm اور دوسرا وتر BD=8cm ہو۔
5. ایک شکل معین PQRS بنائیے جس میں PQ=6cm اور وتر بالترتیب 5cm اور 8cm ہوں۔

7.2.3 ذوار بعۃ الاضلاع کی تشکیل کرنا جب تین اضلاع اور ان اضلاع سے بنے زاویے کی ناپ دی ہوئی ہو

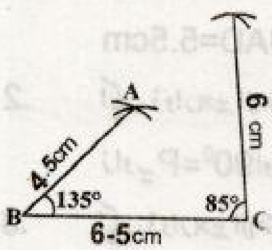


مثال 3- ایک ذوار بعۃ الاضلاع ABCD بنائیے جس میں AB=4.5cm ، CD=6cm,BC=6.5cm اور اُنکے ذریعہ بنے زاویے $\angle B=135^0$ اور $\angle C=85^0$ ہیں۔

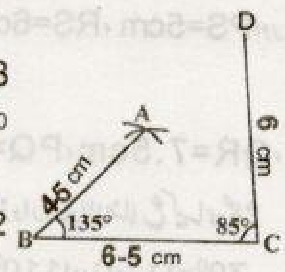


حل: سب سے پہلے ہم ذوار بعۃ الاضلاع ABCD کا کچا خاکہ بنالیں گے جس میں دونوں زاویوں کو بھی درج کرینگے۔ کچے خاکہ پر سبھی پیمائشوں کو درج کردیں گے۔ کچے خاکہ کو دیکھنے سے پتہ چلتا ہے کہ ہمیں BC ضلع کھینچنے کے بعد اُس پر زاویہ B اور زاویہ C کی بناوٹ کرنی ہوگی۔ پھر زاویہ بنانے والے اضلاع پر دی گئی لمبائی کا قوس کھینچتے ہوئے ذوار بعۃ الاضلاع کی تشکیل کے لئے مطلوبہ دوسرے دو نقطے حاصل کرنے ہوں گے۔ آیئے اب مرحلہ وار بناوٹ کریں۔

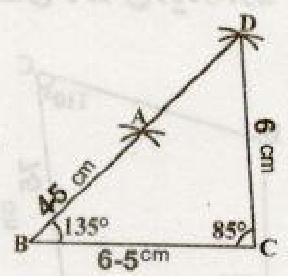
بناوٹ کے مرحلے:



1. سب سے پہلے BC=6.5cm لمبائی کا ایک قطعہ خط کھینچئے۔ پھر B اور C کو مرکز مانتے ہوئے بالترتیب 135^0 اور 85^0 کا زاویہ بنایئے۔



2. B کو مرکز مان BA=4.5cm نصف قطر کا ایک قوس کھینچیں گے جو 135^0 کا زاویہ بنانے والے خط کو جس نقطہ پر کاٹے گا وہ A نقطہ ہوگا۔



3. C کو مرکز مان کر CD=6cm نصف قطر کا ایک قوس کھینچیں گے جو 85^0 کا زاویہ بنانے والے خط کو جس نقطہ پر کاٹے گا وہ D نقطہ ہوگا۔

4. نقطہ D اور A کو ملایئے۔ اس طرح حاصل ذوار بعۃ الاضلاع ABCD مطلوبہ ذوار بعۃ الاضلاع ہے۔

خود کر کے دیکھیے

☆ اوپر کی بناوٹ میں ذو اربعۃ الاضلاع بنانے کے لئے آپ نے کن دو مثلثوں کی تشکیل کی اور ہر ایک کے لئے کون سا اصول اپنایا۔

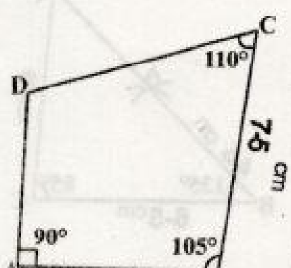
سوچئے، کر کے دیکھئے اور اپنے دوستوں سے گفتگو کیجئے کہ۔

1. کیا ہم AB ضلع کو پہلے کھینچ کر ذو اربعۃ الاضلاع کے لئے پہلا دو نقطہ حاصل کرتے ہوئے باقی دو نقطے اور حاصل کر سکتے ہیں۔
2. اوپر حاصل شدہ جانکاری کی بنیاد پر کیا آپ 4.5cm ضلع اور 135^0 و 45^0 متصلہ زاویے والا ایک شکل معین بنا سکتے ہیں۔

سوالنامہ 7.3

1. ایک ذو اربعۃ الاضلاع ABCD کی تشکیل کیجئے جس میں BC=4.5cm، CD=5cm، AD=5.5cm اور زاویہ $C=120^0$ اور زاویہ $D=90^0$ ہو۔
2. ایک ذو اربعۃ الاضلاع PQRS بنائیے جس میں PQ=5cm، RS=6cm، PS=5cm اور زاویہ $P=90^0$ اور زاویہ $S=135^0$ ہو۔
3. ایک ذو اربعۃ الاضلاع PQRS کی بناوٹ کیجئے جس میں PQ=6cm، QR=7.5cm، RS=6cm اور زاویہ $P=120^0$ اور زاویہ $Q=60^0$ ہو۔ اس طرح بنا ذو اربعۃ الاضلاع کیسا ہوگا؟
4. ایک شکل معین ABCD بنائیے جس میں AB=7.5cm اور زاویہ $C=110^0$ اور زاویہ $D=70^0$

7.2.4: ذو اربعۃ الاضلاع کی تشکیل کرنا جب تین زاویے اور اُن کے بیچ کا دو ضلع دیا ہوا ہو۔



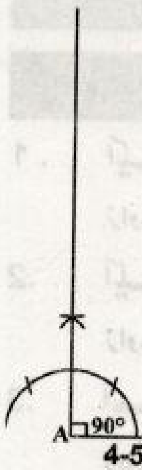
مثال 4: ایک ذو اربعۃ الاضلاع ABCD کی تشکیل کیجئے جس میں زاویہ A=90، زاویہ $B=105^0$، زاویہ $c=110^0$ اور بیچ کا ضلع AB=4.5cm، BC=7.5cm۔

حل: سب سے پہلے ہم ذو اربعۃ الاضلاع ABCD کا ایک کچا خاکہ بنا لیں گے جس میں تینوں زاویوں A، B اور C کو بھی درج کریں گے۔ کچے خاکہ پر بھی پیمائشوں کو درج کر دیں گے۔ کچے خاکہ کو دیکھنے سے پتہ چلتا ہے کہ ہمیں

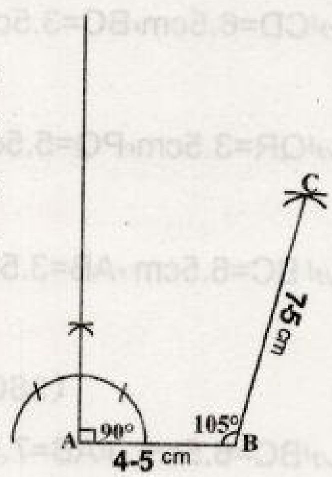
AB ضلع کھینچنے کے بعد اُس پر زاویہ A اور زاویہ B کی بناوٹ کرنی ہوگی پھر زاویہ بنانے والے اضلاع پر BC ضلع کی دی گئی لمبائی کا قوس کھینچتے ہوئے ذوا ربعۃ الاضلاع کی تشکیل کے لئے مطلوبہ تیسرا نقطہ حاصل کرنا ہوگا۔ پھر تیسرے نقطہ C پر زاویہ C کی بناوٹ کرنی ہوگی اور زاویہ بنانے والا ضلع زاویہ A کے ضلع سے جہاں ملے گا وہی ذوا ربعۃ الاضلاع کی تشکیل کے لئے مطلوبہ چوتھا نقطہ ہوگا۔ آیئے اب مرحلہ وار بناوٹ کریں۔

بناوٹ کے مرحلے:

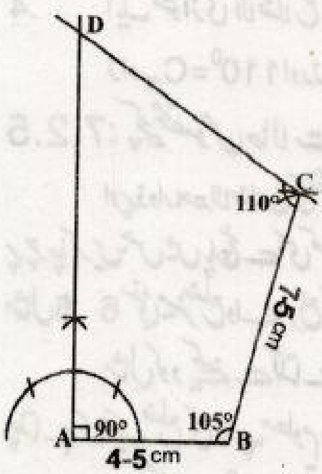
1. سب سے پہلے AB=4.5cm لمبائی کا ایک قطعہ خط کھینچئے پھر A اور B کو مرکز مانتے ہوئے A اور B پر بالترتیب 90^0 اور 105^0 کا زاویہ بنایئے۔



2. B کو مرکز مان کر BC=7.5cm نصف قطر کا ایک قوس کھینچیں گے جو 105^0 کا زاویہ بنانے والے خط کو جس نقطہ پر کاٹے گا وہ C نقطہ ہوگا۔



3. C کو مرکز مان کر 110^0 کا زاویہ بنائیں گے جو زاویہ A بنانے والے خط کو جس نقطہ پر کاٹے گا وہ D نقطہ ہوگا۔ اس طرح حاصل ذوا ربعۃ الاضلاع ABCD ایک مطلوبہ ذوا ربعۃ الاضلاع ہے۔



کوشش کیجئے:

اوپر کی بناوٹ میں ذوا ربعۃ الاضلاع بنانے کے لئے آپ نے کن دو مثلثوں کی تشکیل کی اور ہر ایک کے لئے کون سا اصول اپنایا۔

ذرا سوچئے

سوچئے اور اپنے دوستوں سے چرچا کیجئے کہ:

1. کیا ہم BC ضلع کو پہلے کھینچ کر ذو اربعۃ الاضلاع کے لئے پہلا دو نقطہ حاصل کرتے ہوئے باقی دو نقطے اور اور حاصل کر سکتے ہیں۔
2. اوپر حاصل جانکاری کی بنیاد پر کیا آپ 6.5cm اور 7.5cm ضلع اور ایک زاویہ 135^0 والا ایک متوازی الاضلاع بنا سکتے ہیں؟

سوالنامہ 7.4

1. ایک ذو اربعۃ الاضلاع ABCD کی تشکیل کیجئے جس میں BC=3.5cm، CD=6.5cm اور زاویہ B=75^0، زاویہ C=105^0 اور زاویہ D=120^0 ہو۔
2. ایک ذو اربعۃ الاضلاع PQRS کی بناوٹ کیجئے جس میں PQ=5.5cm، QR=3.5cm اور زاویہ P=90^0، زاویہ Q=105^0 اور زاویہ R=90^0 ہو۔
3. ایک ذو اربعۃ الاضلاع ABCD کی تشکیل کیجئے جس میں AB=3.5cm، BC=6.5cm اور زاویہ A=60^0، زاویہ B=105^0 اور زاویہ D=75^0 ہو۔

   (زاویہ C=360^0-60^0-105^0-75^0)
4. ایک متوازی الاضلاع ABCD کی تشکیل کیجئے جس میں AB=7.5cm اور BC=6.5cm اور زاویہ C=110^0 اور زاویہ D=70^0 ہو۔

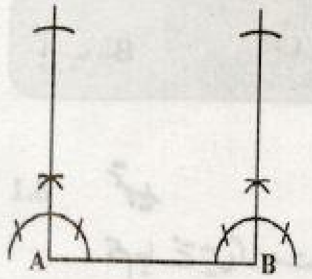
7.2.5: کچھ مخصوص حالات میں ذو اربعۃ الاضلاع کی تشکیل:

اوپر ذو اربعۃ الاضلاع کی تشکیل کے لئے ہم نے پانچ پیمائشوں کا استعمال کیا ہے۔ آیئے اب ہم اُن مخصوص حالات پر چرچا کریں جس میں پانچ سے بھی کم پیمائش کی جانکاری رکھتے ہوئے بھی ذو اربعۃ الاضلاع کی بناوٹ کر سکتے ہیں۔

مثال 5: 6 سنٹی میٹر ضلع والے مربع کی تشکیل کیجئے۔

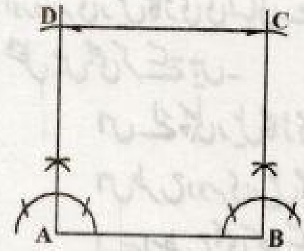
مثال کو دیکھنے سے لگتا ہے کہ اس میں ایک ہی ناپ دیا ہے۔ لیکن ہمیں مربع کی خاصیت کو یاد کرنے پر پتہ چلتا ہے کہ ایک ضلع کی ناپ معلوم رہنے پر چاروں ضلع کی لمبائی معلوم ہو جاتی ہے اور ہمیں یہ بھی پتا ہے کہ مربع کے چاروں زاویوں کی ناپ 90^0 ہوتی ہے۔ آیئے مربع کی تشکیل کریں۔

مرحلہ 1: 6 سنٹی میٹر لمبائی کا قطعہ خط کھینچتے ہیں اور اس ضلع کا کوئی بھی نام دے سکتے ہیں۔ اس طرح ہمیں مربع کی بناوٹ کے لئے پہلا دو نقطہ حاصل ہو جاتا ہے۔



مرحلہ 2: کھینچے گئے قطعہ خط پر واقع دونوں نقطوں پر ہم 90^0 کا زاویہ بناتے ہیں۔ زاویے بنانے والے اِن میں دو خطوں پر مربع کی تشکیل کے لئے مطلوبہ تیسرا اور چوتھا نقطہ حاصل ہوگا۔

مرحلہ 3: اب A اور B کو مرکز مانتے ہوئے 6 سنٹی میٹر کا ایک۔ایک قوس کھینچتے ہیں۔قوس کو بالترتیب C اور D نقطہ کا نام دیتے ہیں۔ پھر C اور D نقطوں کو اسکیل کی مدد سے ملاتے ہیں۔اس طرح ہمیں مطلوبہ مربع ABCD حاصل ہوتا ہے۔



اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ کچھ مخصوص پیمائش والے ذواربعتہ الاضلاعوں جیسے مربع ، مستطیل، شکل معین اور متوازی الاضلاع وغیرہ کی تشکیل پانچ سے کم پیمائش معلوم رہنے کے باوجود بھی کر سکتے ہیں۔ بناوٹ میں پانچ سے کم دیئے گئے پیائشوں کی بنیاد پر اُن کے کچھ خاصتیوں کی وجہ سے بناوٹ کے لئے دوسری پیائشیں ہمیں خود ہی حاصل ہوجاتی ہیں۔

خود کر کے دیکھئے

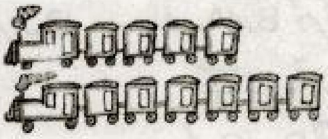
1. سوچئے کیا آپ ایک مستطیل کی بناوٹ صرف اُس کی لمبائی اور چوڑائی معلوم رہنے پر کر سکتے ہیں۔اگر ہاں تو اور کون کون سی ناپ آپ کو بناوٹ سے پہلے پتا لگائیں گے۔
2. اگر آپ کو ایک شکل معین کی تشکیل کرنی ہے اور آپ کو دو وتروں کی لمبائی معلوم ہے۔ بناوٹ کے لئے آپ شکل معین کے کس خاصیت کو استعمال کریں گے اور کیوں کریں گے۔

سوالنامہ۔7.5

1. ایک مربع ABCD بنائیے جس میں BC=3.5cm ہے۔
2. ایک مستطیل PQRS کی تشکیل کیجئے جس میں PQ=7.5cm، QR=5.5cm ہو۔
3. ایک شکل معین ABCD بنائیے جس میں AB=3.5cm اور زاویہ A و= 60^0 ہو۔
4. ایک متوازی الاضلاع ABCD کی تشکیل کیجئے جس میں AB=6.5cm اور BC=5.5cm اور زاویہ C= 110^0 ہو۔

باب-8 مقداروں کا موازنہ (Comparison Of Quantities)

8.1 تمہید



ہم جانتے ہیں کہ نسبت (Rotio) کا مطلب ہے دو مقداروں کا موازنہ کرنا

مان لیجئے دو ریل گاڑیاں ہیں جن کی لمبائی بالترتیب 80 میٹر اور 160 میٹر ہے تو پہلی ریل گاڑی کی لمبائی اور دوسری ریل گاڑی کی لمبائی سے نسبت 80:160 ہے یہ موازنہ کسروں کی مدد سے $\frac{80}{160}=\frac{1}{2}$ یا $1:2$ کی شکل میں بھی کر سکتے ہیں۔

اس لئے پہلی ریل گاڑی کی لمبائی دوسری کی آدھی ہے

اس طرح دوسری ریل گاڑی کی لمبائی پہلی کی کتنا گُنا ہوگی؟

اسے اسطرح بھی سمجھ سکتے ہیں کہ

پہلی ریل گاڑی کی لمبائی: دوسری ریل گاڑی کی لمبائی
$160 : 80$
$2:1$ اسلئے $\frac{160}{80}=\frac{2}{1}$ یا

اس لئے دوسری ریل گاڑی کی لمبائی پہلی ریل گاڑی کی دوگنی ہے۔

آپ سوچئے کہ $a:b$ اور $b:a$ کن حالت میں یکساں ہونگے؟

یہاں پر ہم دیکھتے ہیں کہ 1:2 اور 2:1 دونوں یکساں نسبت نہیں ہے۔

اُسی طرح $a:b$ اور $b:a$ دو نسبتیں ہیں کیونکہ $\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$

یہ موازنہ ہم فیصد کے استعمال سے بھی کر سکتے ہیں۔

$$\frac{\text{پہلی ریل گاڑی کی لمبائی}}{\text{دوسری ریل گاڑی کی لمبائی}} \quad \frac{80}{160}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{50}{50}=\frac{50}{100}=50\%$$

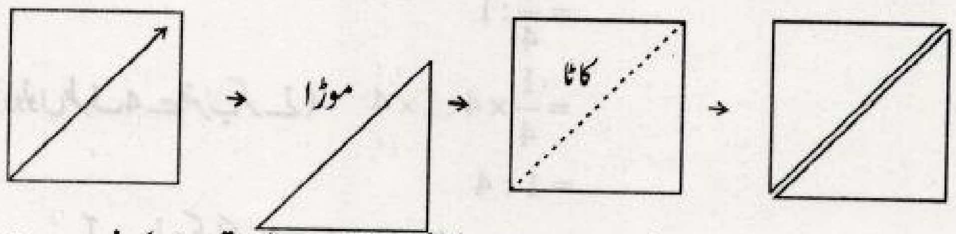
(نسب نما کو 100 بنایا گیا ہے)

پہلی ریل گاڑی کی لمبائی دوسری کی 50٪ ہے۔

عملی تجربہ

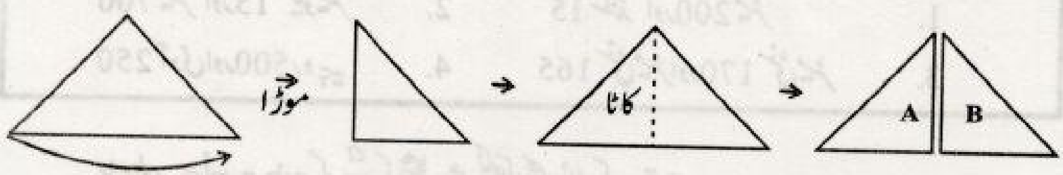
آؤ ببلو اور نیہا کی نسبت کے سوالوں کو حل کرنے میں مدد کریں۔

ببلو نے ایک مربع نما کاغذ لیا اور اس کے ایک کونے کو دوسری طرف کے کونے سے ملایا اور پھر موڑ کر کاٹ دیا۔



آپ بتائے اسطرح بنے ایک مثلث اور شروع میں لئے گئے مربع نما کاغذ کے رقبوں میں کیا نسبت ہے؟

اب نیہا نے اوپر کٹے ہوئے ایک مثلث کو لیکر نیچے دیئے گئے تصویر کے مطابق کاٹا اور بنے مثلثوں پر A اور B درج کیا۔



اس طرح بنے مثلث A کے رقبہ اور ابتدائی مثلث کے رقبہ میں کیا نسبت ہوگی؟

ببلو نے A اور B میں سے ایک مثلث کو لیکر اس طرح موڑا

کیا آپ C اور D کے رقبوں کے بیچ نسبت بتا سکتے ہیں۔

 اس تصویر میں تو لگ رہا ہے کہ C جیسی تین مثلث نما بناوٹ D میں ہے؟ سوچئے کیا یہ صحیح ہے؟

اپنے نسبتوں کو جانچنے کیلئے آپ مربع نما کاغذ لیکر اس عمل کو کر کے دیکھ سکتے ہیں۔

حالت-1 A کا C سے موازنہ کرنے پر

C, A کا 4 گُنا ہے اسلئے A:C =1: 4

حالت-2 C کا A سے موازنہ کرنے پر

A ,C کا چوتھائی $\left(\frac{1}{4}\right)$ ہے اس لئے C : A

$$= \frac{1}{4} : 1$$

$$= \frac{1}{4} \times 4 : 1 \times 4$$ (دونوں طرف 4 سے ضرب کرنے)

$$= 1 : 4$$

آپ نے دیکھا کہ A : C ≠ C : A

خود کر کے دیکھیے

نیچے کچھ مقداروں کے مثال دیئے گئے ہیں۔ بتائے اُن میں سے کن کن مقدار کی نسبت آپ نکال سکتے ہیں؟۔

1.	15 سکنڈ اور 200 میٹر	2.	700 میٹر اور 15 کیلومیٹر
3.	165 سنٹی میٹر اور 170 سنٹی میٹر	4.	250 آدمی اور 500 روپیہ

عام طور سے نسبت a:b کو $\frac{a}{b}$ کی شکل میں لکھکر بھی ظاہر کرتے ہیں۔

نسبت کے اس شکل کا استعمال آپ نے درنکالتے وقت بھی کیا تھا۔

مثال-1. 15 قلم کی قیمت 120 روپیہ ہے تو 24 قلموں کی قیمت کتنی ہوگی؟

حل: ہم جانتے ہیں کہ

15 قلموں کی قیمت ہے = 120 روپیہ

تب 1 قلم کی قیمت ہوگی = $\frac{120}{15}$ روپیہ فی قلم

اسے اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں 8 روپیہ فی قلم

در نسبت کی وہ شکل ہے جس میں غیر یکساں مقداروں کا موازنہ کیا جاتا ہے۔

اب ایک قلم کی قیمت کے ذریعہ ہم 24 قلموں کی قیمت آسانی سے نکال سکتے ہیں۔

$8 \times 24 = 192$ روپیہ

مثال-2 پروین کسی امتحان میں 294 نمبر حاصل کرتی ہے اور اس کی دوست گیتا اُسی امتحان میں 372 نمبر لاتی ہے۔ اگر پروین کو امتحان میں 49 فیصد نمبر حاصل ہوتا ہے تو مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دیجئے۔

(الف) امتحان میں پروین کے نمبروں اور اُسکی سہیلی گیتا کے نمبروں کی نسبت

(ب) گیتا کو حاصل ہوئے نمبروں کی فیصد میں قیمت

(ج) کس کے نمبر فیصد میں زیادہ ہیں اور کتنے زیادہ ہیں۔

حل: (الف) پروین کے ذریعہ امتحان میں حاصل نمبر کا گیتا کے ذریعہ حاصل نمبروں سے نسبت

$$= 294 : 372 = \frac{294}{372} = \frac{294 \div 6}{372 \div 6} = \frac{40}{62}$$

(نسبت کی مختصر شکل اعداد کا H.C.F نکال کر)

$\frac{49}{62}$ کو $49 : 62$ کی شکل میں لکھا جاتا ہے اور 62 کے مقابلے میں 49 کا پڑھا جاتا ہے۔

(ب) سب سے پہلے ہم امتحان کے کل نمبرات کا پتہ لگائیں گے۔

مان لیجئے امتحان کا کل نمبر x ہے

دیا گیا ہے۔ پروین کو امتحان میں 49 فیصد نمبر ملے

اسلئے x کا $49\% = 294$

یا $$x \times \frac{49}{100} = 294$$

یا $$x \times 49 = 294 \times 100$$

یا $$x = \frac{294 \times 100}{49} = 600$$

اسلئے امتحان کا کل نمبر=600

طریقہ وحدانی کے ذریعہ

49% نمبر برابر ہے=249

تو 1% نمبر برابر ہوگا $6 = \frac{294}{49}$

1% = 6 نمبر

اس لئے امتحان کے 100% نمبر ہوں گے = $6 \times 100 = 1\% \times 100$

$600 = 100\%$

چونکہ گیتا 600 نمبروں میں 372 نمبر لاتی ہے۔

گیتا کے ذریعہ حاصل شدہ نمبر فیصد میں = $\frac{372 \times 100}{600} = 62\%$ حاصل کرتی ہے۔

گیتا کے ذریعہ فیصد میں حاصل نمبر = 62%

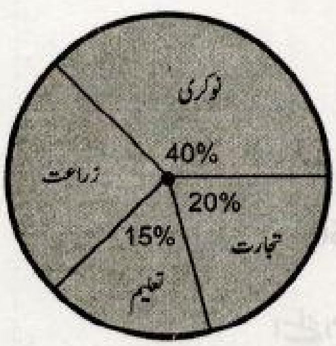
گیتا نے امتحان میں 62% نمبر لایا ہے۔ جبکہ پروین 49% نمبر لائی ہے۔

گیتا کے ذریعہ فیصد میں حاصل زیادہ نمبر = $62\% - 49\% = 13\%$

اس لئے گیتا نے پروین سے 13% زیادہ نمبر حاصل کئے ہیں۔

خود کر کے دیکھئے۔

کسی گاؤں میں رہنے والے 150 نوجوانوں میں سے 49% نوجوان نوکری میں 20% کاروبار میں 15% تعلیم کے حصول میں اور باقی کاشتکاری کے کام میں لگے ہیں تو بتائیے۔



(الف) کتنے فیصد نوجوانوں کا شتکاری کے کام میں لگے ہیں۔

(ب) نوکری کرنے والے نوجوانوں اور تعلیم حاصل کرنے والے نوجوانوں میں کیا نسبت ہے۔

(ج) کس کام میں سب سے زیادہ نوجوان اور کس کام میں سب سے کم نوجوان لگے ہیں؟

سوالنامہ-8.1

1۔ مختصر نسبت معلوم کیجئے۔

(الف) 14 میٹر کا 7 میٹر 35 سنٹی میٹر سے

(ب) 3 روپیہ کا 80 پیسے سے

(ج) 150 کیلوگرام کا 210 کیلوگرام سے

(د) 2 گھنٹے کا 50 منٹ سے۔

2۔ مندرجہ ذیل نسبتوں کو فیصد کی شکل میں تبدیل کیجئے۔

(الف) 3 : 25 (ب) 16 : 25 (ج) 3 : 16

3۔ 60 طالب علموں میں سے 40 فیصد طالب علموں کو سائنس کا مضمون دلچسپ لگتا ہے۔ تو ان طالب علموں کی تعداد بتائیے جنھیں سائنس کے مضمون میں کم دلچسپی ہے۔

4۔ کسی امتحان میں کامیاب ہونے کیلئے طالب علم کو کل نمبر کا 33 فیصد نمبر حاصل کرنا ہے۔ اسے 225 نمبر ملے جو کہ 33 فیصد سے 6 نمبر کم تھے۔ بتائیے امتحان کل کتنے نمبروں کا تھا۔

5۔ رحیم اپنا مقام رہائش 8 بجے صبح چھوڑ دیتا ہے اور اُسی دن شام 4 بجے اپنے گھر لوٹ آتا ہے۔ تو 24 گھنٹے کا کتنا فیصد وہ اپنے رہائش کے مقام پر گذارتا ہے؟

6۔ پہلا عدد دوسرے عدد سے 20% زیادہ ہے تو دوسرا عدد پہلے عدد سے کتنے فیصد کم ہے۔

8.2 فیصد کے مختلف استعمال

گاہکوں کو متوجہ کرنے کے لئے یا سامان کی فروخت میں اضافہ کرنے کیلئے دوکاندار کے ذریعہ کچھ چھوٹ (بٹا) دیا جاتا ہے۔ جس میں ہم فیصد کا استعمال کرتے ہیں کسی ادارے یا بینک کے ذریعہ بچت یا جمع کی گئی رقم پر نفع یا سود مفرد یا سود مرکب کا حساب کرنے میں بھی ہم فیصد کا استعمال کرتے ہیں۔

مثال-3 روی نے ایک پُرانا ٹیلی ویژن 3000 روپیہ میں خریدا اُس نے 700 روپیہ اُسکی مرمت پر 50 روپیہ ٹیمپو کرایہ پر خرچ کرکے اسے اپنی دکان پر لایا اور گاہک کو 4500 روپیہ میں بیچ دیا۔ اس کا فائدہ یا نقصان فیصد میں معلوم کیجئے۔

کبھی کبھی جب ایک سامان خرید اجاتا ہے تو خرید تے وقت یا فروخت کرنے سے پہلے کچھ زائد رقم بھی خرچ کی جاتی ہے۔ یہ خرچ جیسے مرمت پر مزدوری پر، ڈھلائی پر خرچ کی گئی رقم وغیرہ ہوسکتی ہے۔ یہ بھی ہونے والے خرچ اوپری خرچ (over head) ہیں اوپری خرچ جوڑ کر کسی سامان کی قیمت خرید امعلوم کی جاتی ہے۔

حل:- ٹیلی ویژن کی قیمت خرید(CP) = قیمت + اوپری خرچ

= 3000 + (700روپیہ +50روپیہ)

=(3000 + 750) روپیہ

= 3750روپیہ

قیمت فروخت = 4500روپیہ

چونکہ قیمت فروخت زیادہ ہے قیمت خرید سے

اس لئے نفع = Rs. 4500 – Rs. 3750

= Rs. 750

اس طرح اُسے 3750 روپیہ پر اُسے 750 روپیہ کا نفع ہوا۔

اگر قیمت خرید 1 ہوتا تب نفع ہوتا۔ $\frac{750}{3750}$ روپیہ

اس لئے 100 روپیہ پر نفع = $\frac{750}{3750} \times 100 = 20\%$

خود کر کے دیکھئے
1۔ نیرج نے ایک ریفریجیٹر 9000 روپیہ میں خریدا کچھ وقت استعمال کر کے اس کے رکھ رکھاؤ/مرمت پر 500 روپیہ خرچ کر کے نیرج نے اُسے 9000 روپیہ میں بیچ دیا اُسکا نفع/نقصان بتائے
2۔ اوپر کے سوال سے نقصان فیصد کے لئے فارمولہ بنائیے۔

مثال۔4 امیت دو کُرسیاں 550 روپیہ فی کرسی کی در سے فروخت کرتا ہے۔ اس میں سے ایک پر 10% کا نفع اور دوسرے پر 20% کا نقصان ہوتا ہے۔ کل نفع یا نقصان معلوم کیجئے۔ ہر ایک کرسی کی قیمت خرید بھی معلوم کیجئے۔

حل:- دیا گیا ہے ایک کرسی 10% نفع سے فروخت کی جاتی ہے۔ اسکا مطلب ہے کہ اگر قیمت خرید 100 روپیہ ہے تو قیمت فروخت 110 روپیہ ہے۔

طریقہ وحدانی کا استعمال کرنے پر

جب110 روپیہ قیمت فروخت ہے تو قیمت خرید=100 روپیہ ہے۔

جب 1 روپیہ قیمت فروخت ہو تو قیمت خرید $\frac{100}{110}$ روپیہ

جب550 روپیہ قیمت فروخت ہے تو قیمت خرید $\frac{100}{110} \times 550$ روپیہ

$= 500$ روپیہ ہوگا

دوسری کُرسی کو20 فیصد نقصان سے فروخت کیا جاتا ہے۔ اس کا مطلب ہے۔

اگر قیمت خرید100 روپیہ ہے تو قیمت فروخت80 روپیہ ہے۔

جب قیمت فروخت80 روپیہ سے تو قیمت خرید=100 روپیہ ہے۔

اس لئے جب قیمت فروخت550 روپیہ ہے تو قیمت خرید= $\left(\frac{100}{80} \times 550\right)$

$= 687.00$ روپیہ ہوگا

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ کل ملا کر نفع ہوا یا نقصان؟

یہ جاننے کیلئے ہمیں مجموعی شکل میں قیمت خرید اور قیمت فروخت معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

کل قیمت خرید= $(500 + 687.50)$ روپیہ= 1187.50 روپیہ

کل قیمت فروخت = 550 روپیہ + 550 روپیہ = 1100 روپیہ

چونکہ کل قیمت خرید بڑا ہے کل قیمت فروخت سے

اس لئے $(1187.50 - 1100)$ روپیہ یعنی 87.50 روپیہ کا نقصان ہو

اس طرح 1187.50 قیمت خرید پر نقصان ہوا= 87.50

اب فیصد نقصان آپ نکالئے۔

8.3 بٹہ یا چھوٹ (Discount) معلوم کرنا

دُکاندار کے ذریعہ جس قیمت پر کوئی چیز خریدی جاتی ہے وہ اس کے لئے قیمت خرید اور جس پر فروخت کی جاتی ہے وہ قیمت فروخت کہلاتی ہے۔ کئی بار دُکاندار چیزوں پر قیمت درج کر دیتے ہیں اور گاہکوں کو متوجہ کرنے کیلئے اُس درج قیمت (Mark Price) پر چھوٹ دیتے ہیں جس سے سامان کی بکری میں اضافہ ہو۔

مثال کے لئے ایک دُکاندار ایک کمپیوٹر15000 روپیہ میں خریدتا ہے اور3000 روپیہ بڑھا کر (15000 + 3000) = 18000 روپیہ اس کمپیوٹر کی درج قیمت رکھتا ہے۔ گاہکوں کے لئے وہ کمپیوٹر کے درج قیمت پر2000 روپئے کی چھوٹ دیتا ہے۔

اس لئے کمپیوٹر کل درج قیمت18000 روپیہ ہے۔

جب دُکاندار اپنی چیز کو درج قیمت سے کم قیمت پر بیچتا ہے تو درج قیمت اور قیمت فروخت کے فرق کو بٹہ یا چھوٹ کہا جاتا ہے۔ اسلئے

قیمت فروخت-درج قیمت= بٹایا چھوٹ

آج کل بازاروں میں Discount sale کی دُکانیں لگی رہتی ہیں۔ یاد رہے بٹہ (Discount) ہمیشہ درج قیمت پر ہی دیا جاتا ہے۔

مثال-5 ایک شرٹ کی درج قیمت450 روپیہ ہے اور دُکاندار اُسے300 روپیہ میں بیچ دیتا ہے۔ بتایئے اس شرٹ پر چھوٹ اور فیصد چھوٹ کتنا ہے؟

حل: قیمت فروخت۔درج قیمت=بٹہ

=450روپیہ-300روپیہ

= 150 روپیہ

چونکہ بٹہ یا چھوٹ درج قیمت پر ہے اسلئے ہمیں درج قیمت کو بنیاد ماننا پڑے گا

چونکہ450 روپیہ درج قیمت پر150 روپیہ چھوٹ ہے۔

اسلئے 1 روپیہ درج قیمت پر $\frac{150}{450}$ روپیہ چھوٹ ہے

اس لئے100 روپیہ درج قیمت پر چھوٹ ہوگا۔

$$\frac{150}{450} \times 100 = 33\frac{1}{3}\%$$ =چھوٹ

اگر چھوٹ فیصد دیا ہوا ہے تو آپ چھوٹ بھی معلوم کرسکتے ہیں۔

مثال-6 ایک صوفہ کی درج قیمت16,000 روپیہ ہے۔ سیل میں %25 بٹے کا اعلان کیا جاتا ہے۔ اس صوفہ پر بٹے کی رقم کیا ہے۔ اور اس کی قیمت فروخت کیا ہے؟

حل: دیا ہوا ہے درج قیمت=16,000 روپیہ

25 فیصد بٹے کا مطلب ہے 100 روپیہ قیمت پر 25 روپیہ بٹہ ہے۔

اسلئے جب درج قیمت 16000 روپیہ ہے تو بٹہ = $\left(\frac{25}{100} \times 16000\right)$ روپیہ = 4000

اس لئے صوفہ پر بٹہ (Discount) کی رقم = 4000 روپیہ ہے

صوفہ کی قیمت فروخت = (16000-4000) روپیہ

= 12000 روپیہ

خود کر کے دیکھئے

1۔ ایک دُکاندار اپنے سبھی سامانوں پر 30 فیصد چھوٹ دیتا ہے۔ مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کی قیمت فروخت کیا ہوگی؟

(الف) 220 روپیہ درج قیمت والی ایک پوشاک

(ب) 1250 روپیہ درج قیمت والا ایک جوڑا جوتا

(ج) 650 روپیہ درج قیمت والا ایک بیگ

2۔ ایک اسکوٹر 8 فیصد بٹے پر 27,600 روپئے میں بیچی جاتی ہے۔ اسکوٹر کی درج قیمت بتائیے۔

8.4 سیل ٹیکس/ Value Added (VAT) ویٹ

سیل ٹیکس سرکار کے ذریعہ وصولا جاتا ہے۔ یہ ٹیکس کسی چیز کی خرید پر دُکاندار کے ذریعہ لیا جاتا ہے۔ اور سرکار کو دیا جاتا ہے۔ یہ ہمیشہ چیز کی قیمت فروخت پر لگتا ہے۔ آج کل چیز کی قیمت میں ٹیکس Value Added Tax کے نام سے جوڑا جاتا ہے۔

مثال۔ 7. ایک سائیکل کی قیمت 2200 روپیہ اور سائیکل کے پپ کی قیمت 300 روپیہ ہے۔ بتائے کشور کو سیل ٹیکس کے ساتھ کتنی ادائیگی سائیکل اور سائیکل پمپ کیلئے کرنی ہوگی جبکہ سیل ٹیکس کی در 5% ہے۔

حل: سائیکل کی قیمت = 2200 روپے

سائیکل پمپ کی قیمت = 300 روپے

دونوں کی قیمت = (300+2200) روپے

= 2500 روپے

دونوں پر یکساں VAT ہے اسلئے قیمتوں کو جوڑا گیا ہے۔
سیل ٹیکس = 5 فیصد
کل سیل ٹیکس = $\frac{5}{100} \times 2500 = 125$ روپیہ
کل ادائیگی = (125 + 2500) روپیہ
= 2625 روپیہ

مثال۔ 8 شبنم نے ایک کولر 4 فیصد ٹیکس کے ساتھ 6500 روپیہ میں خریدا۔ ویٹ جوڑنے سے پہلے کولر کی قیمت معلوم کیجئے

حل: کولر کی قیمت میں ویٹ (VAT) بھی شامل ہے۔
اس لئے 4 فیصد ویٹ کا مطلب ہے کہ اگر ویٹ چھوڑ کر قیمت 100 روپیہ ہے تو ویٹ کے ساتھ قیمت 104 روپیہ ہے۔
اب اگر ویٹ کیساتھ قیمت 104 ہے تو حقیقی قیمت 100 روپیہ ہے۔
اس لئے جب ٹیکس کے ساتھ قیمت 6500 روپیہ ہے تو حقیقی قیمت = $\left(\frac{100}{104} \times 6500\right)$
= 6250 روپیہ

سوالنامہ۔8.2

1۔ روہت ایک پرانی الماری 6700 روپیہ میں خرید کر 300 روپیہ اُسکی مرمت میں خرچ کرتا ہے۔ اس کے بعد اُسے وہ 7500 روپیہ میں بیچ دیتا ہے۔ اس کا نفع یا نقصان فیصد میں معلوم کیجئے۔

2۔ ہر ایک کیلئے z, y, x کی قیمت معلوم کیجئے۔

ترتیب نمبر	قیمت خرید	اوپری خرچ (روپے میں)	قیمت خرید روپے میں	قیمت فروخت روپے میں	نفع روپے	نقصان روپے میں	% نفع	% نقصان
I	1500 روپیہ	320 روپیہ	x	y	280	–	z	–
II	240 روپیہ	20 روپیہ	x	y	–	z	–	10%
III	500 روپیہ	x	575	y	125	–	z	–
IV	9000 روپیہ	200 روپیہ	x	7200	–	y	–	z
V	x	50 روپیہ	500 روپیہ	y	z	20%	–	–

3۔ ایک بجلی کے پنکھے کو510 روپے میں بیچنے پر ایک دُکاندار کو15 فیصد کا نقصان ہوتا ہے۔ بتائیے دکاندار نے پنکھا کتنے میں خریدا تھا۔ اگر وہ پنکھے کو630 روپیہ میں بیچے تو اسے کتنے فیصد کا نفع یا نقصان ہوگا؟

4۔ ملکیش اسپورٹس کی دُکان سے ایک فٹ بال گیند30 فیصد کی چھوٹ پر192 روپیہ میں خریدتا ہے۔ تو فٹ بال کی درج قیمت کیا ہے۔

5۔ ایک دُکاندار ایک جوڑے جوتے پر1250 روپیہ قیمت درج کر کے گاہکوں کو خریدنے پر20 فیصد کی چھوٹ دیتا ہے۔ چھوٹ دینے کے بعد بھی دُکاندار کو25 فیصد کا نفع حاصل ہوتا ہے۔ تو جوتے کی قیمت خرید کیا ہے۔

6۔ سوہن کے ذریعہ ایک ڈپارٹمنل اسٹور سے خریدی گئی چیزوں کا بل درج ذیل ہے۔ بل کی کُل رقم بتائیے۔

ترتیب نمبر	چیزوں کے نام	چیز کی قیمت	سیل ٹیکس	سیل ٹیکس (روپے میں
1	ٹی شرٹ	250	4%	
2	کراکری	300	10%	
3	گھی ار کیلوگرام	260	5%	
4	مونگ دال ار کیلوگرام	60	2%	

7۔ راکھی کو250 روپے درج قیمت کا کھیل کا سامان اور220 روپے درج قیمت کا چمڑے کا بیگ بالترتیب 6 فیصد اور12 فیصد سیل ٹیکس دیکر خریدنا پڑا ہو تو بتائیے اُس نے کل کتنی قیمت ادا کی۔

8.5 سود مرکب (Compound Inlerest)

پچھلے درجوں میں ہم طریقہ وحدانی (Unitary Melhod) کے ذریعہ سود مفرد (Simple Interest) معلوم کرنا سیکھ چکے ہیں۔ آیئے مندرجہ ذیل مثال کے ذریعہ اسے پھر دُہرائیں۔

مثال-9 2000 روپیہ پر3 سال کا10 فیصد سالانہ کی در سے سود معلوم کریں

حل:- 100 روپیہ پر1 سال کا سود=10 روپیہ

یعنی 1 روپیہ پر1 سال کا سود $= \frac{10}{100}$ روپیہ

اسلئے2000 روپیہ پر1 سال کا سود $= 2000 \times \frac{10}{100}$ روپیہ

یعنی 2000 روپیہ پر 3 سال کا سود = $3 \times \frac{10}{100} \times 2000$ روپیہ = 600 روپیہ

یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ 2000 روپیہ کا 3 سال کا 10 فیصد سالانہ کی در سے سود معلوم کرنے کے لئے در

اصل (2000) روپیہ کا وقت (3 سال) اور در $\left(10\% = \frac{10}{100}\right)$ سے ضرب کیا جاتا ہے۔ اس لئے یہ نتیجہ نکالتا ہے

$$\text{سود مفرد} = \frac{\text{زر اصل} \times \text{وقت} \times \text{در}}{100}$$

اب اگر سود (Interest) کو I زر اصل (Prineipal) کو P وقت (Time) کو T اور در (Rate of Interest) کو R% سالانہ سے ظاہر کریں تو

$$I = \frac{P \times R \times T}{100}$$

اسی طرح زر کل (Amount) کو A سے ظاہر کریں تو

$$A = P + I$$

خود کر کے دیکھئے

ابھیشیک کے ذریعہ مہاجن سے 4000 روپیہ 10 فیصد سالانہ کی در سے جو 3 سال کیلئے قرض لیا گیا ہے۔ سود مفرد اور زر کل معلوم کریں۔

لیکن عام طور سے بینک، پوسٹ آفس، انشورنش کمپنی یا دوسرے اداروں کے ذریعہ لیا جانے والا یا ادا کیا جانے والا سود، سود مفرد نہیں ہوتا ہے۔ ان اداروں کے ذریعہ سود کا تخمینہ پچھلے سال کے رقم پر کیا جاتا ہے جسمیں پچھلے سال کا سود شامل ہوتا ہے۔ اس طریقہ پر کئے گئے سود کے تخمینہ کے طریقہ کو سود مرکب (Compound Interest) کہا جاتا ہے۔

ایک کسان دینو اپنے نزدیک کے علاقائی گرامین بینک سے زرخیز قسم کی بیج خریدنے کیلئے 2000 روپیہ ایک سال کے لئے 10 فیصد سالانہ در پر قرض لیتا ہے۔ دینو کو 1 سال بعد کتنی رقم واپس کرنی ہوگی؟

ایک سال بعد سود کی رقم = $\frac{2000 \times 10 \times 1}{100} = 200$ روپیہ

ایک سال بعد بینک کو واپس کی جانے والی رقم =200+2000=2200 روپیہ

لیکن فصل کی اُپج نہیں ہونے پر دینو قرض نہیں لوٹا پایا اور بینک جا کر رقم کو لوٹانے کیلئے ایک سال کا وقت اور مانگتا ہے۔اس لئے دوسرے سال کیلئے زراصل 2200 روپیہ ہوجائیگا۔

اب دوسرے سال کے آخر میں دینو کو ذیل رقم کی ادائیگی کرنی ہوگی۔

دوسرے سال کا زراصل =2200 روپیہ

2200 روپیہ پر اگلے سال کا سود= $\frac{2200 \times 10 \times 1}{100} = 220$ روپیہ

دوسرے سال کے آخر میں واجب الادا رقم= (220 + 2200) روپیہ = 2420 روپیہ

اس لئے 2 سال کے بعد دینو کو 2420 روپیہ لوٹانے ہونگے۔

آپ نے دیکھا کہ دوسرے سال کا سود 220 روپیہ ہے جو پہلے سال کے بعد سود سے 20 روپیہ زیادہ ہے۔سود کی یہ زیادہ رقم دوسرے سال کے زیادہ زراصل کی وجہ سے ہے۔اس طریقہ سے سود کا حساب نکالنے کو سود مرکب کہتے ہیں۔

خود کر کے دیکھئے

ترتیب نمبر	زراصل	در	پہلا سال		دوسرا سال		تیسرا سال	
			سود	زرکل	سود	زرکل	سود	زرکل
1	10,000	10%	1000	11000	1100	12100	1210	13310
2	50,000	5%						
3	30,000	10%						

مثال-10 انورادھا نے کسی ادارے میں 5 فیصد سالانہ سود مرکب کی در سے 800 روپیہ 3 سال کیلئے جمع کیا۔متعین مدت کے بعد اس کو ملنے والا سود مرکب اور زرکل معلوم کیجئے۔

حل: پہلے سال کے بعد زراصل (P) = 8000 روپیہ، در (R) = 5% وقت (T) = 1 سال

پہلے سال کا سود = $\frac{P \times R \times T}{100} = \frac{8000 \times 5 \times 1}{100} = 400$ روپیہ

پہلے سال کے آخر میں زرکل = زر اصل + سود = (400 + 8000) روپیہ = 8400 روپیہ

پہلے سال کے آخر میں زرکل ہی دوسرے سال کیلئے زر اصل ہوتا ہے۔

اس لئے دوسرے سال کیلئے زر اصل (P) = 8400 در (R) = 5% , وقت (T) = 1 سال

اسلئے دوسرے سال کا سود $= \frac{P \times R \times T}{100} = \frac{8400 \times 5 \times 1}{100} = 420$ روپیہ

دوسرے سال کے آخر میں زرکل = زرکل اصل + سود

= (420 + 8400) روپیہ = 8820 روپیہ

دوسرے سال کے آخر میں زرکل تیسرے سال کیلئے زر اصل ہوتا ہے۔

اس لئے تیسرے سال کا زر اصل (P) = 8820، در (R) = 5٪ وقت (T) = 1 سال

اس لئے تیسرے سال کا سود $= \frac{P \times R \times T}{100} = \frac{8820 \times 5 \times 1}{100} = 441$ روپیہ

سود مرکب = پہلے سال کا سود + دوسرے سال کا سود + تیسرے سال کا سود

= 400 روپیہ + 420 روپیہ 441 + روپیہ = 1261 روپیہ

زرکل = (زر اصل + سود) = (1261+800) = 9261 روپیہ

اسطرح واضح ہے کہ سود مرکب معلوم کرنے کیلئے ہر سال سود کا حساب کرنا پڑتا ہے۔

خود کر کے دیکھئے

1۔ اروناا نے اپنے کمپیوٹر سنٹر کے لئے دو کمپیوٹروں کے لئے 60,000 روپئے 10 فیصد سود مرکب کی در پر لئے۔ بتایئے اورنا کو 3 سال بعد کل کتنی رقم لوٹانی ہوگی؟

2۔ 10,000 روپیہ کا 10 فیصد کی در سے 3 سال کا سود مرکب اور زرکل معلوم کیجئے۔

8.5.1 سود مرکب کیلئے فارمولے کا تعین

ایک دن موہن نے اپنے اُستاد سے پوچھا "کیا سود مرکب معلوم کرنیکا کوئی آسان طریقہ ہے؟ اُستاد نے کہا "سود مرکب معلوم کرنے کا ایک مختصر طریقہ ہے۔ آیئے اسے معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

مانا کہ R٪ سالانہ سود کی شرح سے زر اصل P پر سالانہ سود جمع کیا جاتا ہے۔

مان لیا کہ روپیہ 500=P اور 6%= R اور مدت =2 سال ہے

دو سال بعد کا زر کل اور سود مرکب معلوم کرنا ہے۔

پہلے سال کے آخر میں زر کل کا حساب یہاں T = I

پہلے سال کا سود $\frac{500 \times 6 \times 1}{100}$ یعنی $SI_1 = \frac{P_1 \times R \times 1}{100}$

$$= \frac{P_1 R}{100}$$

اسلئے پہلے سال کے آخر میں زر کل = زر اصل (P) + سود (S,I)

$$= 500 + \frac{500 \times 6 \times 1}{100} \quad \text{یا} \quad A_1 = P_1 + SI_1$$

زر کل $A_1 = 500\left(1 + \frac{6}{100}\right)$ روپیہ $\qquad = P_1 + \frac{P_1 R}{100}$

$$= P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right)$$

(P مشترک لینے پر)

پہلے سال کا زر کل A_1 = دوسرے سال کا زر اصل $= P_2$

دوسرے سال کے آخر میں زر کل کا حساب

دوسرے سال کا سود $= \left[500\left(1 + \frac{6}{100}\right)\right] \times \frac{6 \times 1}{100}$ یا $SI_2 = \frac{P_2 \times R \times 1}{100}$

$= \frac{500 \times 6}{100}\left(1 + \frac{6}{100}\right)$ روپیہ $\qquad SI_2 = P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right) \times \frac{R}{100}$

$$= \frac{P_1 R}{100}\left(1 + \frac{R}{100}\right)$$

اس طرح دوسرے سال کا زر کل ہوگا

$$A_2 = 500\left(1 + \frac{6}{100}\right) + \frac{50 \times 6}{100}\left(1 + \frac{6}{100}\right) \quad \Bigg| \quad = P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right) + \frac{P_1 R}{100}\left(1 + \frac{R}{100}\right)$$

$= 500\left(1 + \frac{6}{100}\right)\left[1 + \frac{6}{100}\right]$ روپیہ $\quad \Bigg| \quad = P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right)\left[1 + \frac{R}{100}\right]$ مشترک لینے پر

$500\left(1 + \frac{6}{100}\right)^2$ روپیہ $= P_3 \quad \Bigg| \quad = P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right)^2 = P_3$

اسی طرح آگے بڑھتے ہوئے n سال کے آخر میں زرکل

$$A_n = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^n \quad \text{ہوگا}$$

یا ہم کہہ سکتے ہیں کہ

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

جہاں زراصل=P، سالانہ در=R، زرکل=A اور سال=n

اگر آپ کو سود مرکب (C.I) معلوم کرنا ہو تو ہم جانتے ہیں کہ

زراصل ـ زرکل = سود مرکب

$$\text{C.I.} = \text{A} - \text{P}$$

$$= P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n - P$$

$$C.I = P\left[\left(1+\frac{R}{100}\right)^n - P\right]$$

اس لئے سود مرکب سے متعلق زرکل اور سود کو سیدھے نکالنے کیلئے ہم ان فارمولوں کا استعمال کر سکتے ہیں۔

مثال۔11. 6000 روپیہ کا 3 سال کیلئے 10 فیصد سالانہ در سے سود مرکب معلوم کیجئے۔

حل:- ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{سود مرکب} = \text{زراصل}\left[\left(1+\frac{\text{در}}{100}\right)^{\text{وقت}} - 1\right]$$

یا

$$C.I = P\left[\left(1+\frac{R}{100}\right)^n - 1\right]$$

یہاں زراصل=6000 روپیہ

وقت=3 سال

در=10% سالانہ

$$C.I = 6000\left[\left(1+\frac{10}{100}\right)^3 - 1\right] \quad \therefore$$

$$= 6000\left[\left(1+\frac{10}{100}\right)^3 - 1\right]$$

$$= 6000\left[\frac{1331}{1000} - 1\right]$$

$$= 6000\left[\frac{1331-1000}{1000}\right]$$

$$= 6000 \times \frac{331}{1000}$$

$= 1986$ روپیہ

8.7.2 سود مرکب کی مدت

اوپر کے مثالوں میں سود مرکب کا حساب سالانہ بنیاد پر کیا گیا ہے۔ لیکن یہ ضروری نہیں ہے کہ ہمیشہ سود مرکب کا حساب سالانہ ہی کیا جائے۔

آیئے یہ دیکھتے ہیں کہ اگر سود سالانہ یا چھ ماہی جمع کیا جائے تو 100 روپیہ کے سود میں کتنی تبدیلی ہوگی؟

$P = 100$ روپیہ اور 10% سالانہ در پر سود سالانہ جمع ہوتا ہے اور مدت 1 سال $I = \dfrac{100 \times 10 \times 1}{100} = 10$ $A = 100 + 10$ $= 110$ روپیہ	$P = 100$ روپیہ اور 10% سالانہ در پر سود چھ ماہی جمع کیا جاتا ہے اور مدت 1 سال $I = \dfrac{100 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100} = 5$ روپیہ (پہلے 6 مہینہ کا سود) $A = 100 + 5 = 105$ روپیہ اب اگلے چھ مہینے کے لئے $P = 105$ روپیہ

اسلئے $I = \dfrac{105 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100} = 5.25$ روپیہ

$A = 105$ روپیہ $+ 5.25$ روپیہ $= 110.25$ روپیہ

چونکہ سود کی ادائیگی چھ ماہی ہے۔

$$A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^T$$

اسال میں 6 ماہ دوبار آتا ہے اسلئے T کو دوگنا کردیتے ہیں

اوردر چونکہ سالانہ ہوتی ہے اسلئے سود چھ ماہی ادا ہونے پر اُسے آدھا کردیتے ہیں

$$A = 100\left(1 + \frac{5}{100}\right)^2$$

$$= 100 \times \left(\frac{21}{20}\right)^2$$

$$= 100 \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20}$$

$$= 110.25$$

اوپر ہم نے دیکھا کہ اگر سود چھ ماہی ادا کیا جاتا ہے تو ہم سود کا حساب دوبار کرتے ہیں۔ اسلئے مدت دوگنی ہوجاتی ہے اوردر آدھا کردیا جاتا ہے۔

خود کر کے دیکھئے

مندرجہ ذیل میں سود کی ادائیگی کیلئے وقت کی مدت اور در معلوم کیجئے

1۔ دوسالوں کیلئے 10 فیصد سالانہ در پر اُدھار لی گئی ایک رقم پر سود چھ ماہی ادا کیا جاتا ہے۔

2 ۔ $1\frac{1}{2}$ سالوں کے لئے 6 فیصد سالانہ در پر اُدھار لی گئی ایک رقم پر سود چھ ماہی ادا کیا جاتا ہے۔

مثال-12 اُرملا نے 2000 روپیہ 20 فیصد سالانہ سود کی در سے اُدھار لئے۔ اگر سود کی ادائیگی ہر چھ مہینے پر کیا جاتی ہوتو $1\frac{1}{2}$ سال بعد اُسے کتنی رقم چکانی ہوگی۔ اور سود کی رقم بتائیے۔

حل: سوال کے مطابق

زر اصل (P)=2000 روپیہ

در (R)=20 فیصد سالانہ =10 فیصد چھ ماہی

وقت (n)= $1\frac{1}{2}$ سال = 3 چھ ماہ

سود مرکب سے

$$\text{زراصل} \quad A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$= 2000\left(1+\frac{10}{100}\right)^3$$

$$= 2000\left(1+\frac{1}{10}\right)^3$$

$$= 2000\left(\frac{11}{10}\right)^3 = 2000 \times \frac{1331}{1000}$$

$= 2662$ روپیہ

سود مرکب = زرکل − زراصل

$= (2662 - 2000)$ روپیہ

$= 662$ روپیہ

مثال۔13 32 روپیہ پر 12 فیصد سالانہ سود کی در سے 2 سال کے لیے سود مرکب اور سود مفرد کا فرق معلوم کیجیے۔

حل: سوال کے مطابق

زراصل $(P) = 3200$ روپیہ

در $(R) = 12\%$

وقت $(T) = 2$ سال

$$\text{سود مرکب} = P\left[\left(1+\frac{R}{100}\right)^n - 1\right]$$

$$= 3200\left[\left(\frac{112}{100}\right)^2 - \frac{1}{1}\right]$$

$$= 3200\left[\frac{12544}{1000} - \frac{1}{1}\right]$$

$$= 3200\left[\frac{12544-10000}{10000}\right]$$

$$\text{سود مفرد} = \frac{P \times R \times T}{100}$$

$$= \frac{P \times R \times T}{100}$$

$= 768$ روپیہ

$$= 3200\left[\frac{12544 - 10000}{10000}\right]$$

$$= 3200 \times \frac{2544}{1000} = 814.08$$ روپیہ

سود میں فرق = سود مرکب — سود مفرد

روپیہ $(841.08 - 768)$

روپیہ 46.08

8.8.3 سود مرکب کے فارمولے کا مختلف استعمال

ابھی تک ہم نے سود مرکب کے فارمولے کا استعمال کر کے کسی دھن کی متعین مدت میں اضافہ پر غور کیا ہے ۔لیکن کچھ دوسری بھی حالتیں بھی ہیں جہاں پر اسکے فارمولے کا استعمال کیا جاسکتا ہے۔ جیسے آبادی میں اضافہ یا تخفیف (کمی) یا کسی چیز کی قیمت میں اضافہ یا کمی آیئے اس پر غور کریں۔

آبادی۔اضافہ کی درسے ہمیں پتہ چل سکتا ہے کہ کسی مخصوص سال کے آخر میں ملک کی آبادی کتنی ہو جائیگی۔ اس کے لئے مندرجہ ذیل فارمولے کا استعمال کیا جائے گا۔ اگر موجودہ آبادی= P، آبادی۔اضافہ کی سالانہ در= r% اور n سال کے آخر میں آبادی= Q ہو تو

$$Q = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

اگر آبادی میں اضافہ کی جگہ پر کمی ہو تو درج بالا فارمولہ ہی استعمال میں لایا جائیگا۔صرف در کے مقام پر r کو منفی (۔) لینا ہوگا۔ اسی لئے آبادی میں کمی کی حالت میں

$$Q = P\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$$

ٹھیک اسی طرح کسی چیز کی قیمت میں اضافہ یا کمی کا تخمینہ کرنے کے لئے آبادی میں اضافہ یا کمی کے فارمولہ کی طرح ہی فارمولے کا استعمال کیا جائیگا۔

آیئے کچھ مثال لیں۔

مثال۔14 ایک گاؤں کی آبادی ہر سال 10 فیصد بڑھ جاتی ہے۔ اگر اس وقت اُسکی آبادی 8000 ہے تو 3 سال بعد اس کی آبادی کیا ہو جائیگی۔

حل: دیا فارمولہ سے ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{n سالون کے بعد آبادی} = \text{آج کی آبادی} \times \left(1+\frac{\text{در}}{100}\right)^n$$

$$\text{3 سالوں کے بعد آبادی} = 8000\left(1+\frac{10}{100}\right)^3 = 800\left(\frac{11}{10}\right)^3$$

$$= 8000 \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10}$$

$$= 10648$$

دوسرے طریقے سے بھی ہم اس کا حل نکال سکتے ہین۔

اسال بعد گاؤں کی آبادی میں اضافہ $= 10\%$ کا 8000

$$= 8000 \times \frac{10}{100} = 800$$

اسلئے اسال بعد گاؤں کی آبادی $= 8000 + 800 = 8800$

دوسرے سال بعد گاؤں کی آبادی میں اضافہ $= 10\%$ کا $8800 = 8800 \times \frac{10}{100}$

$$= 880$$

اسلئے دوسال بعد گاؤں کی آبادی $= 8800 + 880$

$$= 9680$$

پھر تیسرے سال کے بعد گاؤں کی آبادی میں اضافہ $= 10\%$ کا 9680

$$= 9680 \times \frac{10}{100} = 968$$

اس لئے 3 سال بعد گاؤں کی آبادی $= 9680 + 968 = 10648$

مثال۔15 ایک موٹر سائیکل 55000 میں خریدا گیا۔8 فیصد سالانہ کی در سے اسکی قیمت میں تخفیف ہو رہی ہے۔ 2 سال بعد موٹر سائیکل کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل۔ تخفیف کا مطلب ہے قیمت کا گھٹنا۔

فارمولہ کا استعمال کرکے

$$2 \text{ سال بعد موٹر سائیکل کی قیمت} = 5000\left(1-\frac{8}{100}\right)^2 \text{ روپیہ}$$

$$= 5000 \times \frac{92}{100} \times \frac{92}{100}$$

$$= 46552 \text{ روپیہ}$$

خود کیجئے

سنگیتا نے ایک موبائیل سیٹ 12000 روپیہ میں خریدا۔ایک سال بعد اُس موبائل سیٹ کی قیمت میں 5 فیصد کی تخفیف ہوگئی۔ایک سال بعد موبائل سیٹ کی قیمت معلوم کیجئے۔

سوالنامہ۔8.3

1۔ سدھیر نے ایک کوٹ 4500 روپیہ میں خریدا۔اُسے فروخت ٹیکس (Sell Tax) 6 فیصد زائد دینے پڑے تو بتائیے کہ سدھیر نے کوٹ خریدنے میں کل کتنے روپئے لگائے۔

2۔ ایک دکاندار نے اپنی دکان سے 3 مہینے کی بکری کے بعد 4500 روپیہ ویٹ (VAT) کی شکل میں جمع کیا۔ اگر ویٹ کی در 4 فیصد ہو تو یہ بتائیے کہ اس نے کتنی اصل رقم کا ساماں بیچا۔

3۔ رضیہ نے ایک دوا فروش کے یہاں سے 625 روپیہ درج قیمت کی دوائی خریدی اور اس پر 12 روپیہ 50 پیسے زائد دینے۔بتائیے کہ زائد ٹیکس کی در کیا تھی؟

4۔ زر کل معلوم کیجئے جب سود کی ادائیگی ہر سال کی جاتی ہے۔

(الف) 7500 روپیہ پر 2 سال کے لئے 6 فیصد سالانہ سود کی در سے

(ب) 25000 روپیہ پر 3 سال کے لئے 8 فیصد سالانہ کی در سے

5۔ سود مرکب معلوم کیجئے۔

(الف) 6000 روپیہ 3 سال کیلئے 10 فیصد سالانہ سود کی شرح سے

(ب) 4000 روپیہ پر 2 سال کیلئے 5 فیصد سالانہ سود کی دریا شرح سے

6۔ وہ دھن معلوم کیجئے جو 8 فیصد سالانہ سود کی شرح سے 2 سال میں 7290 ہو جاتا ہے۔

7- کتنے فیصد سالانہ سود کی در سے 4000 روپیہ 2 سال میں 5290 روپیہ ہو جاتا ہے۔

8- سلیمہ نے ایک زمین کا ٹکڑا خرید نے کیلئے بینک سے 40960 روپیہ قرض لیا۔ اگر بینک $12\frac{1}{2}\%$ سالانہ در سے $1\frac{1}{2}$ سال کے لئے قرض دیتا ہے اور سود چھ ماہی واجب الادا ہوتا ہے۔ تو سلیمہ کو کتنی رقم واپس کرنی ہوگی۔ اور اس کے ذریعہ ادا کی گئی سود کی رقم بھی معلوم کیجئے۔

9- روی نے 32000 روپیہ بینک میں جمع کیا۔ اس بینک کے ذریعہ جمع کی گئی رقم پر سہ ماہی سود سود دینے کا اعلان ہوا اور سود کی در 5 فیصد سالانہ ہو تو روی کو 6 مہینے بعد کتنی رقم حاصل ہوگی۔

10- 5 فیصد سالانہ در سے بڑھتی ہوئی سال 2005 کے آخر میں ایک شہر کی آبادی 44,100 ہو گئی بتائیے سال 2003 میں اس شہر کی آبادی کتنی تھی۔

11- ایک جنریٹر (Generator) کی موجودہ قیمت 42000 روپیہ ہے۔ اگر اسکی قیمت میں تخفیف 5 فیصد سالانہ ہو تو 2 سال بعد اس جنریٹر کی قیمت کیا ہوگی؟

*

باب-9 الجبرائی عبارت (Algebraic Expression)

9.1 تمہید

$2ab - 3, 8x^2, 3z, x + 2, 2y - 3$ وغیرہ سہل الجبرائی عبارتوں کی مثالیں ہیں۔ یہ عبارتیں متغیر (Variavle) اور غیر متغیر (Constant) سے بنے ہیں۔ جیسے عبارت $2a - 3$ کو $2a$ میں 3 گھٹا کر بنایا گیا ہے۔

اس عبارت میں دو رکن (Term) $2a$ اور 3 ہیں واضح طور پر a کا مضروب (Co-efticient) 2 ہے۔ آئیے نیچے دیئے گئے جدول کو پورا کریں۔

متغیر کے مضروب	ارکان کی تعداد	رکن	متغیر	عبارت
x کا مضروب = 1	دو رکنی	x, 3	x	$x + 3$
				$2y$
				$5 - 2z$
				$5x + y$
				$t^2 + 2t + 3$

جیسا کہ آپ نے اوپر دیئے گئے جدول میں دیکھا کہ ارکان کو جوڑ کر یا گھٹا کر الگ الگ رکن سے عبارت بنائی جا سکتی ہے۔ رکن خود بھی مضربوں کے حاصل ضرب کی شکل میں بنائے جا سکتے ہیں۔ جیسے عبارت $2a - 3$ میں رکن $2a$ کو $2\times a$ مضروبوں 2 اور a کے حاصل ضرب کی شکل میں رکھا جا سکتا ہے۔ رُکن 3 صرف ایک جُزِ ضربی 3 سے بنا ہے۔ (یہاں ہم 1 کو نہیں لیتے کیونکہ وہ سبھی اعداد کا مشترک جُزِ ضربی ہے۔)

> کسی رُکن کا عددی جُزِ ضربی (Numeral Co-efficient) اس کا عددی مضروب کہلاتا ہے۔

اب ذرا $2x^2y$ اور $5yx^2$ کے اجزائے ضربی کیجئے۔ کیا آپکو ان میں الجبرائی اجزائے ضربی ایک جیسے ملتے ہیں۔

$2 \times x \times x \times y$ اور $5 \times y \times x \times x$ میں الجرائی اجزائے ضربی ایک جیسے ہیں۔اس لئے یہ یکساں رکن (Like Terms) ہیں۔ایسے سبھی رکن جن میں الجبرائی حصہ ایک جیسا ہوتا ہے۔یکساں رکن کہلاتے ہیں۔

خود کر کے دیکھیے۔

مندرجہ ذیل میں یکساں رکنوں کو پہچانئے اور لکھئے۔

1. $-3x, 3x$	2. $2xy, -3yx$	3. $x^2y, 6x^2y$
4. x^2y, xy^2	5. xy, x^2y^2	6. $\frac{x}{3}, 2x$
		7. $\frac{1}{x}, 2x$

الجرائی عبارتوں کا جمع اور تفریق (Addition and Substraction of Algebaic expression)

ہم نے الجبرائی عبارتوں کے ریاضی اعمال (Mathematical Operations) کی مشق پچھلے درجوں میں بھی کی ہے۔آیئے دو عبارتوں کو ایک ساتھ لکھ کر جوڑتے ہیں۔جیسے

(i) $2x$ اور $3x$ کو جوڑیئے۔

حل: $2x + 3x = (2 + 3)x$ (کیونکہ رکن یکساں ہیں اسلئے مضروب جڑ جائینگے)

$= 5x$

(ii) $2x$ اور $3y$ کو جوڑیئے۔

حل: $2x + 3y$ (کیونکہ رکن یکساں نہیں ہیں۔اسلئے دونوں رُکنوں کو جوڑا نہیں جاسکتا)

(iii) $x^2 + 2x + 3$ اور $2x + 5$ کو جوڑیئے۔

(دوبارہ منظم کرنے پر) $(x^2 + 2x + 3) + (2x + 5) = x^2 + 2x + 2x + 3 + 5$

$= x^2 + (2 + 2)x + 8$

$= x^2 + 4x + 8$

اسی طرح عبارتوں کو گھٹانے میں ہم دیکھتے ہیں کہ گھٹانے کا عمل حقیقت میں دوجمعی معکوس (Additive Inverse) جوڑنے کے عمل کے برابر ہے۔گھٹانیکے عمل میں بھی یکساں رکنوں کی پہچان کرتے ہیں۔جیسے۔

(i) $5x$ میں سے $2x$ گھٹائیے۔

حل: $5x - 2x = 5x + (-2x)$

$= [5 + (-2)]x$

$= (5 - 2)x$

$= 3x$

(ii) $5x$ میں سے $7x$ گھٹائیے۔

حل: $5x - 7x$

$= (5 - 7)x$

$= -2x$

(iii) $4xy$ میں سے $3x^2y$ گھٹائیے۔

حل: کیونکہ یہاں رکن یکساں نہیں ہیں۔اس لئے ضربی اعداد کو جوڑا۔گھٹایا نہیں جاسکتا ہے۔

$= 4xy - 3x^2y$

مشق 9.1

1. جوڑیے۔

(a) $xy, 3xy$ (b) $x^2 + 3x, 2x + 9$ (c) x^2, y^2

(d) $7x, 8x$ (e) $8a, -2a, 7a, 2b$ (f) $8x, -2x, -6x$

(g) $2.3x, 1.7x$ (h) $\frac{2}{3}x, \frac{1}{3}x, -x$

2. پہلی عبارت میں سے دوسری کو گھٹایئے۔

(a) $22x, 10$ (b) $17xy, 19xy$ (c) $a^2+1, -2a$

(d) $8x, -8x$ (e) $7xy, 7xy$ (f) $7.3x. 1.3x$

(g) $-6x + y + 4z - 8, -2y + x - 5z + 8$ (h) $\frac{x}{2} - \frac{x}{4}, \frac{x}{3}$

3. سہل کیجئے۔

(a) $2x - 3y - 7x + 2x - y + 2$

(b) $5y^2 - 3y + 2y^2 - 1 + 2y^2 + 6y - 5$

(c) $6a - 3b + c - 6a + 3b\ 7c$

(d) $8x^2 + 5xy + 3y^2 + 3x^2 + 2xy - 6y^2$

4. اگر کسی مثلث کے اضلاع $x + 3\ x + 2, x + 1$ ہیں تو اس کا احاطہ کیا ہوگا؟

5. اگر کسی مربع کا ایک ضلع $7 - x$ ہے تو اُس کا احاطہ معلوم کیجئے۔

6. رحیم کی عمر $6 - x$ سال اور مہیش کے عمر Y سال ہے، دونوں کے عمروں کا جوڑ اور فرق کیا ہوگا۔

9.3 کثیر رکنی (Polynomial)

ہم نے مختلف عبارتوں کے بارے میں سیکھا۔ ہم نے یہ بھی جانا کہ عبارت میں رُکن (Term) ہوتے ہیں اور عبارت کی اپنی ڈگری بھی ہوتی ہے۔ عبارت کے رُکن کی تعداد اور ڈگری کچھ بھی ہوسکتی ہے۔ لیکن کثیر رکن خاص شرط والے عبارت ہوتے ہیں اگر کسی عبارت میں رُکن کی تعداد متعین ہو اور سبھی رُکن کی ڈگری ایک **مکمل عدد (Whole number)** تو وہ عبارت **کثیر رکنی (Polynomial)** کہلاتا ہے۔

کثیر رکنی میں رُکنوں کی تعداد ایک یا ایک سے زیادہ کچھ بھی ہوسکتی ہے۔ لیکن وہ متعین ہوتی ہے۔ اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ ہر کثیر رکنی ایک عبارت ہے لیکن ہر عبارت کثیر رکنی نہیں ہے۔ جیسے $2x^2 + 9x - 17$ ایک کثیر رُکنی ہے اور عبارت بھی ہے مگر $\frac{1}{2x^2+9x-17}$ ایک عبارت ہے کثیر رکنی نہیں ہے۔

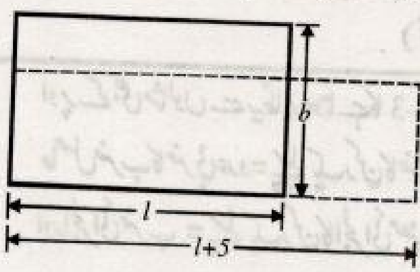
خود کر کے دیکھئے۔

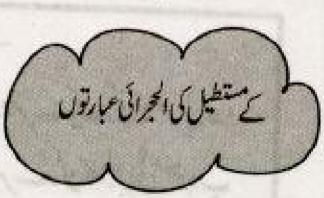
مندرجہ ذیل عبارتوں میں کثیر رکنی کو الگ کیجئے۔

$$x^2 - 9, 2x^2 - 237 + 2,\ 7x^{\frac{1}{2}},\ \sqrt{3}x + y,\ \frac{1}{x^2 - y}, - 2x^2y^2,\ \frac{1}{2}x^2z^2$$

9.4 الجبرائی عبارتوں کا ضرب

(i) کیا آپ ایسی حالت کے بارے میں سوچ سکتے ہیں جن میں دو الجبرائی عبارتوں کو ضرب کرنا پڑتا ہو؟ ببلی اُٹھ کر کہتی ہے۔ ''ہم مستطیل کے رقبہ کے بارے میں سوچ سکتے ہیں۔'' مستطیل کا رقبہ $l \times b$ ہے جسمیں l لمبائی اور b چوڑائی ہے۔ اگر مستطیل کی لمبائی 5 اکائی بڑھا دی جائے۔ یعنی $(l + 5)$ کردی جائے اور چوڑائی 3 اکائی کم کردی جائے یعنی $(b - 3)$ کردیجائے تو مستطیل کا رقبہ $(l + 5)(b - 3)$ ہوگا۔





(ii) کیا آپ حجم (Volume) کے بارے میں سوچ سکتے ہیں؟ ایک مستطیل نما بکس کا حجم اُسکی لمبائی، چورائی اور اونچائی کے حاصل ضرب سے حاصل ہوتا ہے)

(iii) سریتا کہتی ہے کہ جب ہم چیزیں خریدتے ہیں تو ہمیں ضرب کرنا پڑتا ہے۔ مثال کیلئے اگر فی درجن کیلوں کی قیمت p روپئے ہے اور اسکول پکنک کیلئے z درجن کیلوں کی ضرورت ہے تو ہمیں $(p \times z)$ روپیوں کی ادائیگی کرنی ہوگی۔

مان لیجئے فی درجن کیلوں کی قیمت 2 روپئے کم ہوتی ہے اور پکنک کیلئے 4 درجن کم کیلوں کی ضرورت ہوتی تو فی درجن کیلوں کی قیمت $(P - 2)$ روپئے ہوتی اور $(z - 4)$ درجن کیلوں کی ضرورت ہوتی اسلئے ہمیں $(p - 2)(z - 4)$ روپیوں کی ادائیگی کرنی ہوتی۔ آیئے عبارتوں کے حاصل ضرب کو سمجھیں۔

9.4.1 دو یک رکنی (Monomial) کا حاصل ضرب سمجھیں

(i) ہم جانتے ہیں $6 = 3 + 3 = 2 \times 3$

اسی طرح

(ii) $2x = x + x = 2 \times x$

اس طرح

(iii) $6x = 3x + 3x = 2 \times 3x$

کچھ دوسری مثالوں کے ذریعہ اسے سمجھئے۔

(iv) $2x \times y = 2 \times x \times y = 2 \times y \times x = 2xy = 2yx$

(v) $2x \times 3y = 2 \times x \times 3 \times y = 2 \times 3 \times x \times y = 6\,xy$

(vi) $2x \times x = 2 \times x \times x = 2x^2$ (قوت نما (power) کے اصول سے) $[x \times x = x^{1+1} = x^2]$

(vii) $2xy \times -3xy = 2 \times x \times x \times y \times (-3) \times x \times y \times y$

$= 2 \times (-3) \times x \times x \times x\,y \times y \times y$

$= 6(x^3y^3)$ (قوت نما کے اصول سے)

اوپر کے سبھی مثالوں سے یہ ظاہر ہوتا ہے کا $-3 \times 2 = -6$

حاصل ضرب کا ضربی عدد = پہلے یک رکن کا ضربی عدد × دوسرے یک رکنی کا ضربی عدد

اورالجرائی ضرب = پہلے یک رکن کا الجرائی مضروب × دوسرے رکن کا الجرائی مضروب

$= x^2y \times xy^2 = x^3y^3$

$2x^2y \times -3x^2y = -6x^3y^3$

ہم یہ بھی پاتے ہیں کہ دو یک رکنی کا حاصل ضرب ہمیشہ یک رکنی ہی ہوتا ہے۔

9.4.2 تین یا اُس سے زیادہ یک رکنی کا حاصل ضرب

نیچے کچھ مثال دیئے گئے ہیں۔

(i) $3x \times -7y \times 5z = (3x \times 7y) \times 5x = 21xy \times 5z = 105\ xyz$

(ii) $2x^2y \times 3y^2z \times (-5z^2x) = (2x^2y \times 3y^2z) \times (-5z^2x)$

$= 6x^2y^3z \times (-5z^2x)$

$= -30x^3y^3z^3$

یہاں ہم نے پہلے دو یک رکنی کو ضرب کر کے ایک رکن حاصل کیا پھر اس نئے یک رکنی میں تیسرے یک رکن سے ضرب کر کے حاصل ضرب یک رکنی حاصل کیا ہے اسے مندرجہ ذیل طریقے سے بھی حل کر سکتے ہیں۔

(iii) $2x^2y \times 3y^2z \times (-5z^2x) = (2 \times 3 \times (-5)) \times x^2 \times x \times y \times y^2 \times z \times z^2$

$= -30\ x^3y^3z^3$

اس طرح تین سے زیادہ یک رکنی کا حاصل ضرب بھی ایک یک رکنی ہی حاصل ہوتا ہے۔

سوالنامہ۔9.2

1. حاصل ضرب معلوم کیجئے

(a) $8x \times (-2)$

(b) $-3x \times -3x^2y$

(c) $6mn \times 7np$

(d) $4p^3 \times 3p^3$

(e) $x^2y \times xyz$

(f) $2.5x \times 4x$

(g) $2.5x \times 2.5y$

(h) $\frac{1}{2}x \times \frac{1}{2}y$

(i) $\frac{1}{2}xy \times 2xy$

(j) $2x \times 2x^2 \times 2x^3$

(k) $-3x^2y \times (-6) \times 7xy$

2. کسی مستطیل کے متصل اضلاع بالترتیب $6p^2q^2$ اور $2pq$ ہیں تو مستطیل کا رقبہ کیا ہوگا؟

3. اگر کسی مربع کا ضلع $\sqrt{2}x^2y^2$ ہے تو مربع کا رقبہ کیا ہوگا۔

4. کسی مثلث کا قاعدہ $7xyz$ اور متعلقہ عمود یا اونچائی $2x$ ہے تو مثلث رقبہ کیا ہوگا؟

5. مثلث متساوی الاضلاع کا رقبہ معلوم کیجئے اگر اُسکا ضلع $3x^2$ ہے

6. اُس مکعب (Cube) کا حجم کیا ہوگا جس کا کنارا $6a$ ہو؟

7. اگر ایک قلم کی قیمت x^2y ہو تو y^2x قلم کی قیمت کیا ہوگی؟

8. اگر کوئی آدمی $\frac{x^2}{2}$ کیلومیٹر فی گھنٹہ کی چال سے چل رہا ہے تو 2 گھنٹے میں وہ کتنی دوری طئے کریگا۔

9.4.3 یک رکنی (Monomial) کا دو رکنی (Bionomial) سے ضرب

آیئے اسے سمجھنے کیلئے ایک یکرکنی $2x$ اور ایک دو رکنی $2x+y$ کو ضرب کرتے ہیں۔ چونکہ عبارت اعداد کو ظاہر کرتے ہیں۔ اس لئے اعداد کے اصولوں کی پابندی عبارت بھی کرتے ہیں

ہم جانتے ہیں کہ

$$12 \times 105 = 12(100 + 5) = 12 \times 100 + 12 \times 5 = 1200 + 60 = 1260$$

(بٹن اصول (Distributive law) سے

اسی طرح

$$2x \times (2x + y) = 2x \times 2x + 2x \times y$$
$$= 4x^2 + 2xy$$

$$(3x + 7) \times (-3x^2) = (3x) \times (-3x^2) + 7 \times (-3x^2)$$
$$= -9x^3 - 21x^2$$

اسی طرح بٹن کے اصول کی مدد سے یک رکنی سے دو رکنی کے ہر ایک رکن سے ضرب کرتے ہیں۔ اور حاصل ضرب کو اُنکے نشانوں کیساتھ جمع کرتے ہیں۔۔ یک رکنی سے سہ رکنی (Trinomial) یا دوسرے کثیر رکنی عبارتوں کا حاصل ضرب معلوم کرنے کیلئے اسی بنیادی طریقہ کار کا استعمال کرتے ہیں۔ جیسے

$$7x \times (2x^2 - 3xy + 11) = 7x \times 2x^2 + 7x \times (-3xy) + 7x \times 11$$
$$= 14x^2 - 21x^2y + 77x$$

خود کر کے دیکھئے۔

حاصل ضرب معلوم کیجئے۔

(i) $a \times (a^3 - a^2 - a + 1)$ (ii) $(a + b + c) \times 3a^2$

(iii) $2a \times (x + y + z)$ (iv) $(2a^2 + 3bc - c^2) \times 2abc$

$2x$ کو پہلے $(2y + x)$ سے ضرب کرینگے پھر y کو $(2y + x)$ سے ضرب کر کے دونوں کو جوڑ لینگے

9.4.4 دورکنی کا دورکنی سے ضرب

جس طرح ہم نے یک رکنی کا دورکنی سے ضرب کیا

آئے اب ہم دورکنی کا دورکنی سے ضرب کریں۔

سوچئے۔ آپ $(2x + y)(2y + x)$ کو کیسے حل کرینگے۔

آئیے سمجھیں

$$(2x + y)(2y + x) = 2x\,(2y + x) + y\,(2y + x) \quad \text{(بٹن کے اصول سے)}$$

$$= (2x \times 2y + 2x \times x) + (y \times 2y + y \times x) \quad \text{(پھر بٹن کے اصول سے)}$$

$$= (4xy + 2x^2) + (2y^2 + xy)$$

$$= 4xy + 2x^2 + 2y^2 + xy$$

$$= 2x^2 + 2y^2 + 4xy + xy$$

$$= 2x^2 + 2y^2 + 5xy$$

نوٹ:- کثیر رکنی کا کثیر رکنی سے ضرب میں ہمیں یکساں رکنوں کو ڈھونڈ کر ایک ساتھ کر لینا چاہیے۔

9.4.5 دورکنی کا سہ رکنی سے ضرب

ہم نے سیکھا ہے یک رکنی کا یک رکنی سے ضرب کرنا اور بٹن اصول کی مدد سے دورکنی سے دورکنی کو ضرب کرنا۔ ہم نے دورکنی اور دورکنی کے ضرب میں دیکھا کہ دورکنی کے ہر ایک رکن سے دورکنی کا ہر ایک رکن ضرب ہوتا ہے۔ اور اس کیلئے بٹن کے اصول کا استعمال کیا جاتا ہے۔ دورکنی کا سہ رکنی سے ضرب میں بھی اسی اصول کا استعمال کیا جاتا ہے۔ جیسے

دورکنی سے سہ رکنی کے ضرب میں بھی بٹن کے اصول کا استعمال کیا جاتا ہے۔

$$(2x - y) \times (x + y + z) = 2x \times (x + y + z) - y\,(x + y + z)$$

$$= 2x^2 + 2xy + 2xz - xy - y^2 - yz$$

$$= 2x^2 - y^2 + 2xy - xy + 2xz - yz$$

$$= 2x^2 - y^2 + xy + 2xz - yz$$

اسی طرح ہم بٹن اصول کا استعمال کر کے عبارتوں کو ضرب کر سکتے ہیں

حل کئے گئے سوالات

دیئے گئے عبارتوں کو ضرب کیجئے۔

(1) $(2x - 3)$ اور $(3x + 7)$ کا　　(2) $(6z - 5)$ اور $(z - 3)$ کا

3. $(a+b)(a-b)$

4. $(a-b)(a^2-2ab+b^2)$

5. $(x+y+z)(x-y+z)$

حل۔1 $(3x+7)\times(2x-3) = 3x(2x-3)+7(2x-3)$

$= 3x\times 2x - 3x\times 3 + 7\times 2x - 7\times 3$

$= 6x^2 - 9x + 14x - 21$

$= 6x^2 + 5x - 21$ (یکساں رکن کو جمع کرنے پر)

حل۔2 $(z-3)\times(6z-5) = z(6z-5) - 3(6z-5)$

$= 6z^2 - 5z - 18z + 15$

$= 6z^2 - 23z + 15$

حل۔3 $(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b)$

$= a^2 - ab + ab - b^2$

$= a^2 - b^2$

حل۔4 $(a-b)\times(a^2-2ab+b^2) = a(a^2-2ab+b^2) - b(a^2-2ab+b^2)$

$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$

$= a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$

نوٹ:-عبارتوں کوان کی معیاری شکل(Standard Form) میں لکھنے کیلئے متغیروں کی ڈگری گھٹتی ہوئی ترتیب میں لکھی جاتی ہے۔

حل۔5 $(x+y+z)(x-y+z) = x(x-y+z) + y(x-y+z) + z(x-y+z)$

$= x^2 - xy + xz + xy - y^2 + yz + xz - yz + z^2$

$= x^2 - y^2 + z^2 - xy + xy + yz - yz + xz + xz$

$= x^2 - y^2 + z^2 + 2xz$

6 سہل کریں $(x+y)(x-2y+z) - (x-y)z$

حل۔6 $(x+y)(x-2y+z) - (x-y)z = x(x-2y+z) + y(x-2y+z) - (x-y)z$

$= x^2 - 2xy + xz + xy - 2y^2 + yz - xz + yz$

$= x^2 - 2y^2 - 2xy + xy + xz - xz + yz + yz$

$= x^2 - 2y^2 - xy + 2yz$

.7 کسی مکعب کا ایک ضلع $(x+y)$ اکائی تو اس کا حجم کتنا ہوگا۔

حل۔ 7

مکعب کا ضلع $= (x + y)$ اکائی

مکعب کا حجم $=$ ضلع $\times$ ضلع $\times$ ضلع

مکعب کا حجم $= (x + y) \times (x + y) \times (x + y)$ مکعب اکائی

$= (x + y) \times \{(x \times (x + y) + y \times (x + y)\}$ مکعب اکائی

$= (x + y) \times \{ x^2 + xy + xy + y^2\}$ مکعب اکائی

$= (x + y) \times \{ x^2 + 2xy + y^2\}$ مکعب اکائی

$= x \times (x^2 + 2xy + y^2) + y \times (x^2 + 2xy + y^2)$ مکعب اکائی

$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$ مکعب اکائی

$= (x^3 + y^3 + 3x^2y + 3 xy^2)$ مکعب اکائی

سوالنامہ۔9.3

1. دیے گئے الجرائی عبارتوں کو ضرب کیجیے۔

(a) $(4a - 5b) \times (2a - 6b)$ (b) $(1.5x - 0.5y) \times (1.5x + 0.5y)$

(c) $\left(\frac{1}{2}pq - \frac{3}{2}q\right) \times (pq - q)$ (d) $(a + b) \times (3x - y)$

(e) $(a^2b^2 - c^2d^2) \times (a^2b^2 + c^2d^2)$ (f) $(2a + 2b + c)(a + b - c^2)$

2. سہل کیجیے

(a) $(a - b)(a + b) - (a + b)(a + b)$

(b) $(a^2 - b)(a - b^2) + (a - b)^2$

(c) $(2.3x - 1.7y)(2.3x + 1.7y + 5) - 5.29x^2 + 2.89 y^2$

(d) $(a + b)^2 - (a - b)^2$

(e) $(x + y + z) \times (x + y + z)$

(f) $(a - b)(b - c) + (b - c)(c - a) + (c - a)(a - b)$

3. کسی مثلث کا قاعدہ اور متعلق اونچائی بالترتیب $(x + y)^2$ اور $(x - y)^2$ ہے تو اُس کا رقبہ کیا ہوگا؟

4. مستطیل کی لمبائی اُسکی چوڑائی سے $(x + y)$ اکائی زیادہ ہے۔ اگر چورائی z اکائی ہوتو مستطیل کی لمبائی اور رقبہ کیلئے عبارت لکھئے۔

5. اگر کسی لڑکی نے $(x + y)$ روپیہ فی کیلو کی در سے $(m + n)$ کیلوگرام آلو اور y روپیہ فی کیلوگرام کی در سے $(x + y)$ کیلو ٹماٹر خریدے تو اُسے کل کتنی رقم دینی ہوگی۔

6. باپ کی عمر اس کے بیٹے کی عمر سے $(n + m)$ گنا ہے۔ اگر بیٹے کی عمر $(x^2 - y^2)$ سال ہے تو باپ کی عمر کے لئے عبارت لکھئے۔

9.5 الجبرائی عبارتوں کی قیمت

ہم نے دیکھا کہ متغیر اور غیر متغیر کی مدد سے عبارت بنتے ہیں۔ متغیر کسی بھی عدد کو ظاہر کرتے۔ متغیر مختلف اعداد کی قیمت لے سکتے ہیں۔ متغیر کی ان مختلف قیمتوں کے لئے ان سے بنی عبارتیں بھی متاثر ہوتی ہیں۔ آیئے ایک عبارت $2x - 5$ پر غور کریں۔

عبارت $= 2x + 5$

عبارت میں متغیر x ہے۔

$x = 0, 1, 2, 3, ...$ رکھنے پر

الجرائی عبارت کی قیمت $= 2 \times 0 + 5 = 5$ جب $x = 0$

الجبرائی عبارت قیمت $= 2 \times 1 + 5 = 7$ جب $x = 1$

الجرائی عبارت کی قیمت $= 2 \times 2 + 5 = 9$ جب $x = 2$

الجرائی عبارت کی قیمت $= 2 \times 3 + 5 = 11$ جب $x = 3$

اس طرح ہم پاتے ہیں کہ متغیروں کی قیمت عبارت کی قیمت کو متاثر کرتی ہے۔

خود کر کے دیکھئے۔

متغیر 1 اور -1, $x = 0$ کے لئے درج ذیل عبارتوں کی قیمت معلوم کریں

(i) $x^2 + 4x + 4$ (ii) $2x^2 - 3x$ (iii) $7x - 5$

(iv) $\frac{x^2}{2} - 1$ (v) $(x - a)(x - b)$

9.6 متماثلہ (Identity)

ہم نے مساوات کو حل کرتے وقت مساوی کو دیکھا ہے۔اس میں دو عبارتیں = (برابر) کے نشان کے ذریعہ الگ رہتی ہیں۔آیئے ایک مساوی $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$ پر غور کریں۔اسمیں متغیر کی کچھ قیمتوں کیلئے دایاں حصہ R.H.S اور بایاں حصہ R.H.S کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔

$x = 0$ کیلئے

مساوی کے L.H.S کی قیمت $= (0 + 1)(0 + 2) = 1 \times 2 = 2$

اور مساوی کے R.H.S. کی قیمت $2 + 3 \times 0 + 0^2 = 0 + 0 + 2 = 2$

یہاں L.H.S. کی قیمت = R.H.S. کی قیمت $= 2$

اب $x = -5$ کے لئے

مساوی کے L.H.S. کی قیمت $= (-5 + 1)(-5 + 2) = (-4)(-3) = 12$

اور R.H.S. کی قیمت $= (-5)^2 + 3(-5) + 2 = 25 - 15 + 2 = 12$

یہاں بھی L.H.S. کی قیمت = R.H.S. کی قیمت $= 12$

اب $x = 10$ کے لئے دیکھتے ہیں۔

مساوی کے لئے L.H.S. کی قیمت $= (10 + 1)(10 + 2) = 11 \times 12 = 132$

اور R.H.S کی قیمت $= 10^2 + 3 \times 10 + 2 = 100 + 30 + 2 = 132$

یہاں بھی L.H.S کی قیمت = R.H.S کی قیمت $= 132$

اوپر کے سبھی مثالوں سے آپ کیا پاتے ہیں؟ یہ طئے ہے کہ ہر حالت میں مساوی کے دونوں سائڈ برابر آتے ہیں۔ایسی مساوی (equation) جو متغیر کے سبھی قیمتوں کے لئے صحیح ہو متماثلہ کہلاتی ہے۔ہم نے سیکھا ہے کہ مساوات متغیر کی صرف مخصوص قیمتوں کیلئے صحیح ہوتے ہیں۔ اس طرح متماثلہ اور مساوات میں فرق واضح ہوتا ہے۔ایک مساوی $x + 3 = 5$ لیتے ہیں۔اور x کی مختلف قیمتوں کے لئے مساوی کی جانچ کرتے ہیں۔ $x = 0$

تو مساوی کے L.H.S کی قیمت $= 3 + 0 = 3$

R.H.S کی قیمت $= 5$

یہاں L.H.S کی قیمت $\neq$ R.H.S کی قیمت

$x = 1$ کے لئے

L.H.S کی قیمت $= 3 + 1 = 4$

R.H.S کی قیمت $= 5$

یہاں بھی L.H.S کی قیمت ≠ R.H.S.

$x = 2$ کے لئے $\text{L.H.S} = 3 + 2 = 5 = \text{R.H.S}$

$x = 3$ کے لئے $\text{L.H.S} = 3 + 3 = 6 \neq \text{R.H.S}$

اس طرح ہم پاتے ہیں کہ $x + 3 = 5$ ایک متماثلہ نہیں ہے کیونکہ یہ متغیر کے سبھی قیمتوں کیلئے صحیح نہیں ہے۔ یہاں $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$ ایک متماثلہ ہے کیونکہ متغیر کے سبھی قیمتوں کے لئے صحیح ہے۔

خود کر کے دیکھئے۔

جانچ کر پتا کیجئے کہ کون متماثلہ ہے؟

(i) $(x - 3)(x + 3) = x^2 - 9$ (ii) $x^2 + 9 = 9x + x^2$

(iii) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 6a$ (iv) $3(x - y) = 3x - 3y$

9.5 معیاری متماثلات (Standard Identities)

ہم کچھ ایسے متماثلوں پر چرچا کرینگے جو عام طور سے استعمال میں آتی ہیں۔

انکے عام استعمال کے وجہ کر ہی یہ معیاری متماثلات کہے جاتے ہیں۔

I. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

یہاں L.H.S. $= (a + b)^2$

$= (a + b)(a + b)$

$= a(a + b) + b(a + b)$

$= a^2 + ab + ab + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

$= \text{R.H.S.}$

$$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

کیونکہ یہ متماثلہ R.H.S. میں دیئے گئے عبارتوں کے حقیقی حاصل ضرب سے حاصل ہوا ہے۔ اسلئے a اور b کی کسی بھی قیمت کیلئے L.H.S=R.H.S ہوگا۔

II. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

یہاں L.H.S. $= (a - b)^2$

$= (a - b)(a - b)$

$= a(a-b) - b(a-b)$
$= a^2 - ab - ab + b^2$
$= a^2 - 2ab + b^2 =$ R.H.S.

$\therefore \mathbf{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

III. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

یہاں L.H.S. $= (a-b)(a+b)$
$= a(a+b) - b(a+b)$
$= a^2 + ab - ab - b^2$
$= a^2 - b^2 =$ R.H.S.

اسلئے $\mathbf{(a-b)(a+b) = a^2 - b^2}$

ان تینوں متماثلات کے علاوہ ایک دوسری خاص متماثلہ بھی ہے جسکا استعمال ہم مختلف ریاض کے مسائل کے حل کی شکل میں کرتے ہیں۔

IV. $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

یہاں L.H.S $= (x+a)(x+b)$
$= x(x+b) + a(x+b)$
$= x^2 + bx + ax + ab$
$= x^2 + (a+b)x + ab$ (چونکہ $(a+b)x = ax + bx$)
$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

9.8 متماثلات کا استعمال

متماثلات کا استعمال کرکے ہم عبارتوں اور اعداد کے ضرب کا ایک سہل اور متبادل طریقہ حاصل کرینگے۔

مثال۔1 متماثلہ (1) استعمال کرتے ہوئے۔

معلوم کیجئے۔ (i) $(3x^2+2)^2$ (ii) $(49)^2$

حل: (1) $(3x^2+2)^2$

یہاں اگر $a = 3x^2$ اور $b = 2$ مان لیں تو

$(3x^2+2)^2 = (3x^2)^2 + 2(3x^2)(2) + (2)^2$
(متماثلہ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ سے)
$= 9x^4 + 12x^2 + 4$

حل (ii) $(49)^2$

$49^2 = (40+9)^2$
$= (40)^2 + 2 \times 40 \times 9 + 9^2$
$= 1600 + 720 + 81$
$= 2401$

آسان مسائل کے حل میں بھلے ہی یہ طریقہ تھوڑا پریشان کن لگتا ہو لیکن مشکل عبارتوں کے لئے یہ بے حد آسانی فراہم کرتا ہے۔

مثال۔2 متماثلہ (ii) کا استعمال کرتے ہوئے۔

(i) $(3p - 7q)^2$ (ii) 49^2 کو معلوم کیجئے۔

حل: (i) $(3p - 7q)^2$

(ii) سے $(3p - 7q)^2 = (3p)^2 - 2 \times 3p \times 7q + (7q)^2$

$= 9p^2 - 42\,pq + 49q^2$

حل (ii) $49^2 = (50 - 1)^2$

$= (50)^2 - 2 \times 50 \times 1 + (1)^2$

$= 2500 - 100 + 1$

$= 2501 - 100 = 2401$

اوپر کے مثالوں میں آپ نے دیکھا کہ متماثلہ (i) اور (ii) کے استعمال سے $(49)^2$ معلوم کیا گیا ہے۔ کیا آپ $(3p - 7q)^2$ متماثلہ (i) کی مدد سے معلوم کرسکتے ہیں؟ $(3x^2 + 2)^2$ کو بھی متماثلہ (ii) کی مدد سے معلوم کیجئے۔

مثال۔3. متماثلہ (iii) کی مدد سے ذیل کی عبارتوں کی قیمت معلوم کیجئے۔

(i) $(7x - 3y)(7x + 3y)$ (ii) $95^2 - 5^2$ (iii) 996×1004

(i) (III) سے $(7x - 3y)(7x + 3y) = (7x)^2 - (3y)^2$

$= 49x^2 - 9y^2$

(ii) $95^2 - 5^2 = (95 - 5)(95 + 5)$

متماثلہ (III) سے $= 90 \times 1000$

$= 90000$

(iii) $996 \times 1004 = (1000 - 4)(1000 + 4)$

(III) سے $= (1000)^2 - (4)^2$

$= 1000000 - 16$

$= 999984$

مثال۔4. متماثلہ $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ کا استعمال کرتے ہوئے ذیل کو حل کریں۔

(i) 101×102 (ii) 45×54

(l) $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2$ (n) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$

2. سہل کیجئے

(a) $(3a-5b)^2-(3a+5b)^2$ (b) $(x^2+y^2)^2$

(c) $(xyz+xy)^2-2x^2y^2z$ (d) $\left(\frac{2x}{5}-\frac{3y}{4}\right)\left(\frac{2x}{5}+\frac{3y}{4}\right)$

(e) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(2a-\frac{3}{a}\right)^2$ (f) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$

3. متماثلوں کا استعمال کر کے درج ذیل کی قیمت معلوم کیجئے۔

(a) 81^2 (b) $(999)^2$ (c) $(52)^2$

(d) $(498)^2$ (e) $(5.5)^2$ (f) 191×209

(g) 10.5×9.5 (h) $(101)^2-(99)^2$ (i) $(1.5)^2-(0.5)^2$

4. متماثلہ $(x+a)(x+b) = x+(a+b)x+ab$ کا استعمال کر کے درج ذیل کا حاصل ضرب اور قیمت معلوم کیجئے۔

(a) $(x+3y)(x+5y)$ (b) $(3x+7)(3x+5)$

(c) $(x-5)(x+4)$ (d) $(2x-7)(2x-9)$

(e) 52×53 (f) 3.1×3.2

ہم نے سیکھا

1. عبارت متغیروں اور غیر متغیروں کا بامعنی مجموعہ ہوتا ہے۔ متغیر کا متغیر کے ساتھ ضرب، جوڑ گھٹاؤ اور تقسیم کر کے حاصل کرتے ہے۔
2. عبارت میں رُکن + یا - نشان کے ذریعہ الگ رہتے ہیں
3. متغیر کی قیمت سے عبارت کی الگ الگ قیمتیں حاصل کی جاسکتی ہیں۔
4. متماثلہ: ایک ایسی مساوی یا مساوات ۔ جو متغیر کی سبھی قیمتوں کے لئے صحیح ہوتا ہے۔ متماثلہ کہلاتی ہے۔
5. مساوات: ایک ایسا مساوی جو متغیر کے کچھ مخصوص قیمتوں کے لئے صحیح ہو مساوات کہلاتا ہے۔

*

(l) $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2$ (n) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$

2. سہل کیجئے

(a) $(3a-5b)^2-(3a+5b)^2$ (b) $(x^2+y^2)^2$

(c) $(xyz+xy)^2-2x^2y^2z$ (d) $\left(\frac{2x}{5}-\frac{3y}{4}\right)\left(\frac{2x}{5}+\frac{3y}{4}\right)$

(e) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(2a-\frac{3}{a}\right)^2$ (f) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$

3. متماثلوں کا استعمال کر کے درج ذیل کی قیمت معلوم کیجئے۔

(a) 81^2 (b) $(999)^2$ (c) $(52)^2$

(d) $(498)^2$ (e) $(5.5)^2$ (f) 191×209

(g) 10.5×9.5 (h) $(101)^2-(99)^2$ (i) $(1.5)^2-(0.5)^2$

4. متماثلہ $(x+a)(x+b)=x+(a+b)x+ab$ کا استعمال کر کے درج ذیل کا حاصل ضرب اور قیمت معلوم کیجئے۔

(a) $(x+3y)(x+5y)$ (b) $(3x+7)(3x+5)$

(c) $(x-5)(x+4)$ (d) $(2x-7)(2x-9)$

(e) 52×53 (f) 3.1×3.2

ہم نے سیکھا

1. عبارت متغیروں اور غیر متغیروں کا بامعنی مجموعہ ہوتا ہے۔ متغیر کا متغیر کے ساتھ ضرب، جوڑ گھٹاؤ اور تقسیم کر کے حاصل کرتے ہے۔
2. عبارت میں رُکن + یا - نشان کے ذریعہ الگ رہتے ہیں
3. متغیر کی قیمت سے عبارت کی الگ الگ قیمتیں حاصل کی جاسکتی ہیں۔
4. متماثلہ: ایک ایسی مساوی یا مساوات۔ جو متغیر کی سبھی قیمتوں کے لئے صحیح ہوتا ہے۔ متماثلہ کہلاتی ہے۔
5. مساوات: ایک ایسا مساوی جو متغیر کے کچھ مخصوص قیمتوں کے لئے صحیح ہو مساوات کہلاتا ہے۔

*

باب-10 قوت نماعدد اور قوت نمایا قوت

Exponent and Power

10.1 تمہید

> جیسے $10^3 = 10 \times 10 \times 10$ یہاں 10 قاعدہ (Base) اور 3 اُس کا قوت نماعدد یا قوت نما (Exponent or power) ہے 10^3 کو "10 کی قوت 3" پڑھتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ کسی عدد کو بار بار اسی عدد سے ضرب کرنے پر حاصل ضرب کو مختصر طور پر قوت نمائی شکل (Exponential Form) میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

اسی طرح $10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100000$

$10^3 = 10 \times 10 \times 10$

$10^1 = 10$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots$

خود کر کے دیکھئے

قوت نمائی شکل میں لکھئے

(1) $2 \times 2 \times 2 = \ldots\ldots\ldots$

(2) $(-5) \times (-5) = \ldots\ldots\ldots$

(3) $\frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \ldots\ldots\ldots$

(4) $a \times a \times a \times \ldots\ldots$ بار $m = \ldots\ldots\ldots$

اوپر 10 کے لئے دیئے گئے پیٹرن سے کیا آپ یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں۔ کہ کسی مثبت عدد صحیح کی قوت جیسے جیسے گھٹتی جاتی ہے۔ اُسکی قیمت بھی گھٹتی جاتی ہے۔

آپ خود کچھ مثبت اعداد لے کر دیکھئے کیا سبھی مثبت اعداد میں آپ کو یہ پیٹرن ملتا ہے۔

$3^2 = 3 \times 3 = 9$
$3^1 = 3 \qquad = 3$
$3^0 = 1$
$3^{-1} = 1$

یہاں قوت نماعدد منفی عدد صحیح ہے $\longrightarrow$ $3^0 = 1$

آپ نے اوپر اعداد پر قوت کے پیٹرن سے دیکھا کہ قوت کم ہونے پر قیمت بھی کم ہو رہی ہے۔ کیا آپ 10^{-1} اور 3^{-1} کی قیمت بتا سکتے ہیں؟

آیئے ہم اِسے نکالنا سیکھیں۔

10.2 قوت نما عدد جب منفی عدد صحیح ہو

آپ جانتے ہیں کہ

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

$$10^2 = 10 \times 10 \quad = \frac{1000}{10} = \frac{10^3}{10}$$

$$10^2 = 10 \quad = \frac{100}{10} = \frac{10^2}{10}$$

$$10^0 = 1 \quad = \frac{10}{10} = \frac{10^1}{10}$$

$$10^1 \; = ?$$

یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ $10^2 = 100$ جو کہ 10^2 سے ایک بڑی قوت 10^3 کا دسواں حصہ یا $\left(\frac{1}{10}\right)$ حصہ ہے۔

اوپر کے پیٹرن کو آگے بڑھاتے ہیں۔

$$10^{-1} = 1 \div 10 - \frac{1}{10}$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10} \div 10 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{100} \div 10 = \frac{1}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$$

واضح ہے کہ 10 کی قوت اسے کم کی جاتی ہے تب اس کی قیمت پہلے کی قیمت کا $\frac{1}{10}$ واں حصہ ہو رہا ہے۔

اب 10^{-4} کی قیمت کیا ہوگی؟

مندرجہ ذیل کو سمجھیں

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

$$5^2 = 5 \times 5 = 25 = \frac{125}{5}$$

جس طرح 10^n کی قوتوں میں 1 کم ہونے پر
قیمت پہلے کی قیمت کا $\frac{1}{10}$ واں حصہ ہو جاتی ہے
اُس طرح 5^n کی قوتوں میں سے 1 کم کرنے پر
قیمت پہلے سے کتنی کم ہو رہی ہے۔

$$5^1 = 5 = \frac{25}{5}$$

$$5^0 = 1 = \frac{5}{5}$$

اوپر کے پیٹرن کو آگے بڑھانے پر

$$5^{-1} = 1 \div 5 = 1 \times \frac{1}{5}$$

$$5^{-1} = 1 \div 5 = 1 \times \frac{1}{5^2}$$

$$5^3 = \frac{1}{5^2} \div 5 = \frac{1}{5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{5^3}$$

اسی طریقہ پر 3^{-1} , 3^{-2} کی قیمت نکالئے

جیسا کہ ہم نے قبل میں دیکھا کہ مثبت اعداد کی قوت جیسے جیسے کم ہوتی ہے انکی قیمت بھی کم ہوتی جاتی ہے۔

$5^3 = 125$, $5^2 = 25$, $5^1 = 5$, $5^0 = 1$

$5^{-1} = \frac{1}{5}$, $5^{-2} = \frac{1}{25}$, $5^{-3} = \frac{1}{125}$

خود کر کے دیکھئے

سوچئے اور بتائیے کیا مثبت عدد کی کسی بھی قوت کے لئے اس کی قیمت 0 یا منفی عدد ہو سکتی ہے؟ خود سے الگ الگ مثبت اعداد لیکر الگ الگ قوتوں کیلئے کر کے دیکھئے۔

آپ اعداد پر منفی قوت کے پیٹرن میں یہ دیکھا کہ $10^{-2} = \frac{1}{10^2}$

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2}$$

کیا 10^2 کو بھی $10^2 = \frac{1}{10^{-2}}$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے؟

اوپر 10^{-2} کی قیمت رکھ کر دیکھو۔

$$\frac{1}{10^{-2}} = \frac{1}{1/10^2} = \frac{1}{1} \times 10^2 = 10^2$$

اسی طرح $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$ یا $3^2 = \frac{1}{3^{-2}}$

$5^{-2} = \frac{1}{5^2}$ یا $5^3 = \frac{1}{5^{-3}}$

اس طرح قوت نمائی شکل میں لکھے اعداد میں نسب نما (Denominator) کو شمار کنندہ (Numerator) کے مقام پر لے جانے پر قیمت وہی رہتی ہے لیکن اُنکی قوت کے نشاں بدل جاتے ہیں۔

$$\frac{1}{a^2} = a^{-2} \text{ یا } \frac{1}{a^{-2}} = a^2$$

عام طور پر ہم کہہ سکتے ہیں کہ کسی غیر صفر (Non-zero) قابل پیائش عدد a کے لئے $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ جہاں a ایک مثبت قابل پیائش عدد ہے۔ a^m, a^{-m} کا ضربی معکوس (Reciprocal) ہے۔

خود کرکے دیکھیے

ضربی معکوس لکھیے

(i) a^n	(ii) a^{-n}	(iii) 2^{-2}	(iv) 10^{-4}
(v) 5^{-2}	(vi) 3^2	(vii) 8^{16}	(viii) 7^m

آپنے اب یہ تو کر کے دیکھ ہی لیا کہ کسی مثبت عدد صحیح کی قوت جب گھٹائی جاتی ہے تو اس کی قیمت بھی گھٹتی جاتی ہے۔

آئے اب ذرا منفی اعداد صحیح کیلئے کرکے سمجھیں۔

$(-3)^4 = -3 \times -3 \times -3 - 3$

$= 9 \times 9$

$= 81$

$(-3)^3 = -3 \times -3 \times -3$

$= 9 \times -3$

$= -27$

$(-3)^2 = -3 \times -3 = 9$

$-3 \times -3 = ?$

کو ایسے بھی سمجھیے

$-3 \times 2 = -6$

$-3 \times 1 = -3$ +3

$-3 \times 0 = 0$ +3

$-3 \times -1 = 3$ +3

اس پیٹرن کو آپ آگے بڑھایئے۔

کیا آپ منفی عدد صحیح پر قوت ہونے پر انکی قیمتوں کے لئے کوئی اصول بنا سکتے ہیں۔

> واضح ہے کہ جب عدد صحیح کی قوت طاق (odd) ہوتی ہے تو قیمت منفی عدد حاصل ہوتی ہے اور جب قوت جفت (even) ہو تو قیمت مثبت عدد حاصل ہوتی ہے۔

خود کر کے دیکھئے

قیمت نکالئے۔

(i) $(-1)^5$ (ii) $(-1)^2$

(iii) $(-1)^4$ (iv) $(-5)^3$

10.3 قوت یا قوت نما عدد کے اصول (Laws of exponent)

پچھلے درجہ میں ہم سیکھ چکے ہیں کہ $a^m \times a^n = a^{m+n}$ جہاں a غیر صفر قابل، پیمائش عدد ہے اور m ، n مکمل عدد ہیں۔

کیا یہ اصول منفی قوت نما عدد رہنے پر بھی سچ ہے؟ ذیل کی مثالوں کو دیکھئے۔

(i) $2^{-5} \times 2^{-3}$ لینے پر

ہم جانتے ہیں کہ $2^{-5} = \dfrac{1}{2^5}$ اور $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3}$

$$2^{-5} \times 2^{-3} = \frac{1}{2^5} \times \frac{1}{2^3} \qquad \left[a^{-m} = \frac{1}{a^m}\right]$$

$$\frac{1}{2^5 \times 2^3} = \frac{1}{2^{5+3}} = \frac{1}{2^8}$$

$$= 2^{-8} \qquad \because (-5) + (-3) = -8$$

(ii) $3^{-2} \times 3^4$ کو حل کیجئے۔

$$3^{-2} \times 3^4 = \frac{1}{3^2} \times 3^4 = \frac{3^4}{3^2} = 3^{4-2} = 3^2$$

اسے اس طرح بھی حل کر سکتے ہیں

$3^{-2} \times 3^4 = 3^{(-2)+4} = 3^2 \quad (-2) + 4 = 2$

(iii) $(-a)^5 \times (-a)^2$ کو سہل کیجئے۔

$$(-a)^{-5} \times (-a)^2 = \frac{1}{(-a)^5} \times (-a)^2 = \frac{(-a)^2}{(-a)^5}$$

$$= (-a)^{2-5} \quad = (-a)^3 \qquad \boxed{-5+2=-3}$$

اوپر کی مثالوں سے ظاہر ہے کہ $a^m \times a^n = a^{m-n}$ کا اصول تب بھی ثابت ہے جب قوت نما عدد منفی ہو۔

خود کر کے دیکھئے۔

سہل کیجئے۔

(i) $2^{-3} \times 2^{-2}$ (ii) $(-3)^{-4} \times (-3)^{-3}$ (iii) $g^2 \times g^{-8}$

(iv) $5^2 \times 5^{-3} \times 5^4$ (v) $3^4 \div 3^6$ (iv) $7^{-4} \times 7^4$

اسی طرح آپ مندرجہ ذیل قوت نما اعداد کے اصولوں کو ثابت کر سکتے ہیں۔ جہاں a اور b غیر صفر قابل پیمائش اعداد ہیں اور m, n کوئی اعداد صحیح ہیں۔

(i) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ (iii) $a^m \times b^n = (ab)^m$

(iv) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ (v) $a^0 = 1$

آپ ان اصولوں کو منفی قوت نما میں بھی سیکھ چکے ہیں۔

آیئے مندرجہ بالا قوت نما اعداد کے اصولوں کا استعمال کرتے ہوئے مثالوں کو حل کرتے ہیں۔

مثال۔1 قیمت معلوم کیجئے۔

(i) $7^5 \div 7^3$ (ii) $a^3 \div a^7$ (iii) $(2^3)^2$

(iv) 2^{-3} (v) $\frac{1}{3^{-2}}$

حل:

(i) $7^5 \div 7^3 = 7^{5-3} = 7^2 = 49$ $\boxed{a^m \div a^n = a^{m-n}}$

(ii) $a^3 \div a^7 = a^{3-7} = a^{-4} = \frac{1}{a^4}$

(iii) $(2^3)^2 = 2^{3\times2} = 2^6 = 64$

(iv) $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

(v) $\dfrac{1}{3^{-2}} = 3^2 = 9$

مثال۔2 8^{-2} کو قاعدہ (Base) 2 پر قوت کی شکل میں لکھیے۔

حل:

$$\boxed{(a^m)^n = a^{mn}}$$

$$\begin{aligned}(8^{-2}) &= (2\times2\times2)^{-2}\\ &= (2^3)^{-2}\\ &= 2^{-6}\end{aligned}$$

مثال۔3 سہل کیجیے

(i) $(2)^5 \times (2)^{-6}$ (ii) $(-5)^4 \times (-5)^{-6}$ (iii) $2^3 \div 2^{-4}$

حل:

(i) $(2)^5 \times (2)^{-6} = 2^{5+(-6)} = 2^{5-6} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

$$\boxed{a^m \times b^n = a^{m+n}}$$

(ii) $(-5)^4 \times (-5)^{-6} = (-5)^{4+(-6)} = (-5)^{-2} = \dfrac{1}{-5^2}$

(iii) $2^3 \div 2^{-4} = 2^{3-(-4)} = 2^{3+4} = 2^7$

مثال: 4 سہل کیجیے اور جواب قوت نما کی شکل میں لکھیے۔

(i) $(-2)^{-3} \times (4)^{-3} \times (-5)^{-3}$ (ii) $\dfrac{1}{4} \times (3)^{-2}$

(iii) $(-3)^4 \times \left(\dfrac{5}{3}\right)^4$ (iv) $(3^{-1} \times 5^{-1}) \div 4^{-1}$ (v) $(3^6 \div 3^7) \times 3^{-5}$

حل:

(i) $(-2)^{-3} \times (4)^{-3} \times (-5)^{-3} = (-2\times4\times-5)^{-3}$

$= (40)^{-3}$ $\boxed{a^m \times b^m \times c^m = (abc)^m}$

$= \dfrac{1}{40^3}$

(ii) $\frac{1}{4} \times (3)^{-2} = \frac{1}{2^2} \times (3)^{-2} = 2^{-2} \times 3^{-2}$

$= (2 \times 3)^{-2}$

$= 6^{-2} = \frac{1}{6^2}$

(iii) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4 = (-1 \times 3)^4 \times \frac{4^4}{3^4}$

$= (-1)^4 \times 3^4 \times \frac{5^4}{3^4} = 1 \times 5^4 = 5^4$

(iv) $(3^{-1} \times 5^{-1}) \div 4^{-1} = \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{5}\right) \div \frac{1}{4}$

$= \left(\frac{1}{15}\right) \div \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{15} \times 4 = \frac{4}{15}$

(v) $(3^6 \div 3^7)^4 \times 3^{-5} = (3^{6-7})^4 \times 3^5$

$= (3^{-1})^4 \times 3^{-5}$

$= (3)^{-4} \times 3^{-5}$

$= (3)^{(-4)+(-5)}$

$= 3^{-9}$

مثال 5: $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{3^{-2}}{4^{-2}} = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$$

$$\because \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{3^{-2}}{4^{-2}} = \frac{\frac{1}{3^2}}{\frac{1}{4^2}}$$

$$= \frac{4^2}{3^2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

اسلئے $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

مثال: 6 حل کیجئے

(i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ (ii) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\}\div\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

(iii) $(4^{-1}+8^{-1})\div\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ (iv) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-2}\times\left(\frac{8}{5}\right)^{-5}$

ہم جانتے ہیں $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$

حل:

(i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=\left(\frac{2}{1}\right)^{3}+\left(\frac{3}{1}\right)^{2}+\left(\frac{4}{1}\right)^{2}$

$=2^3+3^2+4^2=8+9+16=33$

(ii) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\}\div\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=\left\{\left(\frac{3}{1}\right)^{2}-\left(\frac{2}{1}\right)^{3}\right\}\div\left(\frac{4}{1}\right)^{2}$

$=(3^2-2^3)\div4^2$

$=(9-8)\div16$

$=1\div16=\frac{1}{16}$

(iii) $\left(4^{-}+8^{-1}\right)\div\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$

$=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\div\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{2+1}{8}\right)\div\frac{3}{2}$

$=\frac{3}{8}\div=\frac{3}{8}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$

(iv) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-2}\times\left(\frac{8}{5}\right)^{-3}=\left(\frac{8}{5}\right)^{2}\times\left(\frac{5}{8}\right)^{5}$

$=\frac{8^2\times5^5}{5^2\times8^5}=\frac{5^5}{5^2}\times\frac{8^2}{8^5}$

$=5^3\times8^{-3}=\frac{5^3}{8^3}=\frac{125}{512}$

ایک اور طریقہ

$\left(\frac{5}{8}\right)^{-2}\times\left(\frac{8}{5}\right)^{-5}$

$=\left(\frac{8}{5}\right)^{2}\times\left(\frac{8}{5}\right)^{-5}$

$a^m\times a^n=a^{m+n}$

$=\left(\frac{8}{5}\right)^{-3}=\left(\frac{5}{8}\right)^{3}=\frac{125}{512}$

مثال۔7 اگر $(-2)^{x+1} \times (-2)^3 = (-2)^5$ تو x کی قیمت معلوم کیجئے

حل:

$$(-2)^{x+1} \times (-2)^3 = (-2)^5$$
$$\Rightarrow (-2)^{x+1+3} = (-2)^5$$
$$\Rightarrow (-2)^{x+4} = (-2)^5$$

چونکہ دونوں طرف کی قوتوں کے قاعدے برابر ہیں۔ اسلئے اُنکی قوتیں بھی برابر ہونگی۔ اسلئے

$$x + 4 = 5$$
$$\Rightarrow x = 5 - 4 = 1$$

اب ذرا سوچئے اگر قاعدہ کسی دوسرے عدد کی جگہ 1 یا 1- ہوتو

چونکہ $1^0 = 1^1 = 1^2 = 1^3 = 1^4 = 1^{-2} = \ldots\ldots = 1$

یا $1 = (1)^n$ لامحدود n کے لئے ہوگا۔

اسی طرح $(-1)^0 = (-1)^2 = (-1)^4 = (-1)^{-2} = \ldots\ldots = 1$

اور $(-1)^1 = (-1)^3 = (-1)^5 = \ldots\ldots = -1$

اس لئے قاعدہ 1 یا 1- سے الگ ہونے پر ہی قوت نما برابر ہونگے۔

اسلئے $x^n = x^m$

اگر $x \neq 1, -1$

تو $n = m$

سوالنامہ۔10.1

.1 قیمت معلوم کیجئے۔ (i) 2^{-3} (ii) 4^{-3} (iii) $(-3)^{-4}$ (iv) $(-2)^{-3}$

.2 قیمت معلوم کیجئے۔

(i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$ (ii) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$ (iii) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-5}$ (iv) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

.3 قیمت معلوم کیجئے۔

(i) $\left(\frac{5}{3}\right)^2 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2$ (ii) $\left(\frac{5}{6}\right)^6 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{-4}$

(iii) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ (iv) $\left(\frac{9}{8}\right)^{-3} \times \left(\frac{9}{8}\right)^2$

4. سہل کیجیے

(i) $\left(\frac{5}{9}\right)^{-2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{0}$ (ii) $\left(\frac{-3}{5}\right)^{-4} \times \left(\frac{-2}{5}\right)^{2}$

(iii) $\left(\frac{-2}{3}\right)^{-3} \times \left(\frac{-2}{3}\right)^{-2}$

5. قیمت معلوم کیجیے

(i) $\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}\right\}^{2}$ (ii $\left[\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^{2}\right\}^{-2}\right]^{-1}$ (iii) $\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right\}^{-2}$

6. سہل کیجیے اور جواب کو مثبت قوت نما کی شکل میں ظاہر کیجیے۔

(i) $(-3)^5 \div (-3)^9$ (ii) $\left(\frac{1}{3^3}\right)^{2}$ (iii) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^{4}$

(iv) $(3^{-7} \div 3^{-10}) \times 3^{-5}$

7. قیمت معلوم کیجیے

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$$

8. قیمت معلوم کیجیے

(i) $\left(5^{-1} + 3^{-1} + 2^{-1}\right)^{0}$ (ii) $\left(4^{0} + 8^{-1}\right) \times 2^{3}$

(iii) $\left(2^{-1} \times 4^{-1}\right) \div 2^{-3}$

9. قیمت معلوم کیجیے

(i) $\left(5^{-1} \times 2^{-1}\right) \div 6^{-1}$ (ii) $\frac{16^{-1} \times 5^{3}}{2^{-4}}$

10. x کی قیمت معلوم کیجئے

$$\text{(i) } \left(\frac{4}{3}\right)^{-4} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} \qquad \text{(ii) } 7^x \div 7^{-3} = 7^5$$

$$\text{(iii) } (4)^{2x+1} \div 16 = 64$$

11. سہل کیجئے

$$\text{(i) } \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right\}^{-1} \qquad \text{(ii) } \frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 125}{5^{-7} \times 6^{-5}}$$

12. سہل کیجئے

$$\frac{25 \times t^{-4}}{5^{-3} \times 5 \times t^{-8}} \ (t \neq 0)$$

$$\boxed{.4 = \frac{4}{10} \qquad .03 = \frac{3}{100}}$$

10.3. اعشاریہ اعداد سسٹم (Decimal Number System)

آپ کو اعداد کو اُنکے وسیع یا پھیلی ہوئی شکل میں لکھنا جانتے ہیں۔

$$56832 = 5 \times 10000 + 6 \times 1000 + 8 \times 100 + 3 \times 10 + 2 \times 1$$

یا $56832 = 5 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 2 \times 10^0$

آپ بھی 666,1025,525 کو وسیع شکل میں لکھئے۔

کیا آپ 2349.49 کو وسیع شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں؟ غور کیجئے۔

ہم جانتے ہیں کہ۔

$$2349.43 = 2 \times 1000 + 3 \times 100 + 4 \times 10 + 9 \times 1 + \frac{4}{10} + \frac{3}{100}$$

$$= 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10 + 9 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2}$$

آپ 2463.04 اور 3504.249 کو قوت نماؤں کا استعمال کرتے ہوئے پھیلی ہوئی شکل میں لکھئے۔

10.4. چھوٹے اعداد کو قوت نماؤں کا استعمال کر کے معیاری شکل میں لکھنا

جب کسی عدد کو 1.0 اور 9.9 یا اس کے بیچ کے ایک اعشاریہ عدد اور 10 کی قوت کے حاصل ضرب کی شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے۔ تو اس شکل کو معیاری شکل (Standard Form) کہتے ہیں۔ مثال کیلئے

$$150{,}000{,}000{,}000 = 1.5 \times 10^{11}$$

اسی طرح بہت چھوٹے اعداد جیسے لال خون کے ذرّات کا اوسط قطر (Daimeter) 0.000007m= یا کمپیوٹر چپ کے ایک تار کا قطر 0.000003m= جیسے چھوٹے اعداد کو معیاری شکل میں کیسے دکھائینگے؟ غور کیجئے۔

ہم جانتے ہیں کہ

$$0.000007 = \frac{7}{100000}$$

$$= \frac{7}{10^6}$$

$$= 7 \times \frac{1}{10^6}$$

$$= 7 \times 10^{-6}$$

0.000001 میں اعشاریہ 6 مقام دائیں طرف کھسک گیا ہے۔ 0.000007 123456

اسی طرح ایک کاغذ کی موٹائی 0.0016 سنٹی میٹر ہے تو معیاری شکل میں

(تین اعشاریہ دائیں طرف) $\frac{1.6}{1000}$ = عدد 0.0016

$$= 1.6 \times 10^{-3}$$

خود کر کے دیکھئے

مندرجہ ذیل اعداد کو معیاری شکل میں لکھئے۔

(i) 0.000003 (ii) 0.00034 (iii) 0.0000364

(iv) 8620000 (v) 1,500,000,000

10.4.1 بہت بڑے اور بہت چھوٹے اعداد کا موازنہ

زمین کا وزن 5.97×10^{24} کیلوگرام اور چاند کا وزن 7.35×10^{22} کیلوگرام ہے تو زمین کا وزن کتنے کیلوگرام زیادہ ہے؟

گھٹانے پر

$$5.97 \times 10^{24}\,kg - 7.35 \times 10^{22}\,kg$$
$$= 5.97 \times 100 \times 10^{22}\,kg - 7.35 \times 10^{22}\,kg$$
$$= 10^{22}(597 - 7.35)\,kg$$ (10^{22} مشترک نکالنے پر)
$$= 10^{22} \times 589.65\,kg$$

زمین کا وزن $10^{22} \times 589.65 =$ کیلوگرام زیادہ ہے۔

اسی طرح سورج اور زمین کے بیچ کی دوری $1.496 \times 10^{11}\,m$ اور زمین و چاند کے بیچ کی دوری $3.84 \times 10^{8}\,m$ ہے تو دونوں دوریوں کا فرق

$$= (1.496 \times 10^{11} - 3.84 \times 10^{8})m$$
$$= (1.496 \times 10^{3} \times 10^{8} - 3.84 \times 10^{8})m$$
$$= (1.496 \times 1000 - 3.84)10^{8}\,m$$
$$= (1496 - 3.84)10^{8}\,m$$
$$= 1492.16 \times 10^{8}\,m$$

چھوٹے (مختصر ترین) اعداد کا موازنہ

لال خون کے خلیوں کا سائز $= 7 \times 10^{-6}\,m = 0.000007m$

پودوں کے خلیوں کا سائز $= 1.275 \times 10^{-5}\,m = 0.00001275m$

دونوں کا فرق $= (1.275 \times 10^{-5} - 7 \times 10^{-1} \times 10^{-5})m$

$$= (1.275 - .7) \times 10^{-5}\,m$$
$$= .575 \times 10^{-6}\,m$$

اس کا تقسیم کے ذریعہ موازنہ کرنے پر

$$\frac{\text{پودوں کے خلیوں کا سائز}}{\text{لال خون کے خلیوں کا سائز}} = \frac{1.275 \times 10^{-5}}{7 \times 10^{-6}}$$

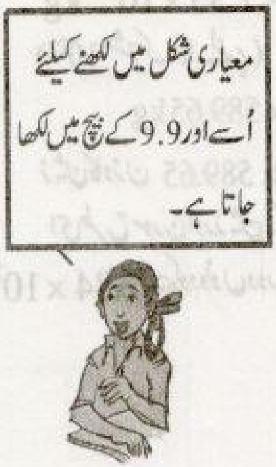
$$= \frac{1.275 \times 10^{-5-(-6)}}{7} = \frac{1.275 \times 10^{1}}{7} = \frac{12.75}{7}$$

$\cong 2$ (تقریباً 2 سے کم)

بڑے اعداد کا تقسیم کے ذریعہ موازنہ کرنے پر، سورج کا قطر 1.4×10^9 m اور زمین کا قطر 1.2756×10^7 m ہے ان کے قطروں کا موازنہ کرتے ہیں۔

$$\frac{\text{سورج کا قطر}}{\text{زمین کا قطر}} = \frac{1.4 \times 10^9}{1.2756 \times 10^7} = \frac{1.4 \times 10^{9-7}}{1.2756}$$ (جو کہ تقریباً 100 گنا ہے)

$$= \frac{1.4 \times 10^2}{1.2756} = \frac{1.4 \times 100}{1.2756}$$



مثال۔8 معیاری شکل میں بدلئے۔

(i) 0.000003 (ii) 0.000,0003,54

حل: (i) $0.000003 = 3 \times 10^{-6}$

(ii) $0.00000354 = 3.54 \times 10^{-6}$

مثال 9. درج ذیل اعداد کو عام شکل میں بدلئے۔

(i) 2.43×10^6 (ii) 4.3×10^{-4} (iii) 5×10^{-5}

حل:

(i) $2.43 \times 10^6 = 2.43 \times 1{,}000{,}000 = 2430000$

(ii) $9.3 \times 10^{-4} = \frac{9.3}{10^4} = \frac{9.3}{10000} = 0.00093$

(iii) $5 \times 10^{-5} = \frac{5}{10^5} = \frac{5}{100000} = 0.00005$

سوالنامہ۔ 10.2

1. مندرجہ ذیل اعداد کو معیاری شکل میں ظاہر کیجئے۔

(i) 0.000000004 (ii) 0.00000000032

(iii) 0.000000000397 (iv) 776000000000

(v) 806000000000 (vi) 4603500000

2. مندرجہ ذیل اعداد کو عام شکل میں ظاہر کیجئے۔

(i) 7.1×10^{-7} (ii) 3.02×10^{-5} (iii 5×10^{-9}

(iv) 1×10^{9} (v) 2.0001×10^{10} (vi) 3.46129×10^{6}

3. ذیل کے بیانات کے اعداد کو معیاری شکل میں بدل کر بیان لکھئے۔

(i) آدمی کے بال کی موٹائی کا قطر تقریباً 0.00002cm ہوتی ہے۔

(ii) پودوں کے خلیے کی ناپ 0.00001275m ہے

(iii) بیکٹیریا کی ناپ 0.0000005m ہے۔

(iv) ایک الکٹرون کا بار (Charge) 0.000,000,000,000,000,00016 کولمب ہوتا ہے۔

(v) مائیکرون $\frac{1}{1000000}$ میٹر کے برابر ہوتا ہے۔

4. ایک کے اوپر ایک کر کے 10 شیشے رکھے گئے ہیں۔ جسمیں ہر ایک کی موٹائی 10mm اور ہر ایک دو شیشے کے بیچ کاغذ کی ایک شیٹ ہے جسمیں ہر ایک کی موٹائی 0.07mm ہے اس کی کل موٹائی کو معیاری شکل میں لکھئے۔

ہم نے سیکھا

1. منفی قوت نماؤں میں والے اعداد درج ذیل اصولوں کا پالن کرتے ہیں۔

(a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (b) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

(c) $(a^m)^n = a^{mn}$ (d) $a^m \times b^n = (ab)^m$

(e) $a^0 = 1$ (f) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

2: منفی قوت نماؤں میں

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ اور $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

3. منفی قوت نماؤں کا استعمال بہت چھوٹے اعداد کو معیاری شکل میں بدلنے میں ہوتا ہے۔

*

باب - 11　بلاواسطہ (سیدھا اور بالواسطہ (اُلٹا) تناسب

(Direct and Indirect Proportion)

11.1 تمہید

آؤ ہم دو الگ الگ حالات پر چرچا کریں۔

پہلی حالت

راہل کی ممی 2 کپ چائے بنانے کیلئے 200ml دودھ 300ml پانی چینی اور چائے کی پتی کام میں لیتی ہے۔ اب اگر انہیں 4 کپ چائے بنانی ہو تو وہ کتنا دودھ اور پانی لینگی۔

اسی طرح آپ نے سنا ہوگا جیسے جیسے آبادی میں اضافہ ہو رہا ہے ہمارے قدرتی ذرائع جیسے جنگل، پانی، غذائی اجناس کی تقسیم پر دباؤ بڑھتا جا رہا ہے۔

لیئی آبادی میں اضافہ ہونے پر غذائی اجناس کی پیداوار زیادہ کرنی ہوگی

اوپر دی گئی حالتوں پر غور کریں تو ہم پاتے ہیں کہ دو اعداد کس طرح ایک دوسرے پر منحصر ہیں۔ کسی ایک کی قیمت بدلنے پر دوسرے کی قیمت بھی بدل جاتی ہے۔

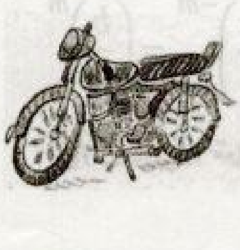
آپ اسی طرح کے دوسری مثالیں اپنے آس پاس سے دیجئے۔

اب ذرا ان مثالوں پر غور کیجئے۔

دوسری حالت

ایک مزدور ایک حوض کو پانچ دن میں بناتا ہے تو دو مزدور اسی حوض کو کتنے دن میں بنائنگے؟

ایک گاڑی گھنٹہ/40km کی چال سے 60km چلتی ہے۔ اگر گاڑی کی چال 60km / گھنٹہ ہوتی تو اسے اُتنی ہی دوری طئے کرنے میں کتنا وقت لگے گا؟



اگر آپ اوپر دی گئی حالتوں کو دیکھینگے تو پائنگے کہ ایک عدد میں تبدیلی سے دوسرے عدد میں تبدیلی ہو رہی ہے۔

کیا آپ پہلی حالت اور دوسری حالت میں کوئی فرق بتا سکتے ہیں۔

سیدھا تناسب (Direet Pooportion)

آیئے پہلی حالت کو تھوڑا اور سمجھنے کی کوشش کریں۔ اگر 1 کیلوگرام چینی کی قیمت 27 روپیہ ہے تو 3 کیلوگرام کی چینی کی قیمت کیا ہوگی؟ 81 روپیہ

اسی طرح آپ کو 5 کیلوگرام چینی اور 10 کیلوگرام چینی کی قیمت پوچھی جائے تو آپ اسے معلوم کر سکتے ہیں؟

اب ذرا اس حالت کو سمجھنے کی کوشش کریں۔

رمیش کی موٹر سائیکل 1 لیٹر پیٹرول میں 60 کیلومیٹر چلتی ہے۔

پٹرول (لیٹر میں)	1	3	4	6	7	9	10	---	12
طئے کی گئی دوری (km)	60	180	---	360				660	720

اوپر دیئے گئے مثال میں آپنے دیکھا کہ جیسے جیسے پیٹرول کی مقدار بڑھتی ہے طئے کی گئی دوری بڑھتی جاتی ہے

ساتھ ہی اگر آپ اعداد کو نسبت کی شکل میں دیکھینگے۔ تو آپ پائنگے کہ یہاں دو اعداد ہیں ایک پیٹرول (لیٹر) اور دوسری دوری (کیلومیٹر)

اب اگر پٹرول x_1 اور دوری x_2 لیا جائے تو آپ اسے نسبت کی شکل میں اس طرح لکھینگے۔

$x_1 : x_2$ یا $\frac{x_1}{x_2}$

آپ اوپر کے جدول سے الگ الگ پٹرول کی مقدار لیکر اُنکی نسبت نکالیں۔ جیسے

لیٹر $x_1=1$ پٹرول

لیٹر $x_2=4$ پٹرول

تب $x_1 : x_2 = 1:4$

اسی طرح اگر x_1 اور x_2 سے متعلق طے کی گئی دوری کو y_1 اور y_2 سے دکھائیں تو اُنکی نسبت ہوگی۔ $y_1 : y_2$

1 لیٹر میں طے کی گئی دوری = y_1 = 60

4 لیٹر میں طے کی گئی دوری = y_2 = 240

تب $60 : 240 = y_1 : y_2$

یا $\frac{60}{240}=\frac{1}{4}$

آپ پائنگے کہ $x_1 : x_2 :: y_1 : y_2$ ایک جیسے تناسب میں ہونگے اسے ہم بلاواسطہ تناسب یا سیدھا تناسب بھی کہتے ہیں۔ یہاں x_1 اور y_2 خارجی رکن اور x_2 اور y_1 داخلی رکن کہلاتے ہیں۔

آپ اوپر دیئے گئے جدول سے x_2 اور y_1 کی الگ الگ قیمتیں لیکر اُن سے متعلق y_1 اور y_2 کی قیمت لیں اور اُن کی نسبتوں کا موازنہ کریں۔

یہاں آپ نے دیکھا $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$ کراس ضرب کرنے پر $\frac{x_1}{x_2} \times \frac{y_1}{y_2}$

$x_1 : y_2 = x_2 y_1 : \frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$

داخلی رکن کا حاصل ضرب = خارجی رکن کا حاصل ضرب

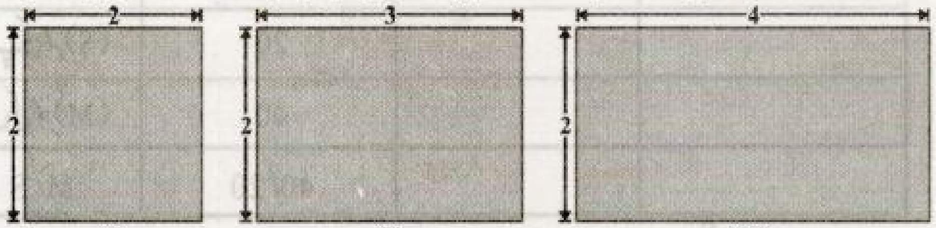
x اور y کی الگ الگ قیمتوں کو ان میں رکھ کر دیکھیں۔

اس طرح آپ پائنگے کہ ان میں اعداد کا گھٹنا یا بڑھنا ایک متعین نسبت میں ہی ہو رہا ہے۔

اگر یہ برابر نسبت میں نہ ہوں تو یہ اعداد متناسب نہیں ہونگے

نیچے دی گئی حالتوں میں بتائیے کون سے اعداد تناسب میں ہیں؟

مثال۔ اگر مستطیل کی چوڑائی کو ہر بار 2cm مان لیا جائے اور لمبائی بالترتیب 4,3,2۔۔۔۔ لی جائے تب



(i) (ii) (iii)

مستطیل کا متغیر ضلع (S)	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
(S)	2	3	4	5	6	7
رقبہ cm^2 میں $(2 \times S) = A$	A_1 4	A_2 6				
تناسب A/S	$\frac{4}{2} = 2$					

آپ s اور A کے بارے میں کیا پاتے ہیں؟ ان میں ایک برابر نسبت میں اضافہ ہو رہا ہے۔ کیا ہر بار ایک جیسا ہی رہتا ہے؟

اوپر کے جدول میں آپ یہ بھی دیکھ ہے ہیں کہ

$$S_1 : S_2 = A_1 : A_2$$

کیونکہ $S_1 : S_2 = \quad 2 : 3$

$$A_1 : A_2 = 4 : 6 = 2 : 3$$

جانچ کیجئے کہ کیا $S_2 : S_3 = A_2 : A_3$ اور $S_3 : S_4 = A_3 : A_4$

کیا ہر بار سیدھا تناسب برابر حاصل ہوا

اب ذرا اس تعلق کو دیکھئے

مثال۔2 آپ اپنے لئے نیچے دیئے گئے جدول کو بھریئے

	پانچ سال پہلے	موجودہ عمر	پانچ سال بعد عمر
آپ کی عمر (S)	20		
ماں کی عمر (M)	40		
M/S	40/20		

آپ کیا دیکھتے ہیں؟ کیا S اور M میں ساتھ ساتھ (اضافہ) یا کمی ہوتی ہے؟ کیا $\frac{S}{M}$ ہر بار وہی ہے؟ نہیں۔ آپ اس عمل کو اپنے دوسرے دوستوں کے ساتھ دہرا سکتے ہیں اور خود کے ذریعہ جمع کیے گئے آنکڑوں کو لکھ سکتے ہیں۔

اس طرح آپ نے دیکھا کہ یہ ضروری نہیں کہ ساتھ ساتھ بڑھنے والے متغیر ہمیشہ تناسب میں ہی ہوں۔ مثال کے لئے۔

کسی پودے کی ابتدائی بڑھوتری جس درسے ہوتی ہے۔ یہ ضروری نہیں ہے۔ کہ بعد میں بھی وہ اُسی تناسب میں ہوں۔ افراد کے وزن اور لمبائی میں تبدیلی کسی طئے شدہ تناسب میں نہیں ہوتی ہے۔

خود کر کے دیکھئے

1. مندرجہ جدول کو دیکھئے اور معلوم کیجئے کہ کیا x اور y تناسب میں ہیں؟

(i)

x	18	16	14	12	10	8	6
y	32	30	28	26	24	22	20

(ii)

x	15	12	9	6	3
y	20	16	12	8	4

(iii)

x	1	4	6	13	15	a
y	4	16	24	52	60	4a

2. قیمت خرید1000 روپیہ پر ایک تاجر الگ الگ دروں پر نفع لیکر اُس چیز کو بیچے تو دراور نفع کے بیچ نسبت معلوم کیجیے۔

در(R)	5٪	15٪	20٪	25٪
نفع(P)				
کیا یہ تناسب میں ہے				

آیئے کچھ مثال حل کریں۔ جہاں ہم سیدھے تناسب کے تصور کا استعمال کرینگے۔

مثال۔3 اگر ایک خاندان کا ایک فرد اوسطاً $\frac{1}{2}$ کیلوگرام چینی کا استعمال کرتا ہے۔ تب اگر خاندان میں بالترتیب 4اور 6افراد ہوں تو چینی کے مقدار کیا ہوگی؟

حل: مان لیجئے کے افراد کی تعداد کو(M) سے اور استعمال کی جانے والی چینی کی مقدار کو(S) سے دکھاتے ہیں تب جدول کچھ اس طرح بنے گا

M	1	4	6
S	½	S_2	S_2

جیسے جیسے افراد کی تعداد میں اضافہ ہوتا ہے اُن کے ذریعہ استعمال کی جانے والی چینی کی مقدار میں بھی اُسی مناسبت سے اضافہ ہوگا۔ اس لئے یہ تناسب کی حالت ہے۔

اس لئے ہم $\frac{S_1}{M_1} = \frac{S_2}{M_2}$ جو کہ $\frac{S_1}{S_2} = \frac{M_1}{M_2}$ کی شکل میں بھی لکھا جاتا ہے کا استعمال کرینگے۔

(1) یہاں $S_1 = \frac{1}{2}$, $M_1 = 1$ اور $M_2 = 4, S = ?$

اسلئے $\frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{S_2}{4}$

یا $\frac{1}{2} = \frac{S_2}{4}$

$S_2 = \frac{1 \times 4}{2}$, $S_2 = \frac{4}{2} = 2\text{kg}$

(ii) $M_3 = 6$ تو $S_3 = ?$

$\frac{S_1}{M_1} = \frac{S_3}{M_3}$ آپ $\frac{S_1}{M_1}$ کی جگہ $\frac{S_2}{M_2}$ کو بھی کام میں لے سکتے ہیں

$\frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{S_3}{6}$ یا $\frac{S_2}{M_2} = \frac{S_3}{M_3}$

$S_3 = 6 \times \frac{1}{2}$ یا $\frac{2}{4} = \frac{S_3}{6}$ یا

$S_3 = 3$ یا $S_3 = \frac{6 \times 2}{4} = 3$ یا

مثال۔4 10 میٹر اونچے درخت کا سایہ صبح کے وقت 18 میٹر ہے تب اسی وقت 120 میٹر ٹاور کا سایہ کتنا ہوگا۔

حل:- مان لیجئے اونچائی کو x میٹر اور سایہ کو Y میٹر مان لیتے ہیں۔تب

حقیقی اونچائی (x)	10	120
سایہ (y)	18	y_2

یہ تو واضح ہے کہ چیز جتنی بڑی ہوگی اُسکا سایہ بھی وقت کے مطابق بڑا ہی ہوگا۔
اس لئے چیز کی حقیقی اونچائی اور سایہ کے بیچ کا تعلق سیدھا تناسب ہی ہوگا۔
سیدھے تناسب کی خصوصیت سے

$x_1 : x_2 :: y_1 : y_2$

$10 : 120 :: 18 : y_2$

خارجی رکنوں کا حاصل ضرب = داخلی رکنوں کا حاصل ضرب

$10 \times y_2 = 120 \times 18$

$$y_2 = \frac{120 \times 18}{10} = 216$$

اسلئے $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ سے

$\frac{10}{18} = \frac{120}{y_2}$

$10 \times y_2 = 18 \times 120$

$$y_2 = \frac{18 \times 120}{10} = 216$$

مثال:- 5 نیچے کے جدول میں a اور b کی قیمت معلوم کیجئے اگر $\frac{x}{y}$ = ایک ساکن (Constant) عدد ہے۔

x	5	a	4
y	7.5	30	b

حل:- دیا گیا ہے کہ a اور b بلاواسطہ یا سیدھے تناسب اعداد ہیں۔

اس لئے $\frac{x}{y} = k =$ ایک ساکن عدد ہوگا۔

$$\frac{5}{7.5}=\frac{50}{75}=\frac{2}{3} \qquad \left(\frac{x}{y}=k\right)$$

اسلئے $k=\frac{2}{3}$

یا $\frac{2}{3}=\frac{a}{30}$ تب $\frac{2}{3}=\frac{a}{30}$

یا $\frac{2}{3}\times 30=a$

یا $a=20$

اسی طرح $k=\frac{2}{3}$ کو $\frac{4}{b}$ کے برابر رکھنے پر

یا $\frac{2}{3}=\frac{4}{b}$

یا $b=4\times\frac{3}{2}$

یا $b=6$

مثال:- 6 اگر 8 سکّوں کا وزن 720 گرام ہو تو طریقہ وحدانی سے درج ذیل کا وزن معلوم کیجئے۔

12 سکّوں (i) 5 سکّوں (ii)

100 سکّوں (iii) 20 سکّوں (iv)

حل:- 8 سکّوں کا وزن = 720 گرام

تب 1 سکہ کا وزن = $\frac{720}{8}$ = 90 گرام

اب جب اس کے کا وزن 90 گرام ہے

تو 5 سکّوں کا وزن ہوگا = 90 گرام × 5 = 450 گرام

اور 12 سکّوں کا وزن = 90 گرام × 12 = 1080 گرام

20 سکّوں کا وزن = 90 گرام × 20 = 1800 گرام

100 سکّوں کا وزن = 90 گرام × 100 = 9000 گرام

سکّوں کی تعداد اور اُن کے وزن کا جدول بنانے پر

سکّوں کی تعداد (x)	8	1	5	12	20	100
وزن گرام میں (y)	720	90	450	1080	1800	9000
نسبت	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90

اس طرح آپ نے دیکھا کہ جب اعداد کا تعلق بلا واسطہ تناسب میں ہوتا ہے۔ تو وہاں ہم وحدانی اصول کا بھی استعمال کر سکتے ہیں۔

مثال۔7 ایک بس 45km/ فی گھنٹہ یکساں رفتار سے چل رہی ہے۔

(i) وہ 30 منٹ میں کتنی دوری طئے کریگی۔

(ii) 135 کیلومیٹر کی دوری طئے کرنے میں بس کتنا وقت لے گی

حل:- چونکہ بس کی چال کو ہم یکساں مانا ہے۔ اس لئے طئے کی گئی دوری اور وقت میں سیدھا تناسب ہوگا۔

مان لیجئے کہ 30 منٹ میں طئے کی گئی دوری (کیلومیٹر میں) k ہے اور 135 کیلومیٹر کی دوری طئے کرنے میں لگا وقت (منٹوں میں) y ہے۔

1 گھنٹہ = 60 منٹ

طئے کی گئی دوری (km) 45 x 135

y   30   60   (منٹ) لیا گیا وقت ہمیں معلوم ہے۔

$$\frac{45}{60}=\frac{x}{30} \quad \text{یا} \quad x=\frac{45\times 30}{60}=22\frac{1}{2}\ \text{km}$$

اسلئے 30 منٹ میں طئے کی گئی دوری = $22\frac{1}{2}$ کیلومیٹر

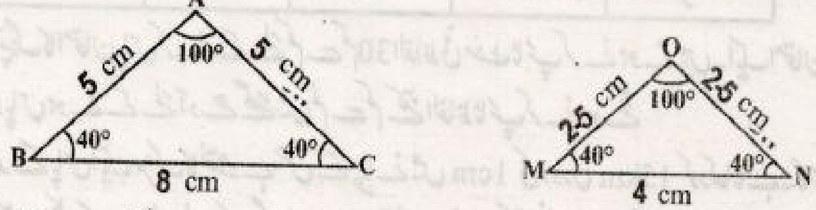
(II) ساتھ ہی

$$\frac{45}{60}=\frac{135}{y} \quad \text{یا} \quad y=\frac{135\times 60}{45}$$

y = 180 منٹ

یا 3 گھنٹے

تناسب کا یا استعمال اپ کئی دوسرے اہم بنیادی اصولوں کی تشریح کرنے کے لئے بھی کرتے ہیں۔ جیسے متماثلث اور نقشہ (Map) کو دیکھانے میں



اوپر دیئے گئے مثلثوں کے نظیری زادیے (Correspounding angle) برابر اور نظیری اضلاع متناسب ہیں جیسے

$$\frac{AB}{MO}=\frac{5}{2.5}=\frac{2}{2}$$

$$\frac{AC}{ON}=\frac{5}{2.5}=\frac{2}{1}$$

$$\frac{BC}{MN}=\frac{8}{4}=\frac{2}{1}$$

اس طرح ہر ضلع 1 : 2 کے نسبت میں ہی ہے

اسی طرح نقشوں کے بنانے میں بھی پیمانہ میں دو نقطوں کی دوری اور حقیقی علاقہ پر دو نقطوں کل دوری کا تناسب ہوتا ہے۔

مثال کے لئے۔ اگر نقشہ پر 1cm حقیقی دوری 10 کیلومیٹر کو بتاتا ہے
(یعنی 1 cm : 10 km یا کیلومیٹر کو سنٹی میٹر میں بدلنے
(1cm : 100000 cm پر
تو اسی نقشہ پر 2 cm حقیقی دوری 20 km دکھائے گا۔

سوالنامہ۔ 11.1

1. مندرجہ ذیل جدول میں x اور y متناسب (براہ راست تناسب میں) ہیں یا نہیں؟ معلوم کیجئے

x	3	6	15	20	30
y	12	24	45	60	120

x	1	3	9	20
y	1.5	4.5	13.5	30

2. ٹائپنگ کا امتحان پاس کرنے کے لئے کم سے کم 30 الفاظ فی منٹ ٹائپ کرنے ہوتے ہیں۔ ایک امتحان دینے والے کو پاس ہونے کے لئے آدھے گھنٹے میں کم سے کم کتنے الفاظ ٹائپ کرنے ہونگے

3. ملکند کے پاس ایک سڑک کا نقشہ ہے جس کے پیمانے میں 1cm کی دوری 15km کو دکھانا ہے۔ گاندھی نگر سے ذاکر حسین سرکل تک جانے والی سڑک اگر 75km ہے تو نقشہ پر اُسے کتنے سنٹی میٹر سے دکھایا جائیگا؟

4. اگر 25 میٹر کپڑے کی قیمت 337.50 روپیے ہو تو
   (i) اسی طرح کے 60 میٹر کپڑے کی قیمت کیا ہوگی؟
   (ii) 1620 روپے میں اس طرح کا کتنی لمبائی کا کپڑا خریدا جاسکتا ہے؟

5. مکان کے ایک ماڈل میں اُسکی اونچائی 5 سنٹی میٹر اور لمبائی و چوڑائی بالترتیب 12cm اور 8cm ہے۔ اب اگر حقیقی حالت میں اُسکی اونچائی 25 فٹ ہو تو ماڈل میں استعمال کیا گیا پیمانہ بتائے۔

6. مان لیجئے 2 کیلومیٹر دال میں 7×10^5 کرسٹل ہیں۔ تب دی گئی دال کی مقدار میں کتنے کرسٹل ہونگے۔
   (i) 5 کیلوگرام (ii) 8 کیلوگرام

7. ایک نقشے کا پیمانہ 1:25000000 دیا ہے۔ دو شہروں کی نقشے میں دوری 3cm ہے تو حقیقت میں اُنکے بیچ کتنی دوری ہوگی؟

8. اگر ایک اسکوٹر 3 لیٹر پٹرول میں 96 کیلومیٹر چلتا ہے تو 320 کیلومیٹر چلنے کے لئے اسے کتنے پٹرول کی ضرورت ہوگی؟

11.2 بالواسطہ یا اُلٹا تناسب (Indirect Proportion)

روز مرّہ کی زندگی میں ہم کچھ جگہوں پر یہ دیکھتے ہیں کہ ایک عدد کے بڑھنے سے دوسرا عدد ایک مقررہ تناسب میں گھٹنے لگتا ہے۔ یا پہلے عدد کے گھٹنے سے دوسرا عدد ایک مقررہ تناسب میں بڑھنے لگتا ہے۔ اسطرح کے متناسب رشتوں کو بالواسطہ تناسب کہتے ہیں۔

آیئے ایک مثال دیکھیں۔

ایک سڑک پر مٹی ڈالنے کے کام کو پورا کرنے کے لئے مطلوبہ مزدوروں کی تعداد اور دنوں کی تعداد نیچے جدول میں دی ہوئی ہے۔

مزدوری کی تعداد (x)	5	10	15	20	30
دنوں کی تعداد (y)	60	30	20	15	10

اوپر جدول میں مزدوروں کی تعداد (x) ہے اور دنوں کی تعداد (y) ہے۔ کیا آپ ہر ایک x کے لئے دیئے گئے y کے بیچ کوئی تعلق حاصل کر سکتے ہیں؟ یہ xy کی ہر ایک قیمت کیلئے ہے۔ یکساں ہے

مثال کو دیکھکر ہیمنت سوچ رہا تھا کہ مزدوروں کی تعداد دوگنی ہونے پر دنوں کی تعداد آدھی ہوگئی آگے مزدوروں کی تعداد تین گنی ہونے پر دنوں کی تعداد $\frac{1}{3}$ گنی ہوگئی۔ اُسی طرح مزدوروں کی تعداد اگر 10 گنی کردہ جائے تو دِنوں کے تعداد $\frac{1}{10}$ گنی ہوجائے گی۔ اگر x اور y کی قیمتوں کو ضرب کیا جائے۔

تو ایک ساکن عدد حاصل ہوگا۔ جس طرح بلاواسطہ تناسب میں۔ یا $x : y$ ساکن عدد ہوتا ہے۔ اُسی طرح یہاں $y \times x$ یا $\frac{x}{1/y}$ یا xy = ایک ساکن عدد ہوتا ہے۔ جو بلاواسطہ تناسب کا اُلٹا ہے۔ اس لئے اسے بالواسطہ تناسب یا اُلٹا تناسب کہتے ہیں۔

کیا آپ ہیمنت سے متفق ہیں؟ یہاں ہم پاتے ہیں کہ مزدوروں کی تعداد جس تناسب میں بڑھتی ہے۔ ٹھیک اُس کے اُلٹے یا متضاد تناسب میں دنوں کی تعداد گھٹتی ہے اور جس تناسب میں مزدوروں کی تعداد گھٹتی ہے ٹھیک اُسکے الٹے تناسب میں دِنوں کی تعداد بڑھتی ہے۔ ایسے تناسب کو بالواسطہ تناسب (Indirect Proportion) کہتے ہیں جیسے اوپر کے مثال میں مزدوروں اور دِنوں کی تعداد میں بالواسطہ تناسب ہے۔

یعنی دونوں اعداد میں تغیر اُلٹے تناسب میں ہے۔

نیچے دی گئی حالت کو سمجھے۔

ایک سواری گاڑی 12 فی گھنٹہ کی چال سے چل کر کوئی دوری 4 گھنٹے میں طے کرتی ہے۔ بتائیے

1. چال بڑھا کر 24km فی گھنٹہ کو دینے سے اُسے اُس دوری کو پار کرنے میں کتنا وقت لگے گا؟

2. چال بڑھا کر 36 فی گھنٹہ کر دینے سے اُس دوری کو پار کرنے میں کتنا وقت لگے گا؟

ساتھ ہی درج ذیل جدول کو بھی پورا کریں۔

48	36	24	12	چال (کیلومیٹر فی گھنٹہ میں) بالترتیب بڑھانے پر
			4	وقت (گھنٹے میں)
48	48	48	48	دوری = چال × وقت

نتیجہ:- چال بڑھانے پر وقت۔۔۔۔لگتا ہے۔

6	16	32	48	چال (کیلومیٹر فی گھنٹہ) بالترتیب کم کرنے پر
			1	وقت (گھنٹے میں)
			48	دوری = چال+وقت

نتیجہ:- چال۔۔۔۔۔ ہونے پر وقت زیادہ لگتا ہے۔

آپ بھی روزمرّہ زندگی سے متعلق ایسے پانچ مثال لکھئے جو آپس میں بالواسطہ تناسب میں ہوں

آیئے، ایک اور مثال دیکھیں،

ہر دن 16 صفحہ پڑھنے پر ایک کتاب 15 دنوں میں پوری پڑھی جاسکتی ہے۔ اگر ہر دن 8 صفحہ پڑھیں تو کتاب کو پور ختم کرنے میں کتنے دن لگینگے؟ اگر 15,12 اور 24 صفحے ہر روز پڑھیں تو کتاب کو کتنے دنوں میں پڑھا جاسکتا ہے؟

اگر ہر دن پڑھے گئے صفحوں کی تعداد x اور پڑھنے میں لگے متعلقہ دنوں کی تعداد y سے دکھائیں تو حل کرنے سے حاصل جوابات کو درج ذیل جدول میں لکھا جاسکتا ہے۔

صفحوں کی تعداد (x)	16	8	12	15	24
دنوں کی تعداد (y)	15	30	`20	16	10

یہاں $\frac{1}{y}=\frac{1}{15}$ یا $\frac{1}{30}$ یا $\frac{1}{20}$ یا $\frac{1}{16}$ یا $\frac{1}{10}$

$$x:y=\frac{x}{1/y}=\frac{16}{1/15}=\frac{8}{1/30}=\frac{12}{1/20}=\frac{15}{1/16}=\frac{24}{1/10}$$

معیاری شکل میں $x \times y = 16 \times 15 = 8 \times 30 = 12 \times 29 = 15 \times 16 = 24 \times 10$

$$240 = 240 = 240 = 240 = 240$$

$$x:\frac{1}{y}=\frac{x}{1/y}=xy=240=k \text{ (مانا)}$$

یہاں صفحوں کی تعداد دِنوں کی تعداد کے ساتھ اُلٹے تناسب میں ہے۔ چونکہ صفحوں کی تعداد کی ہر ایک قیمت کیلئے مطلوبہ دنوں کی تعداد کے بیچ اُلٹے تناسب کا تعلق ہر جگہ ایک ساکن قیمت دیتا ہے۔ اس لئے صفحوں کی تعداد کے سبھی دنوں کے تعداد کے متعلقہ قیمتوں کے ساتھ اُلٹے تناسب میں ہیں۔ دوسرے الفاظ میں کہہ سکتے ہیں کہ صفحوں کی تعداد x اور متعلق دنوں کی تعداد y کا حاصل ضرب ایک ساکن عدد ہے یعنی $xy = k$

اب اگر xy کی ایک سے زیادہ قیمتیں k کے برابر ہیں تو دے آپس میں بھی برابر ہونگے۔

$$x_1y_1 = x_2y_2$$

نتیجہ: ہم پاتے ہیں کہ "جب دو متغیر یا متحرک (Varieble) اعداد میں آپس میں اس طرح کا تعلق ہو کہ اُن میں سے ایک عدد کی قیمت بڑھانے سے دوسرے عدد کی قیمت کم ہو یا پہلے عدد کی قیمت کم کرنے سے دوسرے عدد کی قیمت بڑھتی ہے۔ اور ہر ایک حالت میں دونوں اعداد کا حاصل ضرب ساکن تو اُن کے بیچ کے تعلق کو بالواسطہ تناسبی حرکت کہتے ہیں۔"

ریاضی کی شکل میں اگر x اور y بالواسطہ تناسب میں ہوں تو $xy = k$ اگر x کی دو قیمت x_1 اور x_2 کے لئے کی دو متعلقہ y_1 اور y_2 ہو تو

$$x_1y_1 = x_2y_2$$

خود کر کے دیکھئے۔

نیچے دیئے گئے کن جدولوں میں x اور y بالواسطہ تناسبی حرکت (Indirect variation) میں ہیں۔ یا نہیں

(i)

x	40	20	16	10	2.5
y	2	4	5	8	32

(ii)

x	6	2	3	18
y	3	9	6	1

(iii)

x	10	5	2	4
y	3	6	15	8

(iv)

x	9	10	12	15
y	5	4.5	3.75	3

اگر x اور y بالواسطہ تناسبی حرکت میں ہیں تو مندرجہ جدول میں ضرورت کے مطابق خالی جگہوں کو بھریں۔

(i)

x	9	18	20	......	30
y	4	......	......	1.5	......

(ii)

x	16	8	......	......	48
y	3	.....	12	24	....

(iii)

x	20	50	25	......	100
y	....	4	......	5	......

آیئے بالواسطہ تناسبی حرکت کے کچھ مثالوں کو دیکھیں

مثال:-8: 12 مزدور ایک دیوار کو 10 دن میں بنا سکتے ہیں۔ اُسی دیوار کو 20 مزدور کتنے دنوں میں بنالینگے۔

حل:- چونکہ مزدوروں کی تعداد بڑھنے سے کام پورا ہونے میں کم وقت لگے گا۔ اس لئے یہاں بالواسطہ تناسبی حرکت کی حالت ہے۔

مانا کہ 20 مزدور اُس دیوار کو y دنوں میں بنالینگے۔ تو جدول اس طرح ہوگا۔

مزدوروں کی تعداد (x)	12	20
دنوں کی تعداد (y)	10	y

بالواسطہ تناسب میں

$$x_1y_1 = x_2y_2$$

$$12 \times 10 = 20 \times y$$

$$\frac{12 \times 10}{20} = y$$

$$6 = y$$

یعنی 20 مزدور اُس دیوار کو 6 دن میں بنالینگے

مثال۔9 ایک ہاسٹل میں 200 طلباء کے لئے 24 دن کا غذائی اجناس ہے۔ اگر ہاسٹل میں 100 طلباء اور شامل ہو جائیں تو غذائی اجناس کتنے دنوں میں ختم ہوجائے گا؟

حل: 100 طلباء کے لئے شامل ہوجانے سے ہاسٹل میں طلباء کی تعداد = 100 +200 =300

چونکہ غذائی اجناس متعین ہے۔ اور طلباء کی تعداد بڑھنے سے غذائی اجناس کم وقت میں ختم ہوجائے گا۔ اسلئے یہاں بالواسطہ تناسب کا تعلق ہے۔

مانا کہ غذائی اجناس y دنوں میں ختم ہوجائیگا۔ تو جدول اس طرح ہوگا۔

طلباء کی تعداد (x)	200	300
دنوں کی تعداد (y)	24	y

بالواسطہ تناسب میں

$$x_1y_1 = x_2y_2$$

$$\therefore\ 200 \times 24 = 300 \times y$$

یا $\frac{200 \times 24}{300} = y$

یا $16 = y$ یا $y = 16$

یعنی غذائی اجناس 16 دنوں میں ختم ہوجائیگا

مثال۔10 شالو12 کیلومیٹر فی گھنٹہ کی اوسط چال سے سائیکل چلاکر گھر سے اسکول جاتی ہے۔20 منٹ میں اسکول پہنچ جاتی ہے۔اگر وہ15 منٹ میں اسکول پہنچنا چاہے تو اُسکی اوسط چال کیا ہونی چاہیے؟

حل:۔ چونکہ کم وقت میں اسکول پہنچنے کیلئے چال بڑھانی ہوگی۔اسلئے یہاں بالواسطہ تناسب کی حالت ہے۔

مانا کہ مطلوبہ اوسط چال k کیلو فی میٹر فی گھنٹہ ہے۔

تو یہاں جدول اس طرح ہوگا۔

چال/کیلومیٹر/گھنٹہ میں (x)	12	x
وقت (منٹوں میں) (y)	20	15

بالواسطہ تناسب میں

$$x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2$$

یا $12 \times 20 = x \times 15$

یا $\frac{12 \times 20}{15} = x$

یا $16 = x$

$\therefore\ x = 16$ km گھنٹہ/

یعنی 15 منٹ میں اسکول پہنچنے کیلئے شالو کی اوسط چال 16 کیلومیٹر

سوالنامہ۔11.2

1. x اور y بالواسطہ تناسب میں ہوں تو ضرورت کے مطابق خالی جگہوں کو پُر کیجئے

x	8	6	4	....	36
y	9	12	....	10	....

2. مندرجہ ذیل جدول میں خالی جگہوں کو پُر کیجئے۔

چال(کیلومیٹر/گھنٹہ میں	4	8	....	....	64
وقت (منٹوں میں	....	40	20	10	....

3. 10 مزدور کسی کام کو2 دن میں کرتے ہیں۔اُسی کام کو2 مزدور دِنوں میں کرینگے؟

4. 45 مزدور ایک کام کو27 دنوں میں پورا کرتے ہیں تو کتنے مزدور اُسی کام کو15 دِنوں میں پورا کرینگے۔

5. ایک بس 30 کیلومیٹر/گھنٹہ کی چال سے 6 گھنٹے میں ایک مقررہ دوری طئے کرتی ہے۔ اُسی دوری کو وہ بس کس چال سے صرف 4 گھنٹے میں طئے کریگی؟

6. 40 گھوڑے ایک کوئنٹل چنے کو 7 دنوں میں کھاتے ہیں۔ کتنے گھوڑے اُتنے ہی چنے کو 28 دنوں میں کھائنگے؟

7. ایک ہاسٹل میں 300 طلباء کیلئے 15 دنوں کا راشن کا سامان ہے۔ اگر تعطیل کی وجہ کر 200 طلباء باہر چلے جائیں تو وہ سامان کتنے دِنوں تک چلے گا؟

8. ایک چھاؤنی میں 700 فوجیوں کیلئے 25 دِنوں کے لائق غذائی اجناس ہے۔ لیکن کچھ فوجیوں کے آجانے کی وجہ سے وہ غذائی اجناس صرف 20 دِنوں میں ہی ختم ہوگیا بتائیے کہ بعد میں چھاؤنی میں اور کتنے فوجی آئے؟

9. ایک آدمی ہر دن کسی کتاب کے 8 صفحوں کو پڑھکر اُسے 15 دِنوں میں پورا پڑھ لیتا ہے۔ اگر وہ ہر دن 12 صفحہ پڑھے تو وہ پوری کتاب کو کتنے دِنوں میں پڑھ لیگا؟

10. ایک فوجی کیمپ میں 105 فوجیوں کیلئے 21 دنوں کا رسد کا سامان ہے اگر کیمپ میں 42 فوجی اور شامل ہو جائیں تو اسد کا سامان کتنے دنوں میں کتنے ختم ہو جائیگا؟

11. مندرجہ ذیل میں کون کون بالواسطہ تناسب میں متحرک ہیں۔

(الف) خریدی گئی کتابوں کی تعداد اور ہر ایک کتاب کی قیمت

(ب) بس کے ذریعہ طئے کی گئی دوری اور استعمال پٹرول کی قیمت

(ج) سائکل کے ذریعہ کسی طئے شدہ دوری کو پار کرنے میں لگا وقت اور اُسکی چال

(د) ایک پل بنانے میں لگائے گئے مزدوروں کی تعداد اور پل بننے میں لگنے والا وقت

(ر) طلباء کی تعداد اور فی طلباء تقسیم کی گئی مٹھائی کا وزن (اگر 40 کیلوگرام مٹھائی تقسیم کرنی ہے۔

(س) مزدوری اور کام کے گھنٹے

(ع) چیزوں کی تعداد اور اُن کی کل قیمت

12. 26 جنوری کو ایک اسکول کو 800 طلباء میں 100 گرام فی طالب علم کے حساب سے مٹھائی تقسیم کی گئی۔ اتنی مٹھائی اگر 1000 طلباء میں برابر برابر بانٹی جائے تو ہر ایک طالب علم کو کتنے گرام مٹھائی ملے گی؟

13. جب ایک نل ایک گھنٹے میں 640 لیٹر پانی بھرتا ہے تو ایک ٹنکی کو بھرنے میں 10 گھنٹے کا وقت لگتا ہے۔ اگر اُسی ٹنکی کو دوسرے نل سے 8 گھنٹے میں بھر گیا ہو تو دوسرے نل سے فی گھنٹہ کتنا پانی بھرا؟

ہم نے سیکھا

1. جب دو متحرک (Variable) اعداد اس طرح متعلق ہوں کہ ایک متحرک کی قیمت بڑھنے یا گھٹنے سے دوسرے متحرک کی قیمت بھی اُسی تناسب میں بڑھ یا گھٹ جاتی ہے۔ وہ سیدھا یا بلاواسطہ تناسب (Direct Proportion) کہلاتا ہے۔

2. جب دو متحرک اعداد x اور y بلاواسطہ تناسب میں ہوتے ہیں تو انکا تناسب ایک ساکن یا غیر متحرک (Constant) عدد ہوتا ہے۔ یعنی $\dfrac{x}{y} = k$

3. جب دو اعداد بلاواسطہ تناسب میں ہوں اور ایک عدد کی دو قیمتوں x_1 اور x_2 کے لئے دوسرے عدد کی متعلقہ قیمت بالترتیب y_1 اور y_2 ہو تو $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2}$

4. جب دو متحرک اعداد اس طرح متعلق ہوں کہ ایک متحرک کی قیمت بڑھنے (یا گھٹنے) سے دوسرے متحرک کی قیمت میں اُسی تناسب میں کل (اضافہ) ہو تو اعداد بالواسطہ تناسب میں ہوتے ہیں۔

5. جب دو اعداد x اور y بالواسطہ تناسب میں ہوتے ہیں تو انکا حاصل ضرب ایک ساکن عدد ہوتا ہے۔ یعنی $k = xy$ جہاں k ایک ساکن عدد ہے۔

6. اگر دو اعداد بالواسطہ تناسب میں ہوں اور ایک عدد کی دو قیمتوں x_1 اور x_2 کے لئے دوسرے عدد کی متعلقہ قیمت بالترتیب y_1 اور y_2 ہو تو $x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2$

باب-12

ٹھوس بناوٹوں کی تصویر کشی

Picturisation of Solid figures

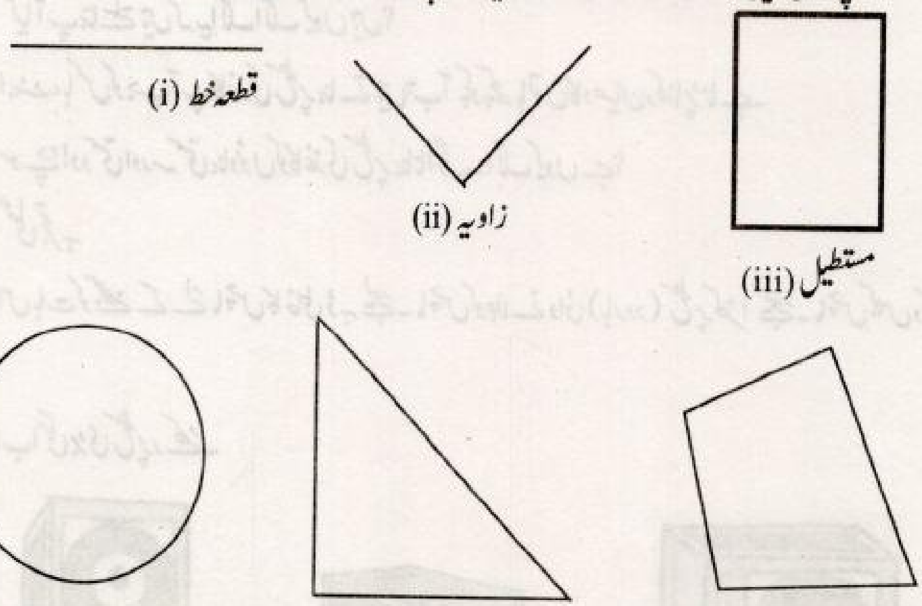
12.1 تمہید

آپ مسطح (Plane) اور ٹھوس (Solid) بناوٹوں کے بارے میں جانتے ہیں۔ مسطح شکلوں میں لمبائی اور چوڑائی جیسے دو ناپ ہوتے ہیں جبکہ ٹھوس بناوٹوں میں لمبائی چوڑائی کے ساتھ اونچائی جیسی ناپ بھی ہوتی ہے۔ اس وجہ کر اسے سہ سمتی (Three dimensonal) بناوٹ بھی کہتے ہیں۔

مثلث، ذو ربعۃ الاضلاع، کثیر الاضلاع اور دائرہ جیسی سبھی شکلیں کسی سطح پر آسانی سے بنائی جاسکتی ہیں۔

آیئے کر کے دیکھیں۔

آپ درج ذیل بناوٹوں سے قبل ہی متعارف ہیں۔ آپ ان کو بنانا بھی جانتے ہیں۔

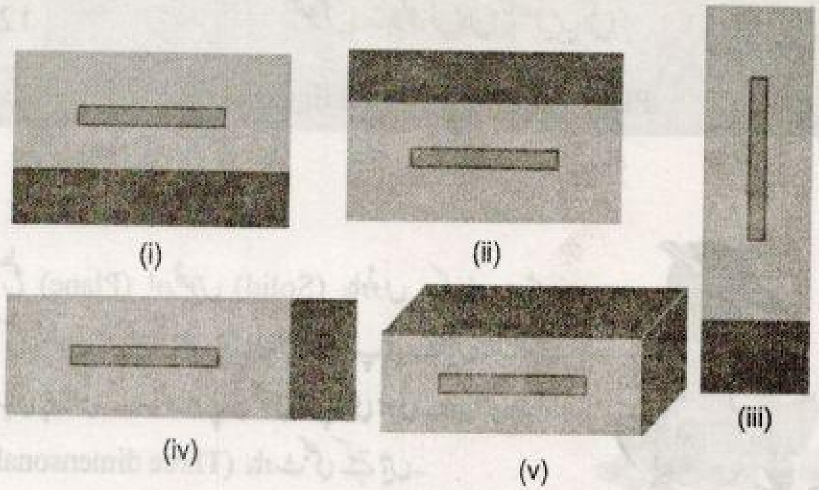


قطعہ خط (i)　　زاویہ (ii)　　مستطیل (iii)

دائرہ (iv)　　مثلث (v)　　ذو ربعۃ الاضلاع (vi)

تصویر 12.1

کیا آپ اینٹ ڈبہ جیسی چیزوں کو کاغذ پر بنا سکتے ہیں؟ کچھ طلباء/ طالبات نے اینٹ کی شکل کچھ اس طرح بنائی۔



تصویر 12.2

کیا یہ سب ٹھیک دکھائی دیتے ہیں؟ یہ سب ویسے ہی دکھائی دے رہے ہیں جیسا کہ اینٹ دکھائی دیتی ہے؟ یہ بھی شکلیں ایک دوسرے سے الگ ہیں۔

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ یہ الگ الگ کیوں ہیں؟

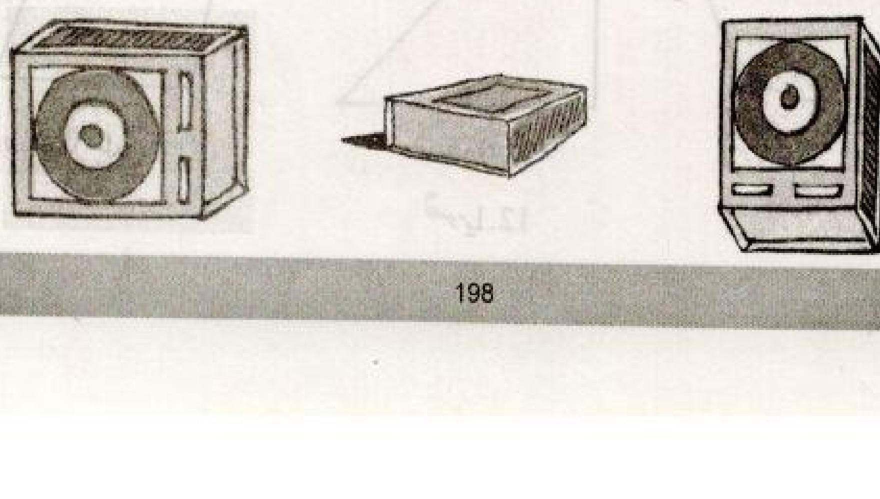
اینٹ، باکس کو جب آپ کاغذ کی سطح پر بناتے ہیں تب آپکو کچھ باتوں کا دھیان رکھنا پڑتا ہے۔

سوچیے! دو سمتی اور سہ سمتی بناوٹوں کو کاغذ کی سطح پر بنانا الگ۔ الگ کیوں ہے؟

عملی تجربہ

اس بات کو سمجھنے کے لئے ماچس کا خالی ڈبہ لیجئے۔ ماچس کو جلانے والی (بارود) سطح پر کھڑا کیجئے۔ ماچس کیسی دکھائی دیتی ہے؟

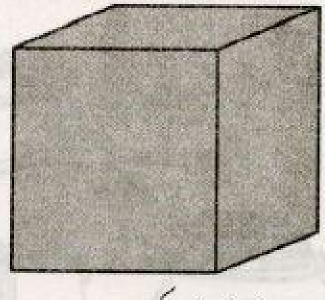
اب اسکی بڑی سطح پر رکھئے۔



یہ صاف ہے کہ ماچس اب کچھ الگ طرح کی دکھائی دے رہی ہے۔ اس تصویر کو بھی دیکھئے۔ اس میں سب سے چھوٹی سطح پر ڈبی کو کھڑا کیا گیا ہے۔ تینوں تصویر ماچس کے ڈبیہ کی ہی ہے لیکن الگ۔ الگ حالت کی ہے۔

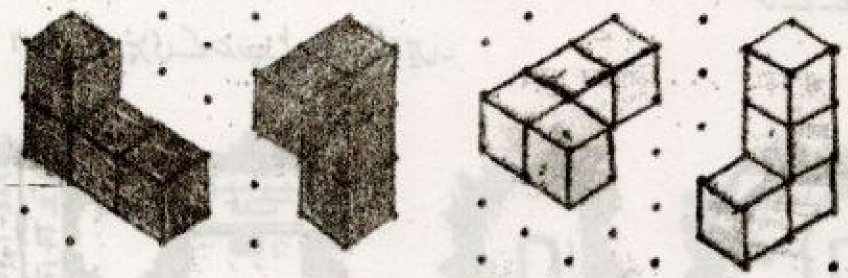
اینٹ یا اپنا لنچ باکس لیکر انہیں ماچس کے ڈبیہ کی تصویروں کی بنیاد پر رکھکر دیکھئے۔ کیا آپ ہر تصویر کے لئے یہ کر پائے۔ اب ذرا سوچئے۔ کیا کسی گولے یا مکعب کو الگ الگ حالتوں میں رکھنے پر کوئی فرق آتا ہے؟

گولا (sphere)

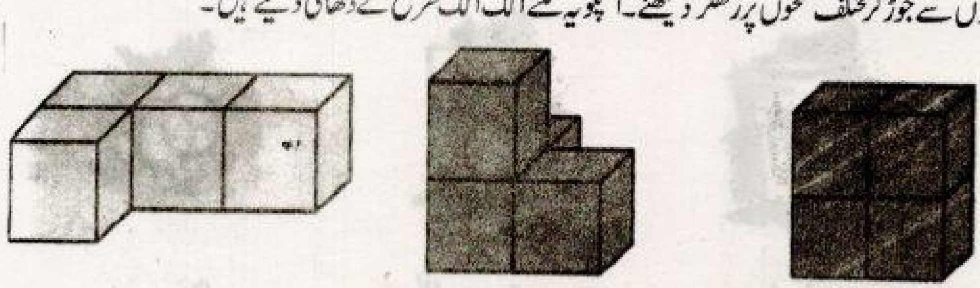


مکعب (cube)

ایسا کیوں ہوتا ہے؟ ایک گولا ایک سطحی شکل ہے اور مکعب کی سبھی چھ سطحیں برابر ہیں۔ یہاں چار مکعب کو جوڑ کر ایک شکل بنائی گئی ہے۔

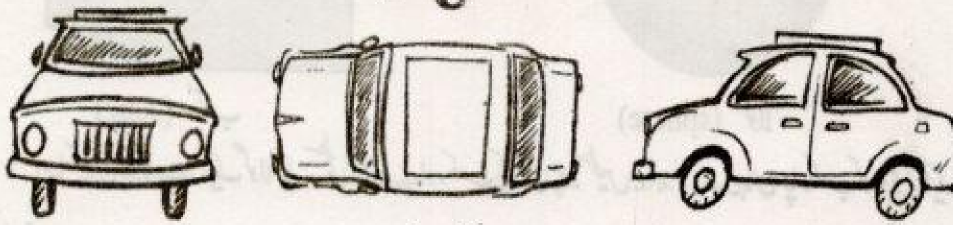


آئے اسے مختلف سطحوں پر رکھکر دیکھیں یہ کیسی کیسی دکھائی دیتی ہیں۔ اسطرح بنی شکلوں کو ہم آسانی کے لئے مساوی دوری والے و مساوی الاضلاع گراف پیپر پر بنا سکتے ہیں۔ اسطرح یہ الگ الگ تصویریں بنتی ہیں۔ آپ بھی چار مکعب لیکر اسے الگ الگ طریقوں سے جوڑ کر مختلف سطحوں پر رکھکر دیکھئے۔ آپکو یہ کتنے الگ الگ طرح کے دکھائی دیتے ہیں۔



12.2 3D بناوٹوں کی منظر

الگ الگ سطحوں پر رکھنے پر سہ سمتی بناوٹیں الگ الگ دکھائی دے سکتی ہیں۔ اس طرح سہ سمتی چیزیں مختلف جگہوں سے الگ الگ شکل میں دکھائی دے سکتی ہیں۔ اسلئے ان کو مختلف زاویہ نگاہ سے کھینچا جا سکتا ہے۔ مثال کے لئے نیچے ایک کار دکھائی گئی ہے جسے ایک ہی سطح پر الگ الگ طرف سے دیکھنے پر درج ذیل شکل کی دکھائی دیتی ہے۔



بغل یا سائڈ سے   اوپر سے   سامنے سے

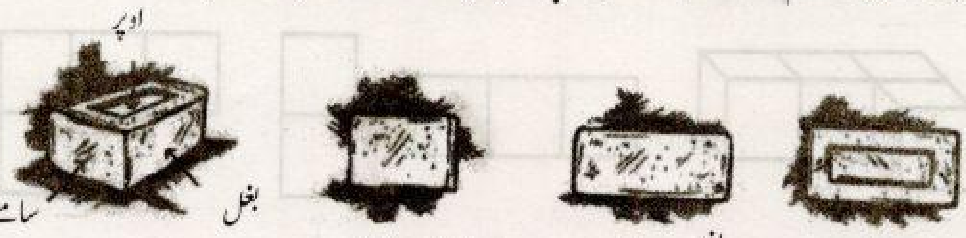
اس طرح جھونپڑی کے مندرجہ ذیل منظر ہو سکتے ہیں۔

اوپر سے منظر   بغل سے منظر   سامنے سے منظر   ایک جھونپڑی

اسی طرح ایک گلاس کے مندرجہ ذیل منظر ہو سکتے ہیں۔

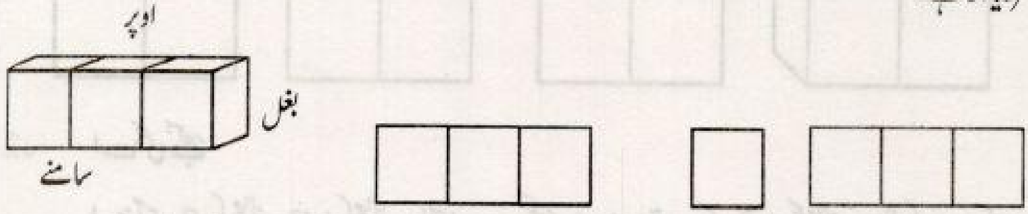
اوپر سے منظر   بغل سے منظر   ایک گلاس

ایک گلاس کا اوپر سے منظر ہم مرکزی دائروں کا ایک جوڑا کیوں ہے؟ اگر اسے الگ طرف سے دیکھا جائے تو کیا سائڈ کا منظر کچھ اور طرح کا معلوم ہوگا؟ اسکے بارے میں سوچئے۔ اب ایک اینٹ کو مختلف نظروں سے دیکھئے۔

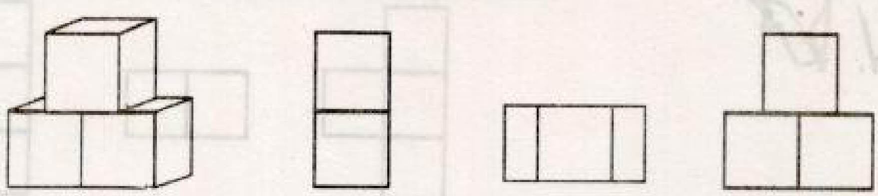


اوپر سے منظر بغل سے منظر سامنے سے منظر

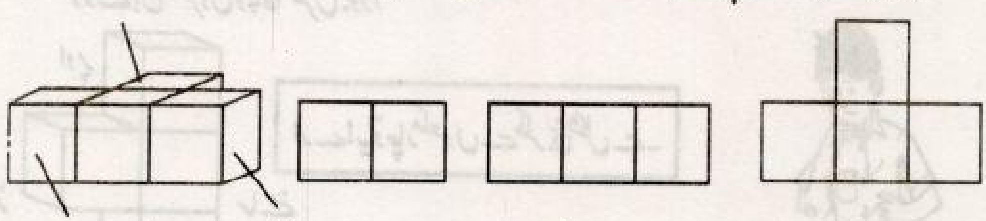
ہم مکعبوں کو جوڑ کر بنائی گئی شکلوں کے بھی مختلف منظر حاصل کر سکتے ہیں۔ نیچے کسی بناوٹ کا سامنے۔ بغل اور اوپر کا منظر دیا ہوا ہے۔



اوپر بغل سامنے اوپر



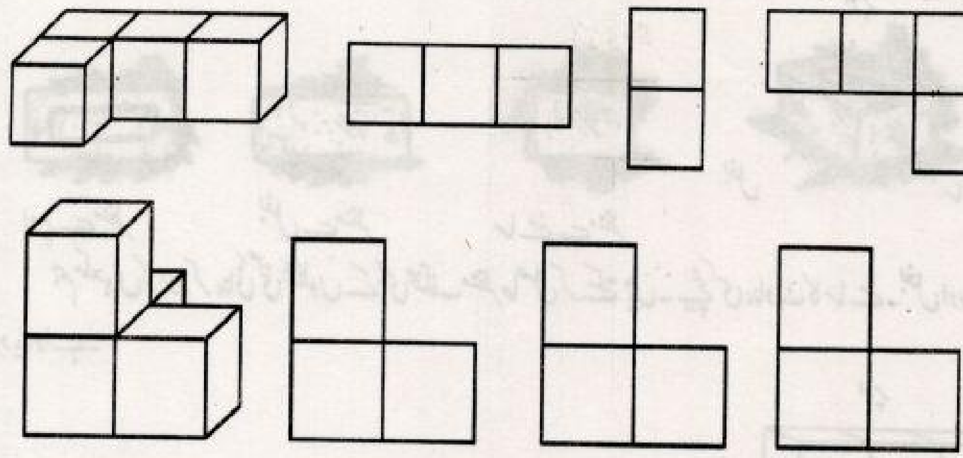
سامنے کا منظر اوپر کا منظر بغل کا منظر تین مکعبوں کی ٹھوس بناوٹ



اوپر سے منظر سامنے سے منظر بغل کا منظر چار مکعبوں سے بنا ٹھوس

خود کر کے دیکھئے

1۔ دیئے ہوئے ہر ایک ٹھوس کے لئے اوپر سے منظر۔ سامنے سے منظر اور بغل سے منظر کی پہچان کیجئے:

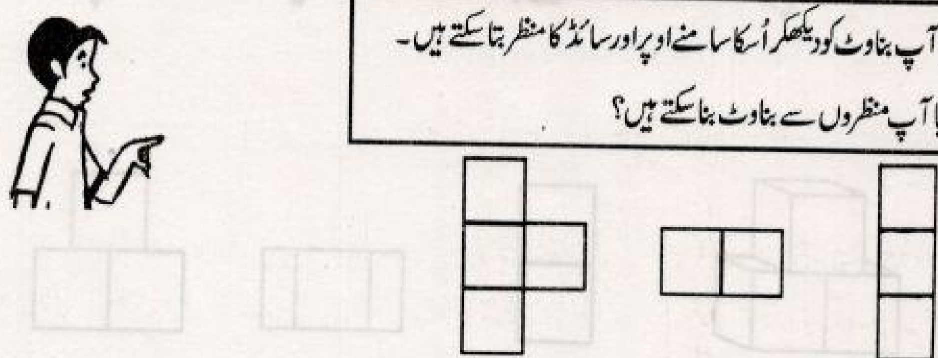


2۔ اسے بھی کیجئے

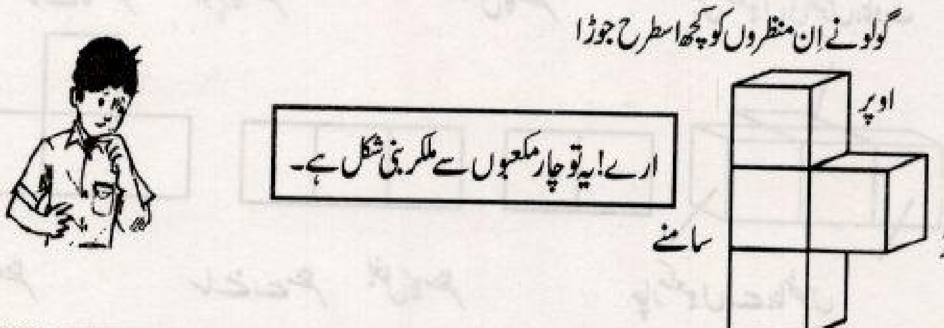
اپنے آس پاس کی مختلف چیزوں کو مختلف حالتوں سے دیکھئے۔ اپنے دوستوں کے ساتھ انکے مختلف مناظر کی چرچا کیجئے۔

کیا آپ بناوٹ کو دیکھکر اُسکا سامنے اوپر اور سائڈ کا منظر بتا سکتے ہیں۔

پر کیا آپ منظروں سے بناوٹ بنا سکتے ہیں؟

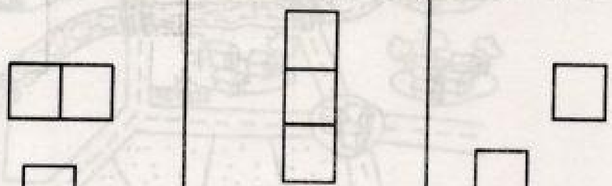
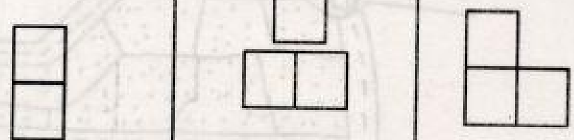
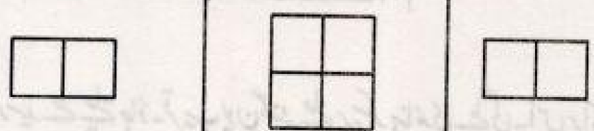
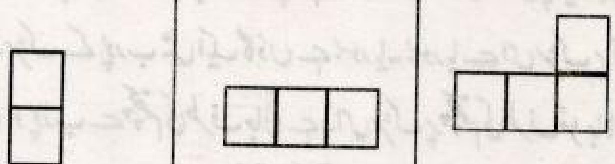


گولو نے ان منظروں کو کچھ اسطرح جوڑا



کیا گولو نے صحیح بناوٹ بنائی

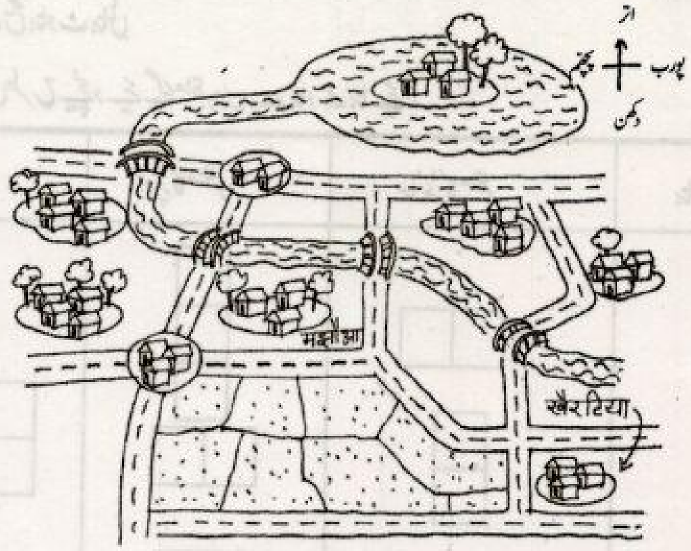
آپ بھی اسی طرح نیچے دیئے گئے منظروں سے بناوٹ بنائیے۔

	سامنے کا منظر	اوپر کا منظر	سائڈ کا منظر	بناوٹ
(i)				
(ii)				
(iii)				
(iv)				

چھوٹی کا سفر

کھیر ٹیا نام کے ایک گاؤں میں چھوٹی رہتی ہے۔ اسکی خالہ کچھ دنوں سے اسکے گاؤں آئی ہوئی ہے۔ چھوٹی کو اپنی خالہ کو لیکر اپنی نانی کے گاؤں بڑھی جانا ہے لیکن پہلے اسے اپنے ماما کے گاؤں تارسرائے جا کر انکو ایک سوفہ دینا ہے۔ واپس کھیر ٹیا آتے وقت اسکی خالہ اپنی سہیلی بینا سے ملنا چاہتی ہے۔ بینا دیوان ٹولہ گاؤں میں رہتی ہے۔ چھوٹی کو تارسرائے اور بڑھی کا راستہ پتا نہیں ہے۔ اسے بڑھی سے دیوان ٹولہ جانے کا راستہ بھی پتہ نہیں ہے۔ بس اسے اتنا یاد ہے کہ نانی کے گاؤں تک کوئی سڑک نہیں جاتی ہے۔ وہاں کشتی سے جانا پڑتا ہے۔ چونکہ بڑھی گاؤں بڑے تالاب کے ایک ٹاپو پر ہے۔ نانی کے گھر تک کشتی سے جانے میں بڑا مزا آتا ہے۔

چھوٹی نے اپنے والد سے ان گاؤں کے راستے پوچھے۔ اسکے والد صاحب نے یہ نقشہ بنایا اور اسے تارسرائے، بڑھی اور دیوان ٹولہ پہنچنے کے راستے سمجھائے۔ دیوان ٹولہ سے واپس کھیر ٹیا پہنچنے کا راستہ بھی سمجھایا۔



کھیرٹیا کے اُتر میں جانے والی سڑک لو اور سیدھے چلتے جاؤ۔ قریب پون گھنٹہ چلنے پر سکر ہنا ندی ملے گی۔ اُس پر ایک پُل ہے پل پار کرنے کے بعد سڑک تھوڑی مُڑے گی۔ سڑک کے پورب میں ایک گاؤں ہے بسوریا۔ بسوریا سے اس سڑک پر آگے چلنا قریب ڈیڑھ گھنٹے بعد ایک اور سڑک ملے گی جو پورب سے پچھّم کی طرف جاتی ہے۔ اس سڑک پر پچھّم کی طرف مُڑ جانا۔ آدھے گھنٹے بعد سڑک کے دکھن ایک گاؤں آئے گا۔ یہی تارسرائے ہے۔ ماما جی کو تحفہ دیکر تھوڑی دیر آرام کر لینا۔ تارسرائے سے آگے پچھّم کی طرف جانے والی سڑک پر چلنا تو قریب ایک گھنٹے بعد دھوم نگر آئے گا۔ اسے پار کرکے اور پچھّم کی طرف جاؤ گی تو ایک اور پُل ملے گا۔ یہ پل بھی اسی سکر ہنا ندی پر بنا ہے۔ پل سے پہلے سڑک سے اُتر میں نیچے اُترنا۔ وہاں تمہیں کشتی ملے گی۔ ملاّح سے کہنا تمہیں بڑھی جانا ہے وہ تم سے پانچ روپے لے گا۔ قریب ایک گھنٹے میں تملوگ بڑھی پہنچ جاؤ گے۔

نانی کے گھر پر کچھ دن رک جانا۔ پھر وہاں سے کشتی لیکر واپس آکر پُل پر اُتر جانا۔ پُل تک پہونچو گے تو پُل سے پچھّم میں سو گاؤں پڑے گا۔ لیکن اس طرف مت جانا۔ دھوم نگر سے دکھن کی طرف چلنا تو آدھے گھنٹے پر ایک اور پُل آئے گا۔ پُل پار کرنے کے آدھے گھنٹے بعد پہاڑپور گاؤں ملے گا۔ پہاڑپور سے پچھّم کی طرف ایک گھنٹہ اور چلو گے تو سڑک کے اُتر میں دیوان ٹولہ گاؤں ملے گا۔ یہیں تمہاری خالہ کی سہیلی مینا رہتی ہے۔ اسکے یہاں کچھ دیر رک کر واپس گھر کے لئے نکل پڑنا۔

دیوان ٹولہ سے کھیرٹیا واپس آنے کے لئے دیوان ٹولہ سے پورب کی طرف چلنا۔ راستے میں پہاڑپور آئے گا۔ پہاڑپور سے اور پورب میں چلنا۔ آدھے گھنٹے کے بعد سڑک سے اتر میں مجھوا نام کا گاؤں ملے گا۔ مجھوا سے قریب آدھے گھنٹے پورب میں

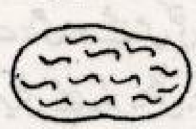
اور چلوگی تو ایک اور سڑک ملے گی۔ سڑک کے اس پار پورب میں ایک برگد کا پیڑ دکھائی دے گا۔ اس سڑک پر دکھن کی طرف مڑ جانا۔ قریب ایک گھنٹہ اور چلوگی تو ایک چوراہا ملے گا بس چوراہے پر ہی تم کھیرٹیا پہچان لوگی۔

چھوٹی کے والد نے۔

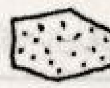
نقشے پر گاؤں ایسے بنائے

سڑک ایسی بنائی

ندی ایسی بنائی

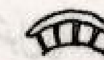


تالاب ایسا بنایا



کھیت ایسے بنائے

برگد کا پیڑ ایسا بنایا



پُل ایسے بنائے

انہیں پڑھنا لکھنا نہیں آتا تھا تو انہوں نے گاؤں کے نام نہیں لکھے۔

خود کر کے دیکھیے

(1) چھوٹی کے والد صاحب کی ہدایت پڑھ کر کیا آپ بھی گاؤں کے نام نقشے پر لکھ سکتے ہیں؟ کھیرٹیا نقشے پر لکھا ہے۔ باقی گاؤں کے نام ہیں۔ بسوریا، تارسرائے، دھوم نگر، برھی، سوگاؤں، پہاڑپور، دیوان ٹولہ، مجھوا۔ ندی کا نام بھی نقشے پر لکھیے۔

(2) چھوٹی کے والد صاحب نے نقشے پر کئی چیزیں بنائی ہیں پر کئی چھوٹ بھی گئیں ہیں۔ آپ انہیں نقشے میں جوڑیے۔

.... تارسرائے سے دھوم نگر جانے والی سڑک کے دکھن میں دو کھیت

.... دھوم نگر سے پہاڑپور جانے والی سڑک کے پچھم میں ایک کنواں

(3) کھیرٹیا کے کس سمت میں بسوریا ہے؟

(4) دھوم نگر کے کس سمت میں تار سرائے ہے؟

(5) مجھوا کے کس سمت میں پہاڑ پور ہے؟

(6) بنے خاں کو پہاڑ پور سے تار سرائے جانا ہے۔آپ اسے جانے کا راستہ سمجھائیے۔

....

....

....

(7) چھوٹی اور اسکی خالہ کو تار سرائے پہونچنے میں کتنی دیر لگے گی؟

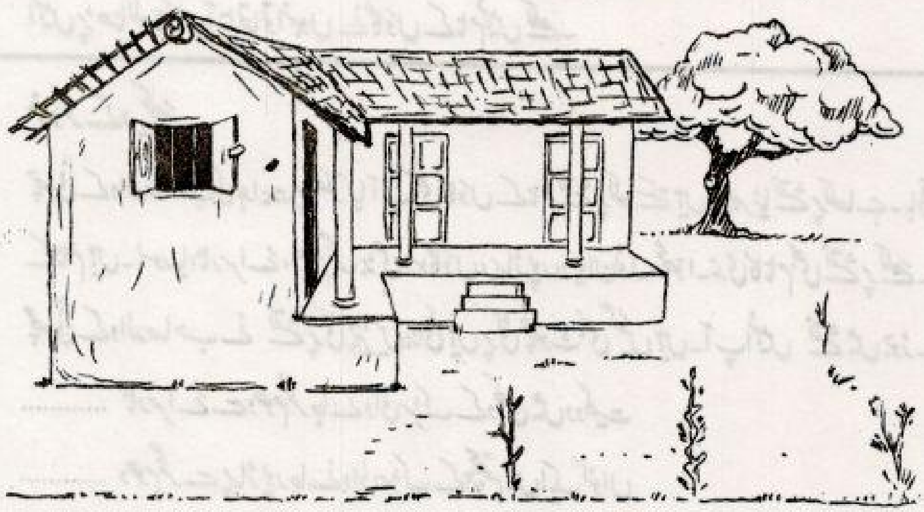
(8) تار سرائے سے بڑھی پہونچنے میں کتنی دیر لگے گی؟

(9) گاؤں کی تصویر کشی کیجئے۔گھر، جنگل، ندی، کھیت، سڑک وغیرہ کے لئے آپ اپنے اشاراتی نشان بنا سکتے ہیں۔تصویر بناتے وقت سمت کا دھیان رکھنا مت بھولیں گے۔

پیمانہ

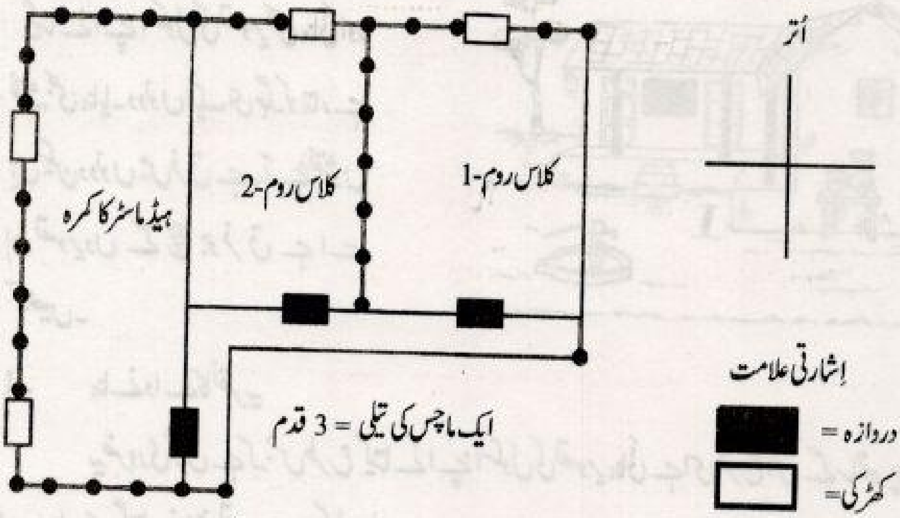
نقشے بناتے وقت ہم اس بات کا دھیان رکھتے ہیں کہ کون سی جگہ کتنی بڑی ہے۔ یہاں ہم سمجھنے کی کوشش کرینگے کہ ہم ایسا کیسے کر سکتے ہیں۔

گیتا نے اپنے اسکول کی تصویر بنائی ہے۔



باہر سے ایک اسکول ایسا دکھائی دیتا ہے۔اس میں ایک برآمدہ دو کلاس روم اور ایک ہیڈ ماسٹر کا کمرہ ہے۔

ایک دن گیتا نے اپنے اسکول کا نقشہ بنایا۔نقشہ بناتے وقت اس بات کا دھیان رکھا کہ کون سا کمرا کتنا لمبا ہے۔کمروں کی لمبائی ناپنے کے لئے گیتا نے بہت ساری ماچس کی تیلیاں اکٹھی کرلیں۔پھر تینوں کمروں کو قدموں سے چل کرناپا۔دیوار جتنے قدم لمبی تھی اتنی تیلیاں اس نے سیدھ میں جما کر رکھیں۔اسطرح اس نے سبھی کمروں کی دیواریں بنائیں۔ایسے



گیتا سے اسکی ٹیچر نے پوچھا "تم نے نقشہ بناتے وقت پیمانہ کیوں لیا؟" گیتا بولی، "نقشہ کسی جگہ کی نپی تلی اور درست تصویر کشی کرتا ہے۔اس نقشے کو پڑھکر ہم سمجھ سکتے ہیں کہ حقیقت میں وہ جگہ کتنی بڑی ہے۔ایک بڑی جگہ کی لمبائی اور چوڑائی کاغذ پر ڈرستگی سے دکھانے کے لئے میں نے ایک تیلی کے برابر قدم کا پیمانہ لیکر نقشہ بنایا۔

خود کر دیکھئے۔

(1) نقشہ دیکھکر جملہ پورا کیجئے۔

کلاس روم۔1.........قدم لمبا اور.........قدم چوڑا ہے

کلاس روم۔2.........قدم لمبا اور.........قدم چوڑا ہے

ہیڈ ماسٹر کا کمرہ.........قدم لمبا ہے اور.........قدم چوڑا ہے

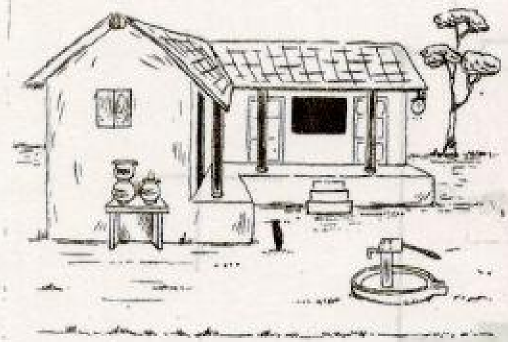
برآمدہ..........قدم چوڑا ہے

(2) (الف) اسکول کے کلاس روم کے دروازے کس سمت میں کھلتے ہیں؟

(ب) ہیڈ ماسٹر کی کمرے کی کھڑکیاں کس سمت میں کھلتی ہیں؟

(پ) آپ اپنے اسکول کا نقشہ بنائیے۔ نقشہ بناتے وقت پیمانے اور علامتی فہرست بنانا نہ بھولیں گے۔

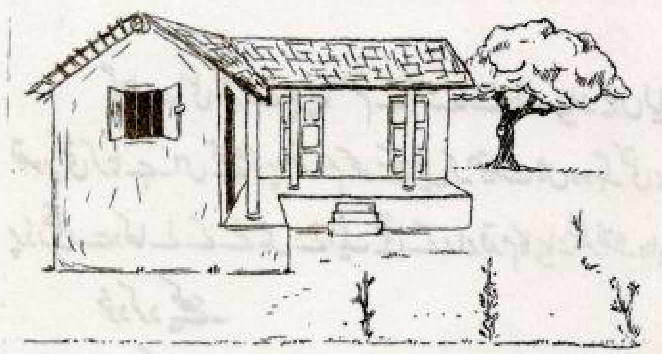
نقشے اور تصویروں میں فرق



گیتا نے اپنے اسکول کی تصویر بھی بنائی اور نقشہ بھی بنایا۔ دونوں ایک ہی جگہ کو بتارہے ہیں لیکن دونوں میں فرق ہے۔ آیئے نقشوں اور تصویروں کے بیچ جو فرق ہے اسے سمجھیں۔

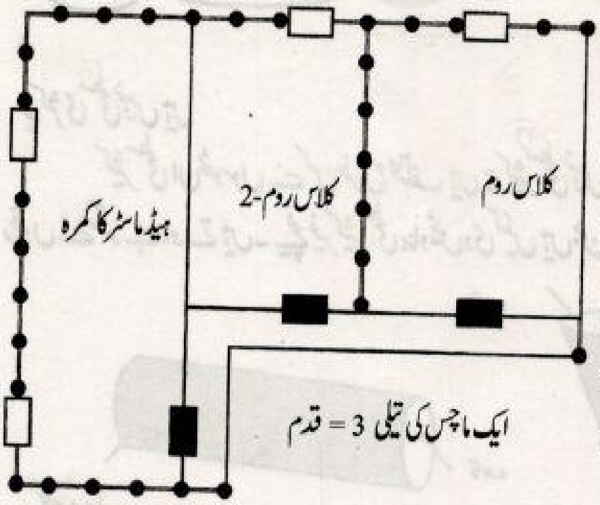
1۔ بنانے والے کا نظریہ

یہ ضروری نہیں ہے کہ جس طرح گیتا نے اپنے اسکول کی تصویر بنائی ہے اسی طرح اس کے ساتھ پڑھنے والی سہیلی بھی



اسے بنائے۔ گیتا نے اپنی تصویریں اسکول کے باہر ٹنگی گھنٹی، بورڈ، ہینڈ پمپ، مٹکے بنائے۔ اس نے اسکول کی کھڑکی کے کواڑ بند کھائے۔ تصویر میں کیا یا دکھایا جانا ہے یا کیسے دکھایا جانا ہے۔ یہ تصویر کے بنانے والے پر منحصر کرے گا۔ اسکے نظریئے پر منحصر کرے گا۔ گیتا کی سہیلی کو گھنٹی، ہینڈ پمپ، مٹکا وغیرہ دکھانا اتنا اہم نہیں لگا اسلئے اس نے نہیں دکھایا۔ لیکن نقشے کے بنانے والے کے نظریئے کی وجہ کر نقشے میں فرق نہیں آتا ہے۔ چاہے میں نقشہ بناؤں یا میری سہیلی دونوں کے نقشوں کو ایک جیسا دکھائی دینا چاہئے۔ نقشہ بنانے میں من مانے تفریق کی اجازت نہیں دی جاتی ہے۔ لیکن یہ ضرور ہوسکتا ہے کہ الگ الگ لوگ الگ الگ علامتوں کا استعمال کرسکتے ہیں اور الگ الگ پیمانے کے مطابق نقشے بنا سکتے ہیں۔

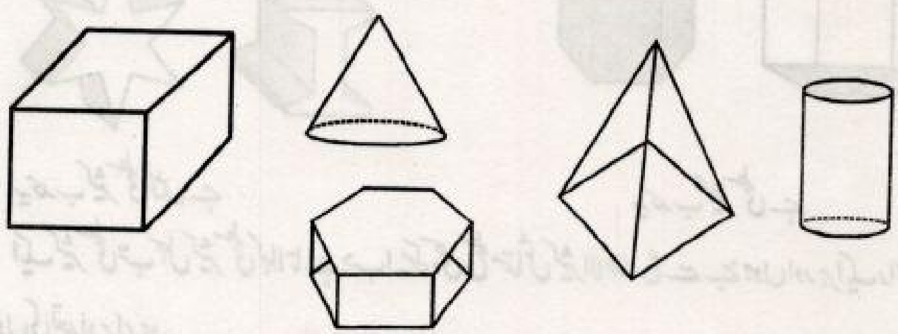
2۔ نقشہ کسی پیمانے کی بنیاد پر بنا ہوتا ہے۔ گیتا نے اسکول کے نقشے میں 1 ماچس کی تیلی = 3 قدم پیمانہ لیا۔ اکثر گاؤں اور قصبوں کے نقشے 1 سنٹی میٹر = ... کیلو میٹر پیمانہ لیا جاتا ہے۔ پیمانہ ہمیں بتاتا ہے کہ نقشے میں دکھائی گئی دووری حقیقت میں کتنی ہے۔ جتنی بڑی جگہ کو ہمیں کاغذ پر دکھانا ہے۔ اتنی زیادہ لمبائی کو ایک اکائی جیسے اسنٹی میٹر دکھائے گا۔



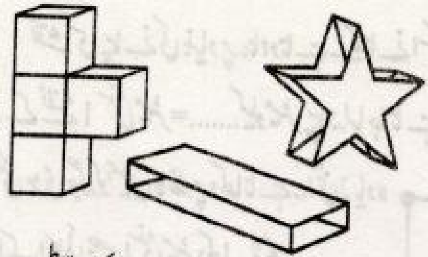
3۔ جب گیتا نے اپنے اسکول کی تصویر بنائی تو جگہ کو ایسا دکھایا جیسا کہ اسے حقیقت میں دکھائی دیتا ہے۔ پر جب گیتا نے اسکول کا نقشہ بنایا تو عمارت نہیں بنائی لیکن اسکول کی زمین کی سطح دکھائی اور دروازے کھڑکیاں دکھانے کے لئے کچھ اس نے کچھ علامتوں کا استعمال کیا۔

12.3 سطح (Surface) کنارے (edges) اور راس (Vertex)

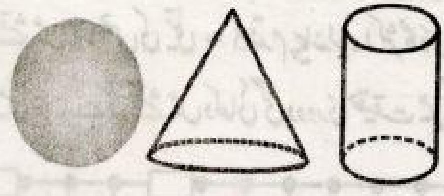
نیچے کچھ سہ سمتی بناوٹیں دی گئیں ہیں۔ انکے راس، سطح اور کناروں کو پہچانئے۔



مندرجہ بالا ٹھوسوں میں سے ہر ایک ٹھوس کثیر ضلعی رقبوں سے ملکر بنا ہے۔ جو اسکے سطح کہلاتے ہیں یہ سطحیں جہاں ملتی ہیں وہ کنارا کہلاتا ہے جو ایک قطعہ خط ہوتا ہے۔ کنارے جہاں ملتے ہیں وہ راس کہلاتا ہے جو کہ ایک نقطہ ہوتا ہے۔ ایسی ٹھوس بناوٹوں کو کثیر سطحی Polyhedron کہتے ہیں۔

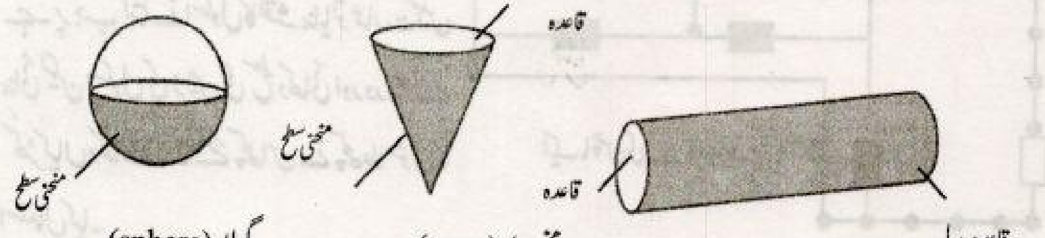


یہ کثیر سطحی ہیں



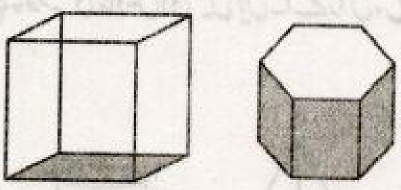
یہ کثیر سطحی نہیں ہیں

کثیر سطحی ان ٹھوسوں سے کس طرح مختلف ہیں جو کثیر سطحی نہیں ہیں؟ سوچیے۔ آپ نے ٹھیک سوچا۔ کثیر سطحی کثیر ضلعی رقبوں سے ملکر بنے ہوتے ہیں۔ نیچے غیر کثیر سطحی بناوٹیں دی گئیں ہیں جن سے آپ متعارف ہیں۔ کیا یہ خط مستقیم سے بنی ہیں۔

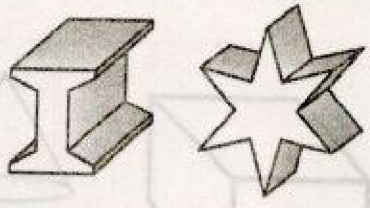


گولا (sphere) مخروط (cone) بیلن (cylinder)

محدب کثیر سطحی (Convex polyhedron) آپکو محدب کثیر الاضلاع (Convex polygon) کے خاصیت کے بارے میں یاد ہوگا۔ محدب کثیر سطحی کا تصور بھی اسی طرح کا ہے۔

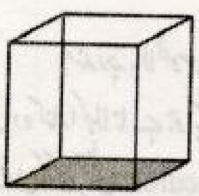


یہ محدب کثیر سطحی ہے

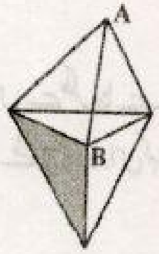


یہ محدب کثیر سطحی نہیں ہے

ایک کثیر سطحی تب سہل کثیر سطحی کہلاتا ہے، جب اسکے سبھی سطح متماثل کثیر الاضلاع سے بنے ہوں اور ہر ایک راس پر ملنے والے سطحوں کی تعداد برابر ہو۔

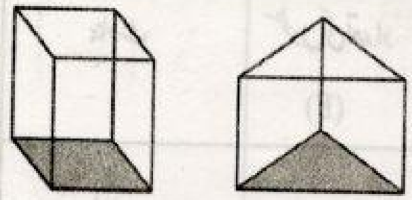


یہ ایک سہل کثیر سطحی ہے۔ اسکے سبھی متماثل کثیر الاضلاع ہیں سطحوں کی یکساں تعداد سے راس بنتے ہیں

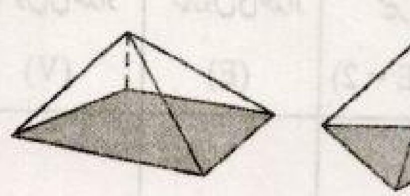


یہ ایک سہل کثیر سطحی نہیں ہے۔ سبھی سطح متماثل نہیں ہیں اور راس سطحوں کی یکساں تعداد سے نہیں بنتے ہیں۔ A پر 3 سطح ملتے ہیں لیکن B پر 4 سطح ملتے ہیں۔

ہمارے آس پاس کثیر سطحی گروپ میں ملنے والے دواہم ممبر پرزم(Prism)اور پیرامڈ(pyramid) یااہرام ہیں

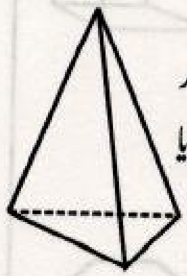


یہ پرزم ہیں



یہ پیرامڈ ہیں

ہم کہتے ہیں کہ ایک کثیر سطحی پرزم ہوتا ہے جب اس کا قاعدہ اور اوپری سطح متماثل کثیر الاضلاع ہوں اور دوسرے سطح یعنی عمودی سطحیں متوازی الاضلاع کی شکل کے ہوں۔



دوسری طرف ایک پیرامڈ وہ کثیر سطحی ہوتا ہے،جس کا قاعدہ (جتنے بھی ضلع والا) ایک کثیر الاضلاع ہوتا ہے اور اسکی عمودی سطحیں مشترک راس والے مثلث ہوتے ہیں (اگر آپ ایک کثیرالاضلاع) کے سبھی کونوں یا راسوں کوایک ایسے نقطے سے ملادیں جوکسی سطح میں نہ ہوتو آپکو پیرامڈ کاایک نمونہ حاصل ہوجائیگا) کر کے دیکھیں

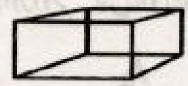
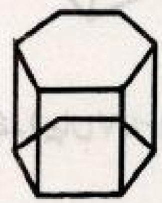
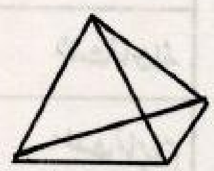
خود کر کے دیکھئے

مندرجہ ذیل کثیر سطحی بناوٹوں کے لئے سطحوں، کناروں اور راسوں کی تعداد کا جدول بنایئے۔ (یہاں V راسوں کی تعداد، F سطحوں کی تعداداور E کناروں کی تعداد کو بتاتا ہے۔

ٹھوس	F	V	E	F+V	E+2
مکعب					
مثلث نما پیرامڈ					
مثلث نما پرزم					
مربع نما قاعدہ والا پیرامڈ					

آپ آخری دو کالم سے کیا نتیجہ نکالتے ہیں؟ کیا ہر حالت میں آپ $F + V = E + 2$ یعنی $F + V - E = 2$ حاصل کرتے ہیں؟ یہ تعلق آئلر فارمولہ (Euler's formula) کہلاتا ہے۔حقیقت میں یہ فارمولہ سبھی کثیر سطحی کے لئے صحیح ہے۔

سوالنامہ 12.1

بناوٹ	سطحوں کی تعداد (F)	راسوں کی تعداد (V)	کناروں کی تعداد (E)	کثیر سطحی ہے یا نہیں (F + V – E = 2)
				
				
				

2۔ آئلر فارمولہ کا استعمال کرتے ہوئے نامعلوم عدد کو معلوم کیجئے۔

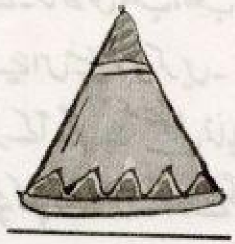
سطح	5	18	?
راس	?	10	7
کنارے	9	?	14

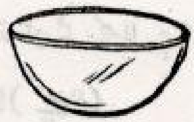
3۔ (i) پرزم اور بیلن کس طرح ایک جیسے ہیں؟

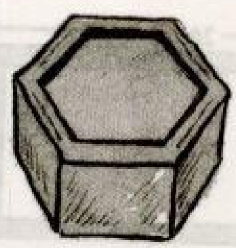
(ii) پیرامڈ اور مخروط کس طرح ایک جیسے ہیں؟

4۔ کیا کسی کثیر سطحی کے 15 سطح، 10 کنارے اور 20 راس ہو سکتے ہیں؟ وجہ کے ساتھ بتایئے۔

5۔ دی ہوئی چیزوں کا سامنے سے منظر۔ متوازی منظر اور اوپر سے منظر کھینچئے۔





باب-13

علم مساحت

Mensuration

13.1 تمہید

آپ جانتے ہیں کہ بند مسطح بناوٹ (Plane Closed figure) کے گھیرے کی لمبائی اس کا احاطہ کہلا تا ہے اور بناوٹ کے ذریعہ گھری ہوئی جگہ اسکا رقبہ کہلاتا ہے۔ ہم مثلث، مستطیل اور دائرہ وغیرہ جیسے مسطح بناوٹوں کے احاطے اور رقبے معلوم کرنا سیکھ چکے ہیں۔

اس باب میں ہم مختلف قسم کے ذو ربعتہ اضلاع (Quadrilaterals) کے رقبوں اور احاطوں سے متعلق سوالات حل کرینگے۔ ساتھ ہی مکعب، مکعب نما اور بیلن جیسے ٹھوس کے سطحی رقبے اور حجم کے بارے میں بھی جانکاری حاصل کرینگے۔ آیئے اس مسئلے کو حل کریں۔

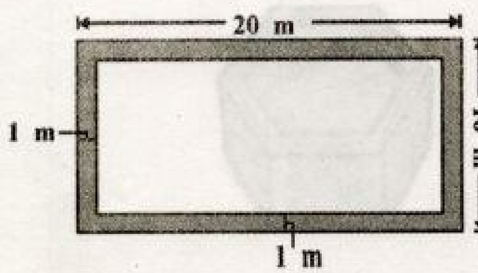
ایک گھر کے آگے بنے مستطیل نما باغیچہ کی لمبائی 20 میٹر اور چوڑائی 10 میٹر ہے۔

1۔ اس باغیچہ کو چاروں طرف تار سے گھیرنا ہے۔ تار کی لمبائی کیا ہوگی؟ ظاہر ہے کہ تار کی لمبائی معلوم کرنے کے لئے ہمیں اس باغیچہ کا احاطہ نکالنے کی ضرورت ہوگی

جو 60 میٹر ہے۔ (جانچ کر کے پتا لگایئے)

2۔ باغیچہ کتنی زمین میں پھیلا ہے؟ اسکی جانکاری حاصل کرنے کے لئے ہمیں اسکا رقبہ معلوم کرنے کی ضرورت ہے جو $200m^2$ ہوگا (کیسے؟)

3۔ اس باغیچے کے اندر چاروں طرف سے امیٹر کیاریوں کیلئے جگہ ہے تو بتایئے کیاریوں نے باغیچے کا کتنا رقبہ گھیرا ہوا ہے؟



آپ سامنے کے بنے گرافک تصویر میں دیکھ رہے ہیں کہ دو مستطیل بنے ہیں۔ اسلئے کیاریوں کا رقبہ معلوم کرنے کے لئے باہری مستطیل کے رقبہ میں سے اندرونی مستطیل

کے رقبہ کو گھٹانا ہوگا۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کے اندرونی مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی کتنی ہوگی۔ یہاں اندرونی مستطیل کی

لمبائی $=(10m - 2\times1m)$ یعنی $(20m - 2m) = 18m$

اندرونی مستطیل کی چوڑائی $= (10m - 2 \times 1\ m)$ یعنی $(10m - 2m) = 8m$ (سوچیے کیوں؟) اسلئے

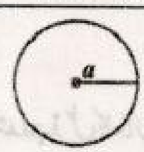
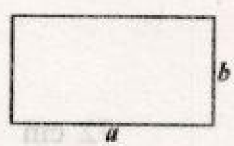
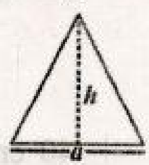
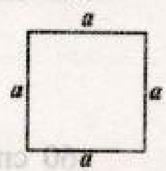
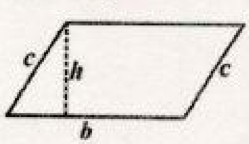
اندرونی مستطیل کا رقبہ۔ باہری مستطیل کا رقبہ = کیاریوں کا رقبہ

$$= (20m \times 10m) - (18m \times 8m)$$

$$= 200m^2 - 144m^2 = 56m^2$$

اسلئے کیاریاں $56m^2$ میں لگی ہیں۔

قبل آپ ان جومیٹریکل اشکال کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ اس بنیاد پر مختلف اشکال کو ان کے متعلق رقبوں سے ملایئے۔

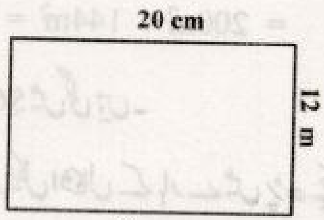
رقبہ	اشکال کے نام	بند سطح اشکال
مربع اکائی $\frac{1}{2} \times a \times h$	دائرہ	
مربع اکائی $a \times a$	مستطیل	
مربع اکائی $a \times b$	مثلث	
مربع اکائی $b \times h$	مربع	
مربع اکائی πa^2	متوازی الاضلاع	

خود کر کے دیکھئے

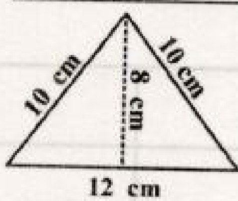
1۔ درج ذیل اقلیدیسی یا جومیٹریکل اشکال کو انکے رقبوں سے ملائیے

(a) 

(i) 48 cm

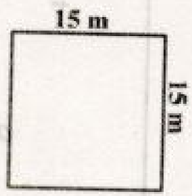
(b) 

(ii) 616 cm

(c) 

(iii) 240 cm

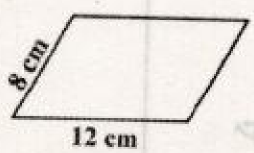
2۔ مندرجہ ذیل کا ملان انکے احاطوں (Perimeters) سے کیجئے

(a) 

(i) 72 cm

(b) 

(ii) 40 cm

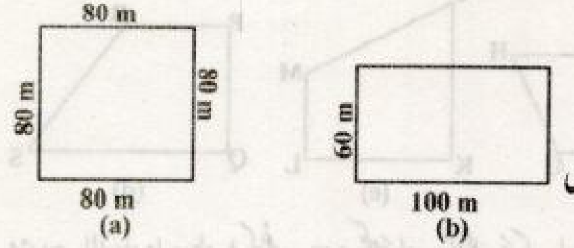
(c) 

(iii) 60 cm

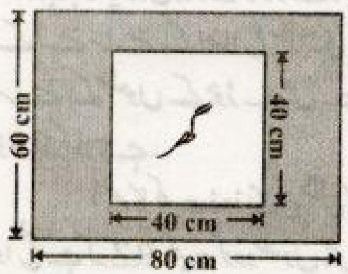
نوٹ :۔

1۔ احاطہ/گھیرا/محیط کا مطلب ہوتا ہے گھیرے کی کل لمبائی
2۔ رقبہ (Area) کو A سے دکھایا یا ظاہر کیا جاتا ہے۔

سوالنامہ 13.1



1۔ بغل کی تصویریں ایک مستطیل اور ایک مربع نما کھیل کے میدان کا ناپ دیا ہوا ہے اگر ان کے احاطے برابر ہیں تو کس میدان کا رقبہ زیادہ ہوگا۔

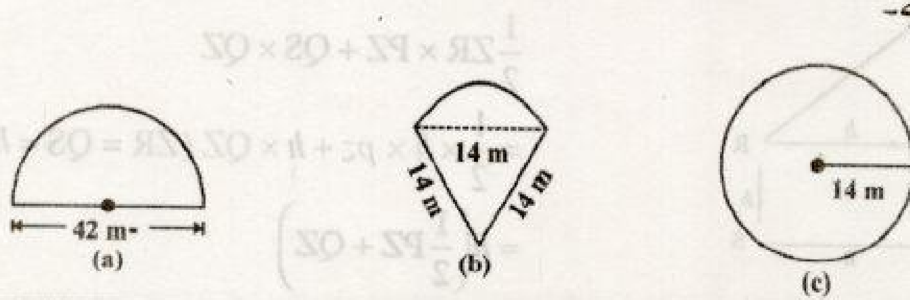


2۔ بملا کے پاس ایک مستطیل نما پلاٹ ہے (جیسا کہ تصویر میں دکھایا گیا ہے) وہ پلاٹ کے بیچ میں ایک مربع نما گھر بنانا چاہتی ہے۔ گھر کے چاروں طرف پھلواری لگوانی ہے۔ اسے پھلواری لگانے میں 40 روپیہ فی مربع میٹر کی در سے کتنے روپئے خرچ کرنے ہونگے۔

3۔ امریش اپنے گھر کے آنگن میں اینٹ بچھوانا چاہتا ہے۔ اگر آنگن کی لمبائی 20 میٹر اور چوڑائی 15 میٹر اور ایک اینٹ کی لمبائی و چوڑائی بالترتیب 80 cm اور 25cm ہو تو اس آنگن میں کتنی اینٹیں لگیں گی؟ (کچی تصویر بنا کر حل کریں)

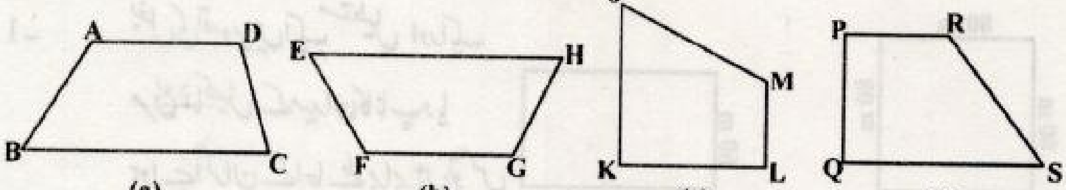
4۔ ایک مثلث نما کھیت کا رقبہ 600 مربع میٹر اور اونچائی 60 میٹر ہو تو اس کھیت کا قاعدہ (Base) معلوم کریں۔

5۔ ایک دوڑ کا مقابلہ کرنے والے کو کم سے کم دوری طے کرنے کے لئے ذیل میں سے کس بناوٹ پر چکر لگانا چاہئے؟ آپ جانتے ہیں کہ پورے دائرہ کے محیط کا فارمولہ $C = 2\pi r$ ہے جہاں r دائرہ کا نصف قطر ہے۔



یاد کیجئے ایسے ذو ربعۃ الاضلاع جنکے آمنے سامنے کے اضلاع کے دونوں جوڑے آپس میں متوازی ہوں کیا کہلاتے ہیں

13.2 ذوذنقہ (Trapezium) کا رقبہ



(a) (b) (c) (d)

مندرجہ بالا چاروں بناوٹ کو غور سے دیکھئے اور پتا لگایئے کہ چاروں میں کیا یکسانیت ہے۔ کیا سبھی ذو ربعۃ الاضلاع کے آمنے سامنے کے اضلاع متوازی ہیں؟ آپ نے ٹھیک پتہ لگایا اور دیئے گئے سبھی ذو ربعۃ الاضلاع میں اپنے سامنے کے ضلعوں کے جوڑے میں سے ایک جوڑا متوازی ہے اور ایک جوڑا غیر متوازی ہے۔ ایسا ذو ربعۃ الاضلاع ذوذنقہ کہلاتا ہے۔

اسلم کا کھیت ذوذنقہ کی شکل کا ہے جسمیں RS || PQ – RZ کھیت کو کتنے حصوں میں بانٹ رہا ہے؟

واضح ہے کہ RZ کھیت کو دو حصوں میں بانٹ رہا ہے ایک RZQS مستطیل نما ہے اور دوسرا حصہ RZP مثلث نما ہے۔ اگر PQ = 18m اور RS = 8m اور QS = 12m ہے تو

$$\Delta PZR = \frac{1}{2} \times h \times pz = \frac{1}{2} \times 12 \times 10 = 60m^2$$ کا رقبہ

مستطیل RZQS کا رقبہ $= h \times ZQ = 12 \times 8 = 96m^2$

اسلئے اسلم کے کھیت کا کل رقبہ کتنا ہوا

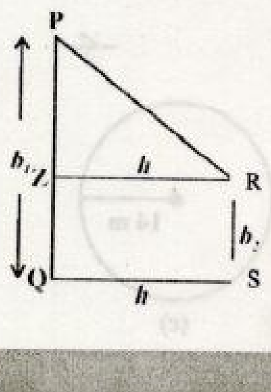
اسلئے اسلم کے کھیت کا کل رقبہ $= \Delta PZR$ کا رقبہ4 + مستطیل RZQS کا رقبہ

= 60 مربع میٹر + 96 مربع میٹر

= 156 مربع میٹر

اسطرح ذوذنقہ PQSR کا رقبہ

= ΔPZR کا رقبہ + مستطیل ZQSR کا رقبہ



$$\frac{1}{2} ZR \times PZ + QS \times QZ$$

$$= \frac{1}{2} \times h \times pz + h \times QZ \ (ZR = QS = h)$$

$$= h\left(\frac{1}{2} PZ + QZ\right)$$

$$= h\frac{(PZ + 2QZ)}{2}$$

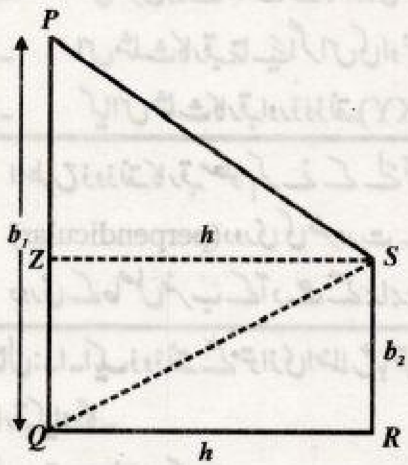
$$= h\frac{(PZ + QZ + QZ)}{2}$$

$$= h\left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right) \text{ یا } \frac{1}{2} \times h \times (b_1 + b_2) \quad (PZ + QZ = b_1)$$

کیااس فارمولے میں قیمت رکھنے پر بھی اسلم کے کھیت کارقبہ 156 مربع میٹرہی آئے گا؟ قیمت رکھکر دیکھئے۔

متوازی اضلاع کا حاصل جمع × اونچائی × $\frac{1}{2}$ =

ایک اور طریقہ دیکھئے



ذوذنقہ PQSR کارقبہ

SRQ کارقبہ + PQR کارقبہ =

[اونچائی × قاعدہ × $\frac{1}{2}$ = مثلث کارقبہ]

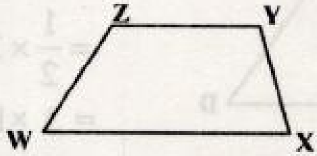
$$= \frac{1}{2} \times b_1 \times h + \frac{1}{2} \times h \times b_2$$

$$= \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$

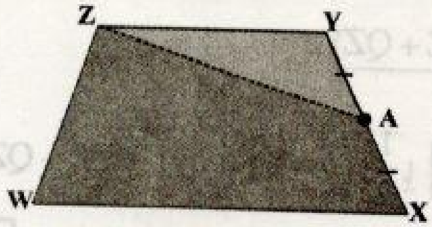
یعنی $\frac{1}{2}$ × اونچائی × متوازی اضلاع کا جوڑ

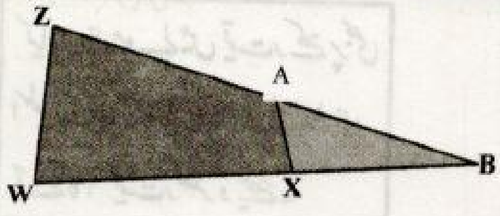
عملی تجربہ:۔

ایک ذوذنقہ لیجئے اوراسے نام دیجئے۔



2۔ ضلع xy کو موڑ کر اسکا وسطی نقطہ معلوم کیجئے اور اسے A نام دیجئے۔





3۔ قینچی سے Z کو A سے ملاتے ہوئے

کاٹیے اور AY کو AX کے ساتھ رکھئے۔

4۔ اس طرح بڑے مثلث کے قاعدہ کی لمبائی کیا ہے؟

5۔ اس مثلث کا رقبہ بتایئے اگر اس کی اونچائی h اکائی ہے۔

6۔ کیا اس مثلث کا رقبہ اور ذوذنقہ (WZXY) کا رقبہ برابر ہے۔

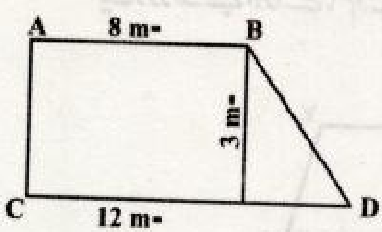
اسطرح ذوذنقہ کا رقبہ معلوم کرنے کے لئے ہمیں متوازی اضلاع کی لمبائی اور ان دو اضلاع کے بیچ کی عمودی (perpendicular) دوری کی ضرورت ہے۔ متوازی اضلاع کی لمبائیوں کا جوڑ اور ان کے بیچ کی عمودی دوری کے حاصل ضرب کے آدھے کے برابر رقبہ ہوتا ہے۔

مثال:۔ ا۔ ایک ذوذنقہ کے متوازی اضلاع بالترتیب 12 میٹر اور 8 میٹر ہیں اور انکے بیچ کی دوری 3 میٹر ہے تو ذوذنقہ کا رقبہ کیا ہوگا۔

حل:۔ ہم جانتے ہیں کہ

ذوذنقہ کا رقبہ $= \frac{1}{2} \times h(b_1 + b_2)$

دیا ہوا ہے $b_1 = 12\text{m}, b_2 = 8\text{ m}, h = 3\text{m}$



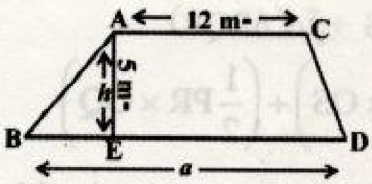
$\therefore \frac{1}{2} \times 3\text{m}(12\text{m} + 8\text{m})$

$= \frac{1}{2} \times 3\text{m} \times 20\text{m}$

$= 3 \times 10\text{m}^2$

$= 30 \text{ m}^2$

مثال۔2 ایک ذوذنقہ کا رقبہ 105 مربع میٹر اور متوازی اضلاع میں سے ایک کی لمبائی 12 میٹر ہے اور اونچائی 5 میٹر ہے تو دوسرے ضلع کی لمبائی کیا ہوگی؟



حل:۔ دیا ہوا ہے

$A = 105$ مربع میٹر

$h = 5\text{m}$

ایک متوازی ضلع کی لمبائی $AC = 12$ میٹر

دوسرے ضلع کو ہم a مان لیتے ہیں

اس لئے

$$\text{ذوذنقہ کا رقبہ} = \frac{1}{2}h(a+b)$$

$$\text{یا}\quad 105\text{m}^2 = \frac{1}{2}\times 5\text{m}(\text{a}+12\text{m})$$

$$\text{یا}\quad 105\text{m}^2 = \frac{1}{2}\times(5\text{am}+60\text{m}^2)$$

$$\text{یا}\quad 105\text{m}^2\times 2 = 5\text{am}+60\text{m}^2$$

$$\text{یا}\quad 210\text{m}^2 - 60\text{m}^2 = 5\text{am}$$

$$\text{یا}\quad 150\text{m}^2 = 5\text{am}$$

$$\frac{150\text{m}^2}{2\text{am}} = a$$

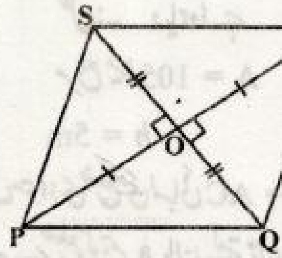
اسلئے دوسرے متوازی ضلع کی لمبائی 30 میٹر ہے۔

13.3 شکل معین (Rhombous) کا رقبہ

ابھی تک آپ نے دیکھا کہ الگ الگ ذو ربعۃ اضلاع کا رقبہ نکالنے کے لئے ہم نے قبل سے معلوم اشکال کے رقبوں کو کام میں لیا۔ جیسے مثلث، مربع، مستطیل پھر ان سے معلوم متوازی الاضلاع اور ذوذنقہ۔

شکل PQRS ایک شکل معین ہے۔ اسلئے اسکے وتر (Diagonals) ایک دوسرے کے عمودی ناصف (Prependicular bisector) ہیں۔

شکل معین PQRS کا رقبہ



$$= (\Delta PQR \text{ کا رقبہ} + \Delta PRS \text{ کا رقبہ})$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times PR \times OS\right) + \left(\frac{1}{2} PR \times OQ\right)$$

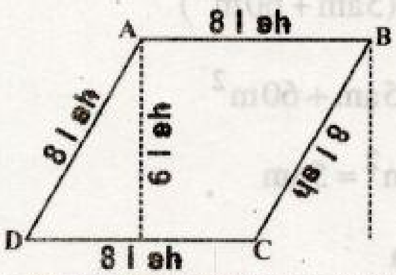
$$= \frac{1}{2} PR \times (OS + OQ) \qquad (\text{مشترک لینے پر})$$

$$= \frac{1}{2} PR \times SQ \quad (OS + OQ = SQ)$$

$$= \frac{1}{2}(d_1 \times d_2)$$

جہاں $PR = d_1$ اور $SQ = d_2$ (d = diagonal وتر)

مثال۔3 کسی شکل معین کا ایک ضلع 8 سنٹی میٹر اور عمود 6 سنٹی میٹر ہو تو شکل معین کا رقبہ معلوم کیجئے۔



حل: ہم جانتے ہیں کہ

شکل معین کا رقبہ = قاعدہ × عمود

یا $A = b \times h$

$A = 8 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$

$= 48 \text{ cm}^2$

جب شکل معین کے وتروں کی ناپ نہ دی ہوئی ہو اور قاعدہ اونچائی معلوم ہو تو ہم متوازی الاضلاع کے فارمولے کے مطابق ذوزنقہ الاضلاع کا رقبہ نکال لیتے ہیں۔

سوچئے ذیل کے بیانات میں سے کون سا صحیح ہے۔ وجہ کے ساتھ بتایئے۔

(i) ہر ایک شکل معین ایک متوازی لاضلاع ہوتا ہے ....

(ii) ہر ایک متوازی الاضلاع ایک شکل معین ہوتا ہے ....

مثال۔4 ایک شکل معین کے وتر بالترتیب 20 سنٹی میٹر اور 24 سنٹی میٹر ہوں تو اسکا رقبہ معلوم کیجئے۔

حل: ہمیں معلوم ہے کہ شکل معین کا رقبہ = وتروں کا حاصل ضرب × $\frac{1}{2}$

یعنی $A = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

$$A = \frac{1}{2} \times 20cm \times 24cm$$

$$= 240\ cm^2$$

خودکرکے دیکھئے

احاطہ	رقبہ	d_2	d_1	راس عمود	ضلع کی لمبائی	شکل معین
....	....	12 cm	18 cm	–	–	1
....	....	–	–	9 cm	12 cm	2

13.4 کثیرالاضلاع (Polygon)

سوچیئے کیا آپ دوقطعہ خطوط کی مدد سے کوئی بند شکل بنا سکتے ہیں؟

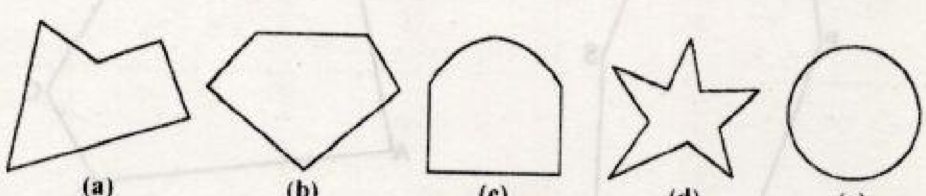
اسکے لئے کم سے کم تین قطعہ خطوط کی مدد سے ہی بند شکل بنائی جاسکتی ہے۔

(یہاں ہم خط منحنی Curve line سے گھری بند شکل کی بات نہیں کرر ہے ہیں)

اس طرح چار پانچ خطوط کے ذریعہ بالترتیب آپ ذو ا ربعۃ ضلاع (quadrilateral) خمسۃ الاضلاع (Pentagon) جیسی بند شکل بنا سکتے ہیں۔ کوئی بند شکل جو خطوط مستقیم (Straight lines) کے ذریعہ بنی ہو کثیرالاضلاع (Polygon) کہلاتی ہے۔

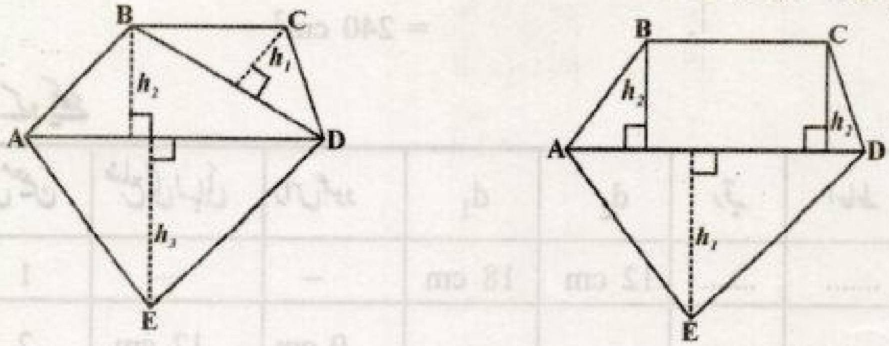
خودکرکے دیکھئے۔

نیچے دی گئی شکلوں میں کثیرالاضلاع کوالگ کیجئے۔



جس طرح ہم نے ذوربعۃ الاضلاع کو مثلثوں میں بانٹ کر رقبہ معلوم کیا۔ اسی طرح ہم الگ الگ کثیر الاضلاع کا رقبہ ذوربعۃ الاضلاعوں اور مثلثوں کی مدد سے معلوم کر سکتے ہیں۔

نیچے دی گئی تصویروں سے سمجھئے۔



نیہا نے خمستہ الاضلاع ABCDE کو تین مثلثوں میں بانٹ کر اسکا رقبہ معلوم کیا اسطرح

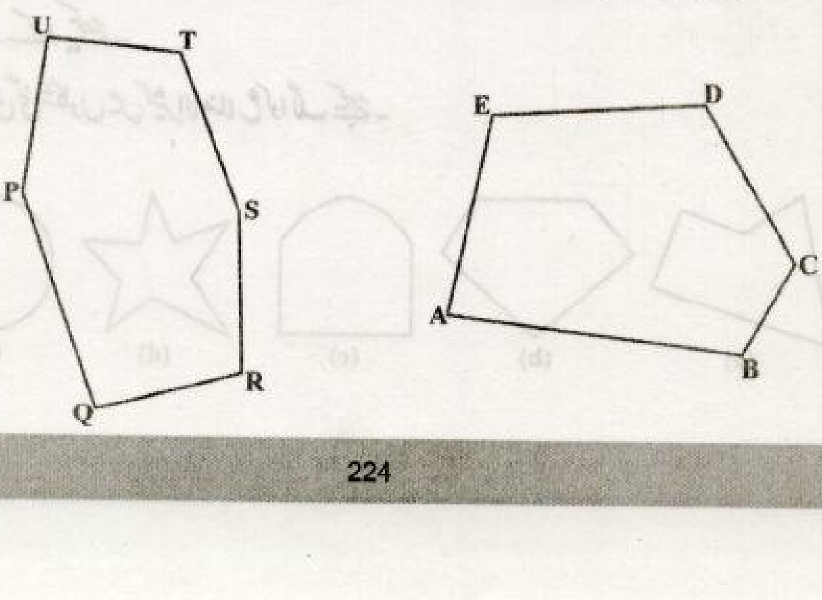
رقبہ ΔADE + رقبہ ΔADB + رقبہ ΔBDC

رقبہ کثیر الاضلاع = رقبہ ADB + رقبہ ABDC

اشفاق نے خمستہ الاضلاع ABCDE کو تین مثلثوں اور ایک مستطیل میں بانٹ کر اسکا رقبہ معلوم کیا۔ اشفاق کے لئے علامتی شکل میں خمستہ الاضلاع کے رقبہ کے لئے مساوات (equation) لکھئے۔

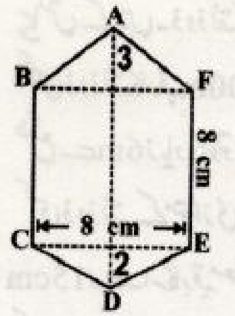
خود کر کے دیکھئے۔

1۔ مندرجہ ذیل کثیر الاضلاعوں کا رقبہ معلوم کرنے کے لئے انہیں مثلثوں اور ذوربعۃ الاضلاعوں میں بانٹئے اور ساتھ ہی کثیر الاضلاع کے رقبہ کے لئے مساوات لکھئے۔



2۔ نیچے کی بناوٹوں میں دی گئی معلومات کی بنیاد پر کثیر الاضلاعوں کا رقبہ نکالئے۔

(A)

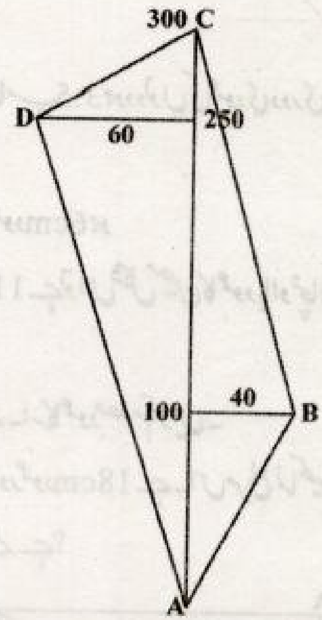


کثیر الاضلاع ABCDEF کا رقبہ

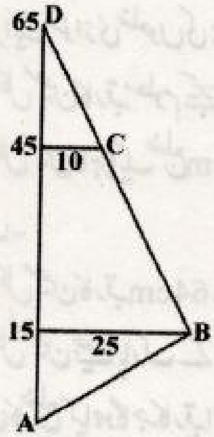
=ABF کا رقبہ + مربع BCEF کا رقبہ + CED کا رقبہ

=...................+...............+.............

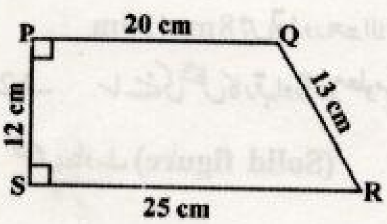
(C)



(B)



سوالنامہ 13.2



1۔ ایک ذوزنقہ PQRS کے P> اور S> زاویہ قائمہ ہیں۔ اس کے اضلاع کی پیائش تصویر میں دکھائی گئی ہے۔ ذوزنقہ کا رقبہ معلوم کیجئے۔

2۔ ایک ذوزنقہ ABCD میں AB اور CD متوازی ہیں۔ AB=30cm، BC=15 cm، DC=44cm اور AD=13 cm تو ذوزنقہ کا رقبہ معلوم کیجئے۔

3۔ کسی ذوذنقہ کے متوازی اضلاع 52cm اور 27cm ہیں اور دوسرے دو اضلاع 25cm اور 30cm کی پیمائش کے ہیں۔ ذوذنقہ کا رقبہ معلوم کیجئے۔

4۔ کسی ذوذنقہ کا رقبہ 200m ہے اور اسکی اونچائی 8m ہے۔ اگر متوازی ضلعوں میں سے ایک ضلع دوسرے ضلع سے 6m زیادہ ہو تو متوازی ضلعوں کی لمبائی معلوم کیجئے۔

5۔ کسی ذوذنقہ کے متوازی اضلاع بالترتیب 24cm اور 20cm ہیں اور دونوں اضلاع کے بیچ کی دوری 15cm ہے۔ اسکا رقبہ معلوم کیجئے۔

6۔ کسی ذوذنقہ کا رقبہ $384cm^2$ ہے۔ اگر متوازی ضلعوں کا تناسب 3:5 ہو دونوں کی عمودی دوری 12cm ہو تو ہر ایک متوازی ضلعوں کی ناپ نکالئے۔

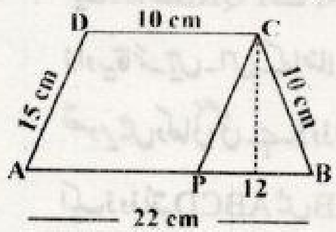
7۔ ایسے شکل معین کا رقبہ معلوم کیجئے جسکا ہر ایک ضلع 10cm اور عمود 6cm ہو

8۔ ایک شکل معین کا ہر ایک ضلع 8cm ہے اور اسکا رقبہ $11.2cm^2$ ہے تو اس شکل معین کا عمود یا اونچائی معلوم کریں۔

9۔ کسی شکل معین کا رقبہ 64cm ہے اور اسکا احاطہ 64cm ہے۔ اسکا عمود معلوم کریں۔

10۔ ایک شکل معین جیسے پارک کے ہر ایک ضلع کی لمبائی 72cm اور عمود 18cm ہے۔ اس مربع نما کھیل کے میدان کا ضلع کیا ہوگا جسکا رقبہ اس شکل معین کے رقبہ کے برابر ہے؟

11۔ کسی دو ربعتہ الاضلاع کا ایک وتر 30 میٹر اور سامنے کے راسوں (Vertices) سے ڈالے گئے عمود 10m اور 8m ہیں تو ذو ربعتہ الاضلاع کا رقبہ نکالئے۔

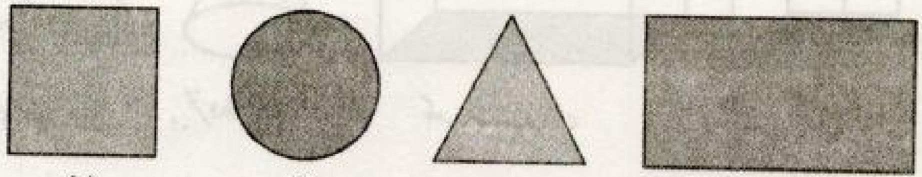


12۔ سامنے کی شکل کا رقبہ اور عمود معلوم کیجئے۔

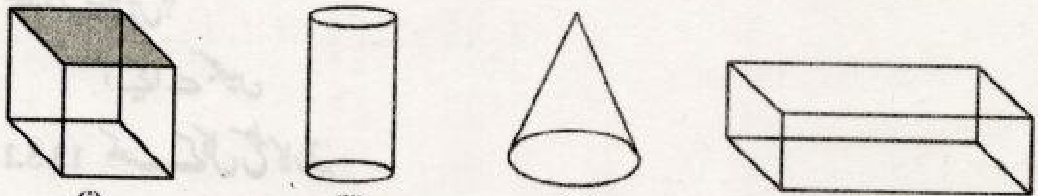
ٹھوس بناوٹ (Solid figure)

آپ دو سمتی اور سہ سمتی بناوٹوں کے بارے میں تھوڑا جانتے ہیں۔ آیئے ہم اُمر اور اکبر کی مدد کریں۔

امراور اکبر کے پاس کچھ دوسمتی بناوٹیں کٹی ہوئی رکھی ہیں۔ان کی مدد سے انہیں کچھ سہ سمتی بناوٹیں بنانی ہیں۔



دوسمتی (Two dimensional) بناوٹیں

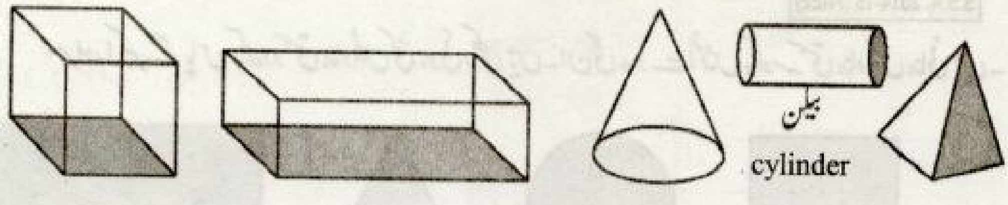


سہ سمتی (Three dimensional) بناوٹیں

1۔ شکل(i) کو بنانے کے لئے آپ کس دوسمتی بناوٹ کو استعمال کرینگے؟ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ ایسی کتنی بناوٹوں کی مدد سے (i) کو بنایا جاسکتا ہے؟اسی طرح (ii)،(iii) اور (iv) کیلیئے بتایئے۔

	لئے جانے والی دوسمتی بناوٹیں	الگ الگ بناوٹوں کی تعداد
شکل(ii) کے لئے		
شکل(iii) کے لئے		
شکل(iv) کے لئے		

اسطرح آپ نے کچھ سہ سمتی بناوٹوں کو دوسمتی بناوٹوں کی مدد سے بنایا۔آپ نے اوپر دی گئی بناوٹوں کو بناتے وقت دیکھا ہوگا کہ کچھ بناوٹوں میں دو یا دو سے زیادہ متماثل (congruent) سطح ہیں۔انکے نام دیجئے۔ایسا کون سا ٹھوس ہے جسکی سبھی سطحیں متماثل ہیں۔

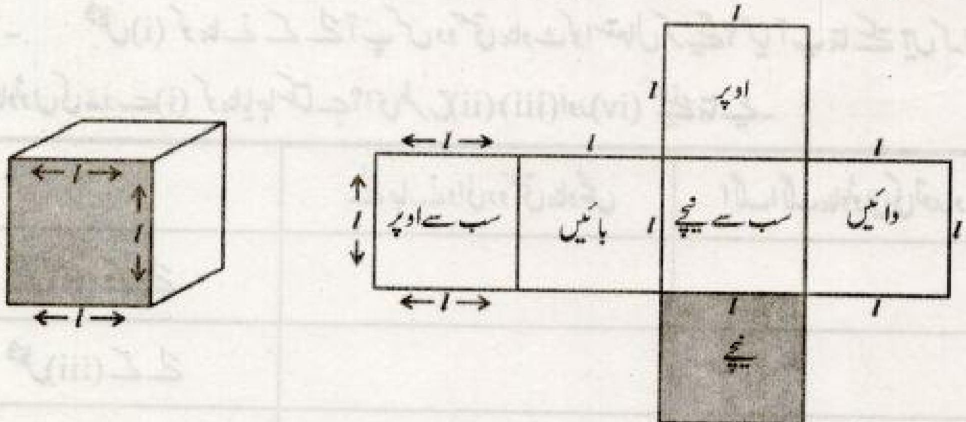


ہاں آپ نے ٹھیک سوچا مکعب کے سبھی سطح مربع نما اور برابر ہوتے ہیں۔ آپ یہ بھی جانتے ہیں کہ متماثل سطح رقبہ میں برابر ہوتے ہیں۔ تب کیا ہم مکعب کے ایک سطح یعنی مربع کا رقبہ معلوم ہونے پر مکعب کے پورے سطحوں کا رقبہ معلوم کر سکتے ہیں؟

آیئے اسے سمجھیں

13.5.1 مکعب کے کل سطح کا رقبہ

دیپک ایک مکعب کی شکل کے ڈبے کو رنگ کر رہا ہے تو اسے مکعب کی سبھی سطحوں کو رنگنا ہوگا۔ آیئے یہ جانیں کہ اسے کل کتنے رقبہ میں رنگ کرنا ہوگا؟ ڈبے کو کھولنے پر وہ جال کی شکل میں ذیل کی شکل میں دکھائی دے گا۔



ہر ایک سطح کا رقبہ لکھیے۔

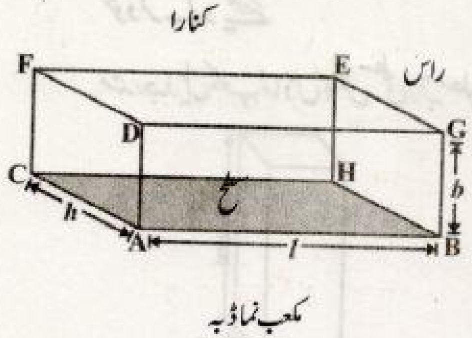
کیا سبھی سطحوں کا رقبہ برابر ہے؟

چونکہ ایک سطح کا رقبہ $= l$ اکائی $\times\ l$ اکائی $= l^2$ مربع اکائی

اس لئے چھ سطحوں کا رقبہ $=$ مربع اکائی $6 \times l^2$

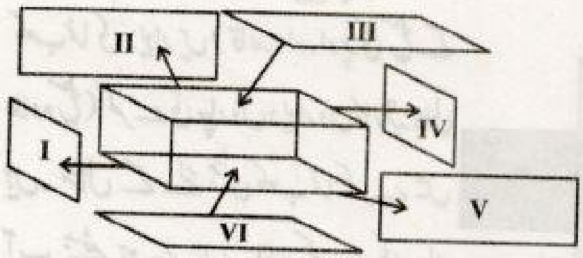
$= 6l^2$ یا $6 \times (\text{ضلع})^2$

13.5.2 مکعب نما(Cuboid) کے کل سطح کا رقبہ



مکعب نما بناوٹ کو ٹوتھ پیسٹ ، صابن کے ڈبے یا اینٹ سے آسانی سے سمجھا جاسکتا ہے۔

مان لیجئے آپ ایک مکعب نما ڈبہ لیکر اسے کھول کر برابر سطح پر پھیلا دیتے ہیں۔



مکعب نما کے کل سطحوں کا رقبہ

مان لیجئے کہ مکعب نما کی

لمبائی = l اکائی ہے

چوڑائی = b اکائی

اونچائی = h اکائی۔

سبھی چھ سطح مستطیل نما ہیں اور آمنے سامنے کے سطح متماثل ہیں۔ اسلئے مکعب نما میں متماثل سطحوں کے تین جوڑے ہوتے ہیں۔

اسطرح

مکعب نما کے کل سطحوں کا رقبہ = مستطیل I کا رقبہ + مستطیل II کا رقبہ + مستطیل III کا رقبہ + مستطیل IV کا رقبہ + مستطیل V کا رقبہ + مستطیل VI کا رقبہ

$$= hb + lh + bl + hb + lh + bl$$

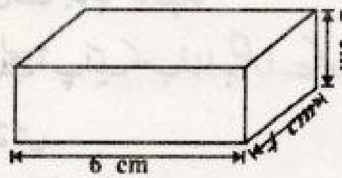
$$= 2hb + 2lh + 2bl$$

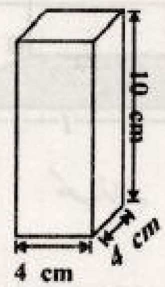
$$= (hb + lh + bl)$$

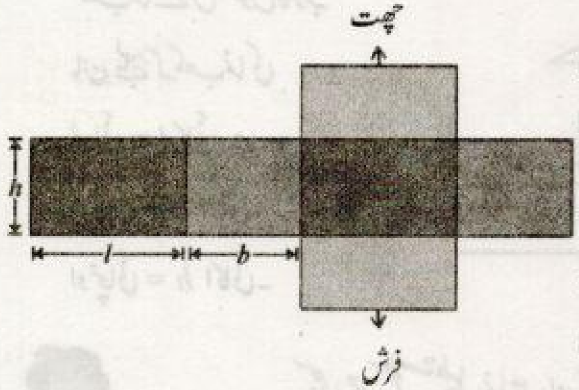
یعنی مکعب نما کا کل سطحی رقبہ = (لمبائی × اونچائی + چوڑائی × اونچائی + لمبائی × چوڑائی) × 2

خود کر کے دیکھئے

مندرجہ ذیل مکعب نماؤں کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجئے





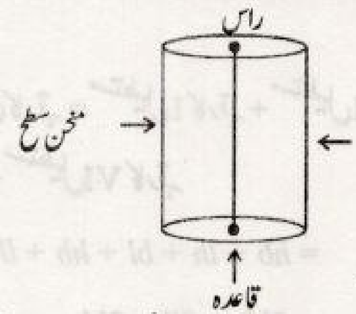


مکعب نما کی دیواریں (قاعدہ اور اوپر کی سطح کے علاوہ سطح) کمرے کی چاروں دیواروں کا رقبہ بناتی ہیں۔ مثال کے لئے جس مکعب نما کمرے میں آپ بیٹھے ہوئے ہیں۔ اس کمرے کی چار دیواروں کا کل رقبہ $2(h \times l + b \times h)$ یعنی $2h(l + b)$ سے حاصل کیا جاتا ہے۔

13.5.3 بیلن (Cylinder)

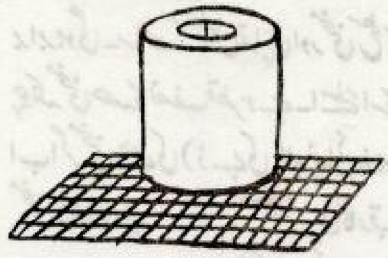
آپ نے گھر میں ٹن کا یا اسٹیل کا بیلن کی شکل کا ڈبہ ضرور دیکھا ہوگا۔ آیئے ایسی شکلوں کا سطحی رقبہ معلوم کریں۔

بیلن میں ایک منحنی سطح اور دو دائرہ نما متماثل سطحیں ہیں

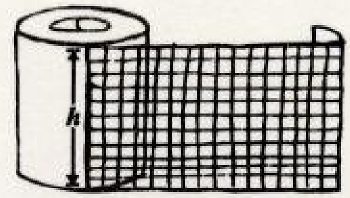


آیئے کچھ اور جانکاری حاصل کرتے ہیں۔

ایک بیلن نما ڈبے کے نچلی سطح کو کاغذ پر رکھکر اسکے چاروں طرف پنسل سے نشان لگا کر اس حصے کو کاٹ لیتے ہیں۔ پھر ایک دوسرا کاغذ لیتے ہیں جسکی چوڑائی بیلن نما ڈبے کی اونچائی کے برابر ہو۔ اس کاغذ کو ڈبے کے چاروں طرف لپیٹ دیتے ہیں جو بیلن نما شکل میں تبدیل ہو جاتا ہے۔

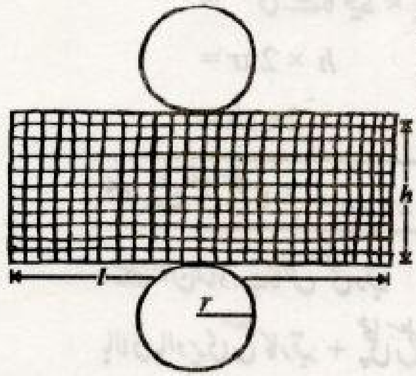


(i)

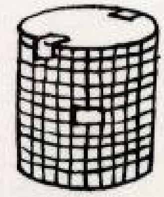


(ii)

کیا مستطیل نما حصہ کی لمبائی / دائرہ نما حصہ کے محیط کے برابر ہے۔



(iii)

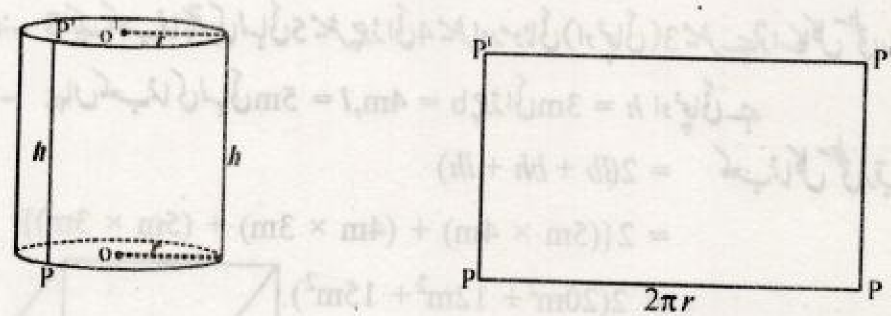


(iv)

اس کاغذ کو کھولنے پر یہ مستطیل نما بن جاتا ہے۔

بیلن نما ڈبے میں کل تین سطح ہیں جسمیں دو سطح دائرہ نما (نچلی واوپری) اور تیسری سطح گھماؤدار حصہ ہے۔ نچلی اور اوپری دونوں دائرہ نما سطحوں کا رقبہ برابر ہوگا۔ اگر دائرہ نما سطحوں کا نصف قطر r ہو تو ہر ایک دائرہ نما سطح کا رقبہ = πr^2 ہوگا۔

اب سوال اٹھتا ہے کہ تیسری سطح یعنی گھماؤدار حصے کا رقبہ کیسے حاصل کیا جائے؟ چرچا کیجئے۔



حاصل مستطیل نما پٹی کی لمبائی گھماؤدار حصے کے محیط کے برابر ہوگی اور چوڑائی گھماؤدار یا منحنی سطح کے اونچائی

برابر ہوگی۔ساتھ مستطیل نما پٹی اور منحنی سطح کا رقبہ بھی برابر ہوگا۔

چونکہ منحنی حصہ کا نصف قطر r ہے۔اسلئے اسکا محیط $= 2\pi r$

اب اگر منحنی حصے کی (ڈبے کی) اونچائی h ہو تو

منحنی حصے کا رقبہ = مستطیل پٹی کا رقبہ

= پٹی کی لمبائی × چوڑائی

= منحنی حصے کا محیط × اونچائی

$= h \times 2\pi r$

$= 2\pi rh$

$\boxed{\text{بیلن کے منحنی سطح کا رقبہ} = 2\pi rh}$

اسلئے بیلن نما ڈبے کا کل سطحی رقبہ

= بالائی یا اوپری سطح کا رقبہ + نچلی سطح کا رقبہ + منحنی حصے کا رقبہ

$= 2\pi rh + \pi r^2 + 2\pi r^2$

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r\,(h + r)$

$\boxed{\text{بیلن کا کل سطحی رقبہ} = 2\pi r\,(r + h)}$

نوٹ:۔ جب تک کوئی ہدایت نہ دی گئی ہو π کی قیمت $\frac{22}{7}$ لیتے ہیں

مثال:۔ 5 ایک مکعب نما پتھر کی لمبائی 5 میٹر چوڑائی 4 میٹر اور موٹائی (اونچائی) 3 میٹر ہے تو اسکا کل سطحی رقبہ نکالیے۔

حل:۔ یہاں مکعب نما کی لمبائی $l = 5m$ چوڑائی $b = 4m$، $h = 3m$ اونچائی ہے

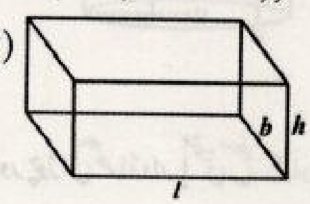
مکعب نما کل سطحی رقبہ $= 2(lb + bh + lh)$

$= 2\{(5m \times 4m) + (4m \times 3m) + (5m \times 3m)\}$

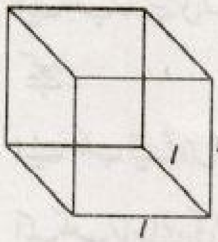
$= 2(20m^2 + 12m^2 + 15m^2)$

$= 2 \times 47m^2$

$= 94m^2$



مثال 6 ایک مکعب کا ایک ضلع 5cm ہے تو اس مکعب کے کل سطح کا رقبہ معلوم کیجئے۔



حل یہاں l (ضلع) = 5cm ہے

اسلئے کل سطحی رقبہ $= 6l^2$

$= 6 \times 5\text{ cm} \times 5\text{ cm}$

$= 150\text{ cm}^2$

مثال 7 ایک بیلن نما ٹھوس لوہے کی لمبائی 50 سنٹی میٹر ہے اور قاعدہ کا نصف قطر (radius) 7 سنٹی میٹر ہے تو اس بیلن نما ٹھوس کا (i) منحنی سطح کا رقبہ (ii) کل سطحی رقبہ معلوم کیجئے۔ (جہاں $\pi = \frac{22}{7}$)

حل (i)

(i) بیلن کا منحنی سطح کا رقبہ $= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7\text{m} \times 50cm$

$= 44\text{cm} \times 50\text{cm}$

$= 2200\text{cm}^2$

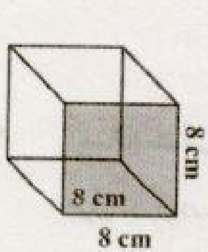
(ii) بیلن کا کل سطحی رقبہ $= 2\pi r(r + h)$

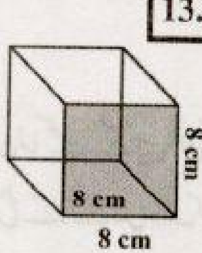
$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7(7 + 50)$

$= 44\text{cm} \times 57\text{cm}$

$= 2508\text{ cm}^2$

سوالنامہ 13.3





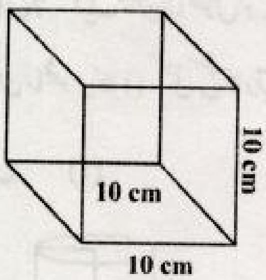
1 دیئے گئے دو مکعبوں کا جوڑ کر ایک مکعب نما بنایا گیا، تو مکعب نما کے کل سطح کا رقبہ معلوم کیجئے۔

2. ایک مکعب کا ایک ضلع 12cm ہے مکعب کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجئے۔

3. ایک مکعب نما شئے کی لمبائی 15cm، چوڑائی 14cm اور اونچائی 13cm ہے اس شئے کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجئے۔

4. ایسے معکب جیسے ٹھوس کا ضلع معلوم کیجئے جسکا کل سطحی رقبہ $2400m^2$ ہے

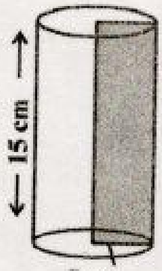
5. ایک مکعب نما صابن کی لمبائی 6cm، چوڑائی 5cm، اور کل سطحی رقبہ $148cm^2$ ہے تو اسکی اونچائی معلوم کرو۔

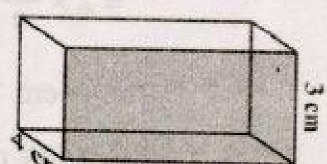


6. ایک مکعب کے شکل کی لکڑی کے ٹکرے کے ایک کنارے کی لمبائی 10cm ہے۔ اسمیں سے $3cm \times 2cm \times 1cm$ ناپ کا مکعب نما ایک کونے سے کاٹ کر نکال لیا گیا ہے۔ تو بچے حصے کا رقبہ کتنا ہوگا؟

7. ایک بیلن کی اونچائی 25cm ہے اور قاعدہ کا رقبہ $154cm^2$ ہے تو بیلن کے منحنی سطح کا رقبہ معلوم کرو۔

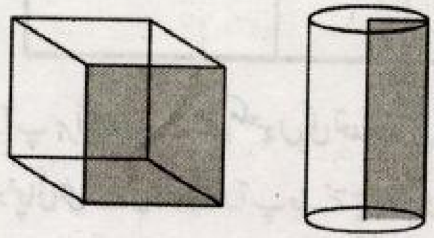
8. اگر آپکو ان بناوٹوں کو کاغذ سے پورا ڈھکنا ہو تو کم سے کم کتنے کاغذ کی ضرورت ہوگی۔





9. ایک عمارت میں 20 بیلن نما کھمبے لگے ہیں جن کی اونچائی 6 میٹر ہے اور نصف قطر 14cm ہے۔ 4 روپیہ فی مربع میٹر کی در سے منحنی سطح کے رقبے میں رنگ کرنے کا خرچ معلوم کیجئے۔

مکعب، مکعب نما اور بیلن کا حجم (Volume)



کسی سہ سمتی شکل کے ذریعہ گھیری گئی جگہ اس کا حجم کہلاتا ہے۔ اپنے آس پاس پائے جانے والی چیزوں کے حجم کا موازنہ کیجئے۔ واضح ہے کہ کسی کمرے میں رکھے ہوئے صندوق کے مقابلے میں کمرے کا حجم زیادہ ہوگا۔ ایک ڈبے میں رکھے صابن کے بہ نسبت ڈبے کا حجم زیادہ ہوگا۔

ہمیں معلوم ہے کہ ہم کسی سطح کا رقبہ معلوم کرنے کے لئے مربع اکائی (Square unit) کا استعمال کرتے ہیں۔ یہاں ہم ٹھوس کا حجم معلوم کرنے کے لئے مکعب اکائی (Cubic unit) کا استعمال کرتے ہیں

رقبہ نکالنے کے لئے ہم سطح کو مربع اکائیوں میں بانٹتے ہیں اور حجم نکالنے کے لئے ٹھوس کو مکعب اکائیوں میں بانٹنے کی ضرورت ہے۔

اسطرح کسی ٹھوس کا حجم معلوم کرنے کے لئے ہم اسمیں مکعب اکائیوں کو گنتے ہیں

1 مکعب سنٹی میٹر $= 1\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 1\text{ cm} = 1\text{ cm}^3$

جسے ہم 1 مکعب یا کیوبک سنٹی میٹر بھی پڑھتے ہیں

امکعب میٹر $= 1m \times 1m \times 1m = 1m^3$

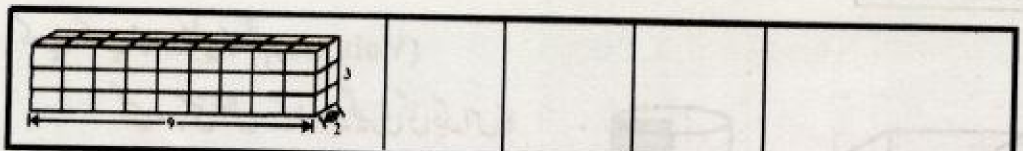
امکعب ملی میٹر $= 1ml \times 1ml \times 1ml = 1ml^3$

آیئے اب ہم مکعب نما، مکعب اور بیلن کا حجم معلوم کرنے کا طریقہ سمجھیں۔ ہر ایک ٹھوس کے متعلق باری باری چرچا کرینگے۔

13.6.1 مکعب نما (Cuboid)

برابر ناپ والے (ہر ایک مکعب کی لمبائی برابر 1cm) لمبائی، چوڑائی، اونچائی کے مکعب لیجئے۔ ایک مکعب نما بنانے کے لئے انہیں منظم کیجئے۔ آپ انہیں مختلف شکلوں میں مرتب کر سکتے ہیں۔ مندرجہ ذیل جدول پر غور کیجئے اور خالی جگہوں کو پُر کیجئے۔

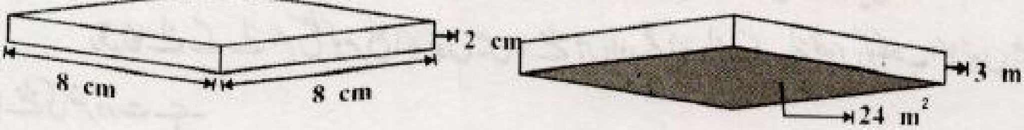
مکعب نما	لمبائی	چوڑائی	اونچائی	$v = l \times b \times h$
	9	2	1	$9 \times 2 \times 1 = 18$



اگر آپ ہر ایک بناوٹ میں مکعبوں کی تعداد کو گنیں گے تو ان کی قیمت آپکو $l \times b \times h$ یعنی لمبائی x چوڑائی $\times$ اونچائی ہی ملے گی۔ جیسا کہ آپ جانتے ہیں حجم کسی شئے کے ذریعہ گھیری گئی جگہ کی قیمت ہوتا ہے۔ اب اگر اوپر تصویر میں دیے گئے مکعب نما خالی ہوتے تو ان میں مکعبوں کی تعداد کے برابر سامان بھرا جا سکتا جو اس مکعب نما کا حجم بھی ہے۔

کوشش کیجیے۔

1۔ مندرجہ ذیل مکعب نماؤں کا حجم معلوم کیجئے۔



2۔ مندرجہ ذیل مکعبوں کا حجم معلوم کیجئے۔

(i) 4cm ضلع والا (ii) 1.5mt ضلع والا

13.6.2 مکعب Cube

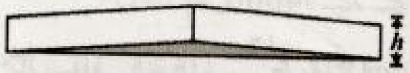
مکعب مکعب نما کی ایک مخصوص شکل ہے جس میں $l = b = h$ ہوتا ہے۔ اس لئے

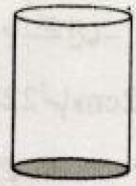
مکعب کا حجم $= l \times l \times l = l^3$

خود کر کے دیکھئے

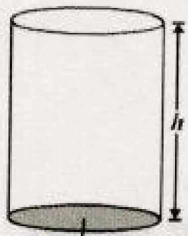
1۔ برابر ناپ والے 64 مکعبوں کو جتنے شکل میں آپ مرتب کر سکتے ہیں اتنے شکلوں میں مرتب کرتے ہوئے مکعب نما بنائیے۔ ہر ایک شکل کا سطحی رقبہ معلوم کیجئے کیا یکساں حجم والے ٹھوس بناوٹوں کا کل سطحی رقبہ برابر ہوتا ہے۔

2۔ ایک کمپنی بسکٹ بیچتی ہے۔ بسکٹوں کو پیک کرنے کے لئے مکعب نما شکل کے ڈبوں کا استعمال کیا جا رہا ہے۔ ڈبہ A $20cm \times 8cm \times 3cm$ اور ڈبہ B $10cm \times 12cm \times 4cm$ ۔ کون سا ڈبہ کمپنی کے لئے معاشی نقطہ نظر سے فائدہ مند رہے گا اور کیوں؟ کیا آپ ایسے کسی اور ناپ کے ڈبے کا سجھاؤ دے سکتے ہیں جس کا حجم انکے برابر ہو لیکن معاشی نقطہ نظر سے نسبتاً زیادہ فائدہ مند ہو۔





13.6.3 ہم جانتے ہیں کہ مکعب نما کا حجم اسکے قاعدہ کے رقبہ اور اونچائی کا حاصل ضرب معلوم کرتے ہوئے معلوم کیا جاتا ہے۔کیا اس طرح ہم بیلن کا حجم معلوم کر سکتے ہیں؟ مکعب نما کی طرح بیلن میں بھی ایک قاعدہ (نچلا دائرہ نما حصہ) اور بالائی حصہ (اوپری دائرہ نما حصہ) ہوتا ہے جوایک دوسرے کے متوازی اور متماثل ہوتے ہیں۔مکعب نما کی طرح اسکا سطح منحنی قاعدہ پر عمودی شکل میں ہوتا ہے۔



اسلئے مکعب نما کا حجم = قاعدہ کا رقبہ × اونچائی

$$lbh = h \times l \times b$$

بیلن کا حجم = قاعدہ کا رقبہ x اونچائی

$$= h \times \pi r^2$$

$$= \pi r^2 h$$

مثال۔8 ایک مکعب نما کا حجم $60m^3$ ہے اور قاعدہ کا رقبہ $20m^2$ ہے تو اونچائی معلوم کرو۔

حل: یہاں حجم = 20 مکعب میٹر اور قاعدہ کا رقبہ = 20 مربع میٹر

یعنی اونچائی = $\dfrac{\text{حجم}}{\text{قاعدہ کا رقبہ}} = \dfrac{60m^2}{20m^2} = 3m$

مثال۔9 ایک مکعب نما شکل کا گودام ہے جس کی پیائش $40m \times 30m \times 20m$ ہے۔اسکے اندر $1m \times 2m \times 3m$ کے کتنے ڈبے رکھے جاسکتے ہیں؟

حل: گودام کے اندر رکھے جانے والے ڈبوں کی تعداد = $\dfrac{\text{گودام کا حجم}}{\text{ایک ڈبے کا حجم}}$

$$= \frac{40m \times 30m \times 20m}{3m \times 2m \times 1m}$$

= 4000 ڈبے

یعنی گودام میں 4000 ڈبے رکھے جاسکتے ہیں۔

مثال۔10 کاغذ کا ایک مستطیل نما ٹکڑا 22cm لمبا، 12cm چوڑا ہے۔ لمبائی کے سمت میں کاغذ کو گول کر کے ایک بیلن بنایا جائے تو بیلن کا حجم کتنا ہوگا۔ معلوم کیجیے۔

حل: قاعدہ کا محیط $= 2\pi r$ اور اونچائی $= h = 12\text{cm}$ ہوگا

کیونکہ $2\pi r = 22\text{cm}$

$$22\text{cm} = 2 \times \frac{22}{7} \times r$$

$$\frac{22 \times 7}{2 \times 22} = r$$

$$r = \frac{7}{2}\text{cm}$$

حجم $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}\text{cm} \times 12\text{cm}$$

$$= 11 \times 42 = 462\ \text{cm}^3$$

سوالنامہ 13.4

1۔ (الف) ایک مکعب میں کل کتنی سطحیں ہوتی ہیں؟

(ب) کسی مکعب نما میں کناروں کی کُل تعداد کتنی ہوتی ہے؟

(ج) مکعب اور مکعب نما کے سطحوں میں کیا فرق؟

(د) مکعب میں کتنے راس یا کونے (Vertex) ہوتے ہیں؟

2۔ نیچے مکعب نما کے کناروں کی لمبائیاں دی ہوئی ہیں۔ انکے

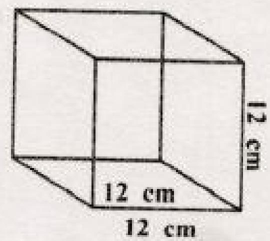
(الف) کل سطحی رقبہ نکالئے (ب) حجم نکالئے

(i) 10m, 5m,6m (ii) 17cm, 12cm, 10cm

3۔ 5cm کنارے والے ایک مکعب سے 1cm کنارے والے کتنے مکعب کاٹے جاسکتے ہیں؟

4۔ ایک مکعب نما کا حجم $576m^3$ ہے اور قاعدہ مربع نما ہے جس کا ایک ضلع 6m ہے مکعب نما کی اونچائی معلوم کیجئے۔

5۔ 12cm کنارے والے دو مکعب برابر سے جوڑ دیئے جائیں تو نئے مکعب نما کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجئے۔



6۔ ایک لڑکا 2 لیٹر دودھ خریدنے گیا۔ دکاندار نے اسے ایک مستطیل نما قاعدہ والے برتن سے جو 20cm لمبائی 15cm چوڑا اور 5cm گہرا تھا۔ ایک بار ناپ کر دے دیا۔ بتایئے اس لڑکے کو کتنا کم یا زیادہ دودھ ملا۔
(اگر 1 لیٹر = $1000\ cm^3$)

7۔ ایک تالاب کی لمبائی 20 میٹر، چوڑائی 12 میٹر اور گہرائی 8 میٹر ہے اور ایک دوسرے تالاب کی لمبائی اور چوڑائی 20 میٹر کے برابر ہے اور گہرائی پہلے تالاب کے برابر ہے۔ کس تالاب میں زیادہ پانی ہے۔

8۔ ایک خالی ڈبہ جس میں صابن رکھا جاتا ہے۔ ڈبے کی لمبائی 0.40m، چوڑائی 0.25m اور اونچائی 0.25m ہے۔ صابن 5cm × 4cm × 2cm سائز کا ہے۔ ڈبے میں کتنے صابن رکھے جاسکتے ہیں؟

9۔ 30 میٹر لمبا، 20 سنٹی میٹر چوڑا اور 4 میٹر اونچی دیوار بنوانی ہے؟ اگر ایک اینٹ کی لمبائی 25cm، چوڑائی 12.5cm اور اونچائی 7.5cm ہو تو اس دیوار کے بنوانے میں کتنے اینٹ لگیں گے۔ (سمنٹ اور بالو کا حجم نہ کے برابر مانا گیا ہے)

10۔ ایک کمرے کی لمبائی 15 میٹر، چوڑائی 10 میٹر اور اونچائی 8 میٹر ہے۔ اُس کمرے میں کتنی ہوا بھرے گی؟

ہم نے سیکھا

1۔ مکعب کا کل سطحی رقبہ $= 6l^2$ یا $6 \times$ (ضلع)^2

2۔ مکعب نما کا کل سطحی رقبہ $= 2\{l.b + b.h + l.h\}$

$2 \times$ (لمبائی × چوڑائی + لمبائی × اونچائی + چوڑائی × اونچائی) =

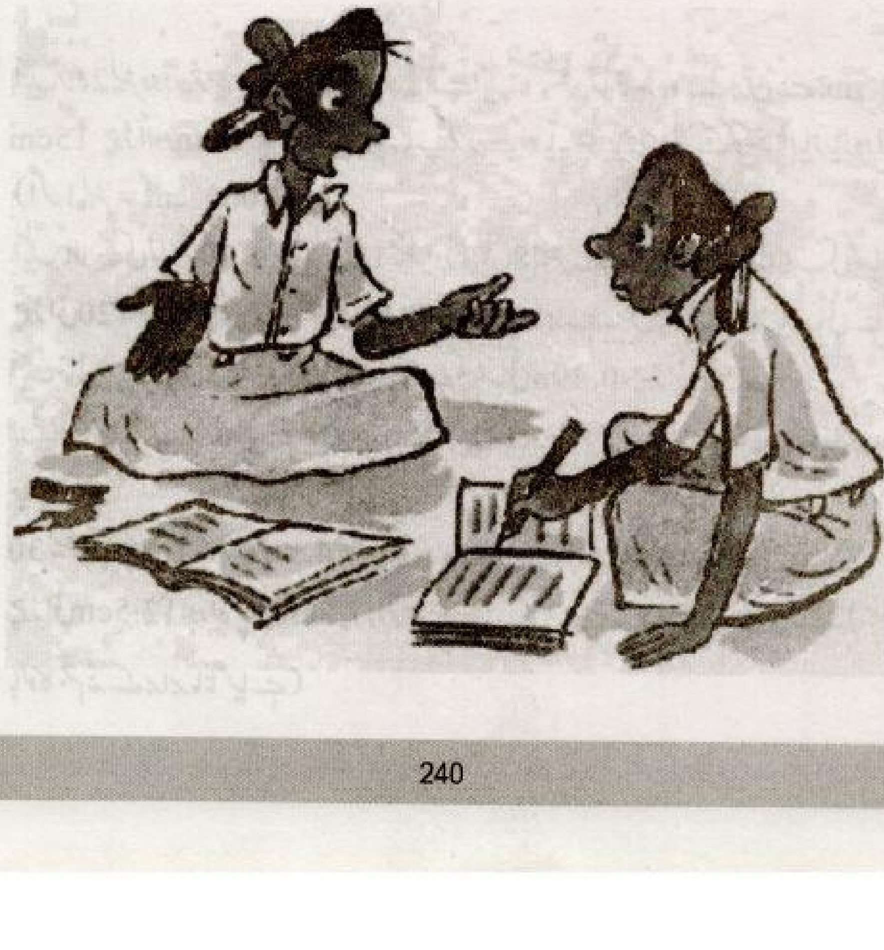
3۔ بیلن کا منحنی سطح کا رقبہ $= 2\pi rh$

4۔ بیلن کا کل سطحی رقبہ $= 2\pi r(r + h)$

5۔ بیلن کا حجم $= \pi r^2 h$

6۔ مکعب نما کا حجم $= l \times b \times h$

7۔ مکعب کا حجم $= l^3$



S.S.A. 2014-15 (FREE)

باب-14 اجزائے ضربی (Factors)

14.1 تمہید

آپنے اجزائے ضربی کے بارے میں پڑھا ہے۔آیئے اجزائے ضربی کی بنیاد پر کچھ سوالوں کو حل کریں۔
نیچے جدول میں کچھ اعداد کے سبھی اجزائے ضربی دیئے گئے ہیں۔باقی اعداد کے سبھی اجزائے ضربی خالی جگہوں میں بھریں

جدول

عدد	سبھی اجزائے ضربی
1	1
2	2,1
3	1
4	....
5	....
6	6,3,2,1
7	....

عدد	سبھی اجزائے ضربی
18	....
21	21,7,3,1
27	....
28	....
29	29,1
30	....

جدول سے ایسے اعداد لکھیے جنکے صرف دو جز ضربی ہیں

....

کیا آپ بتا سکتے ہیں ایسے اعداد کو کیا کہتے ہیں؟

....

اب دو سے زیادہ اجزائے ضربی والے اعداد کو یہاں لکھیے۔

....

یہ سبھی منقسم (Composite) اعداد ہیں

سوچئے کیا 2 کے علاوہ کوئی اور جفت (Even) عدد غیر منقسم (Prime) ہوسکتا ہے۔

کیا سبھی اعداد غیر منقسم اجزائے ضربی کی شکل میں لکھے جا سکتے ہیں؟ سوچئے الگ الگ اعداد لے کر انکے غیر منقسم اجزائے ضربی کر کے دیکھئے

....

کیا اعداد کی طرح ہی الجبرائی عبارتوں کے بھی اجزائے ضربی کئے جا سکتے ہیں؟ آیئے اسے سمجھیں۔

14.2 الجبرائی عبارتوں کے اجزائے ضربی

$3x^2y$ ایک عبارت ہے۔ آپ نے دیکھا ہے کہ عبارت کے رکن اجزائے ضربی کے حاصل ضرب ہوتے ہیں۔ یہاں $3x^2 = 3 \times x \times x \times y$ ہے اسکے بعد اجزائے ضربی نہیں کئے جا سکتے ہیں۔ اسلئے دیا گیا اجزائے ضربی $3x^2y$ کا غیر منقسم اجزائے ضربی ہے۔ الجبرائی ضمن میں اسے "غیر منقسم اجزائے ضربی" کہتے ہیں۔ $3x^2y$ کا ایک اجزائے ضربی درج ذیل ہے:۔

$$3x^2 = 3x^2 \times y$$

$25 = 25 \times 1$

کیا یہ 25 کا غیر منقسم شکل ہے؟

اسے غیر منقسم شکل میں لکھئے؟

....

$12 = 2 \times 6$

کیا یہ غیر منقسم شکل ہے؟

کیوں نہیں؟

کیا یہ غیر منقسم اجزائے ضربی ہے؟ واضح طور پر 3 کا غیر منقسم جز ضربی 3 ہے حقیقت میں 1 ہر ایک رکن کا جز ضربی ہے لیکن مخصوص حالت میں جب ضروری ہو تب ہی اسے لکھا جاتا ہے۔ x^2 کو $x \times x$ جز ضربی کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ اسلئے $3 \times x^2 \times y$ غیر منقسم اجزائے ضربی نہیں ہے۔ ایک دوسری عبارت $2y^2(y+1)$ پر غور کریں۔ کیا اسے اسکے غیر منقسم اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے؟ سوچئے

$$2y^2(y+1) = 2 \times y \times y(y+1)$$

خود کر کے دیکھئے

نمبر شمار	رکن/عبارت	غیر منقسم اجزائے ضربی
1	$5xyz$	$5 \times x \times y \times 2$
2	$9y^2$	....
3	$16\ xy^2$	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times x \times y \times y$
4	$13\ xyz$	....
5	$12x\ (y + 1)$	....

اوپر دیئے گئے مثالوں سے آپکو یہ تو صاف ہو ہی گیا ہوگا کہ جب ہم کسی الجبرائی عبارت کا اجزائے ضربی کرتے ہیں تو ہم اسے اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھتے ہیں۔ یہ اجزائے ضربی اعداد، متحرک یا متغیر یا الجبرائی عبارت ہو سکتے ہیں۔ کسی بھی عدد یا عبارت کو ایسے ٹکڑوں میں بانٹنا جسکے حاصل ضرب سے وہ بنا ہو (یعنی جس کا پورا حصہ اس عدد یا عبارت میں آجائے) اجزائے ضربی کرنا ہوتا ہے۔ عبارت $5xyz$,$3xy$,$5x(y + z)$ جیسی عبارتیں پہلے سے ہی اجزائے ضربی کی شکل میں ہیں جیسے $5xyz = 5 \times x \times y \times z$

اب ذرا $x^2 + 2x, 2x + 4, 3x + 6$ جیسی عبارتوں پر غور کیجئے۔ $3x + 6$ کن اعداد اور عبارتوں کے ضرب سے بنا ہے؟ آیئے کچھ عبارتوں کے اجزائے ضربی کرنے کے طریقے نکالیں۔

14.3 مشترک (Common) جز ضربی کے ذریعہ اجزائے ضربی کرنا

اوپر دی گئی عبارت $3x + 6$ پر غور کیجئے۔ اس میں دو رکن $3x$ اور 6 ہیں دونوں رکنوں کو انکے غیر منقسم اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھتے ہیں۔

$$3x = 3 \times x$$
$$6 = 2 \times 3$$
$$3x + 7 = 3 \times x + 2 \times 3$$

دھیان دیں۔ یہاں جز ضربی 3 دونوں رکنوں میں مشترک ہے۔ اسے مشترک جز ضربی کہتے ہیں۔

بٹن کے اصول سے ہم جانتے ہیں کہ

$$a \times b + a \times c = a(b + c)$$

اسلئے $3x + 2 \times 3 = 3(x + 2)$

اسلئے $3x + 6 = 3 \times x + 2 \times 3$

$$= 3(x + 2)$$

اسطرح عبارت $3x + 6$ وہی ہے جو $3 \times (x + 2)$ ہے۔اب ہم اسکے جز ضربی پڑھ سکتے ہیں۔یعنی 3 اور $(x + 2)$ عبارت کے غیر منقسم اجزائے ضربی ہیں۔آیئے اب $6a^2b - 9ab$ کا اجزائے ضربی کرتے ہیں۔

اسکے لئے پہلے دونوں رکنوں کے اجزائے ضربی لکھیں۔

$3(x+2)$ کو اُنکے اجزائے ضربی سے تقسیم کر کے دیکھی، کیا تقسیم پورا۔پورا جاتا ہے؟

$$6a^2b = 2 \times 3 \times a \times a \times b$$
$$4ab = 3 \times 3 \times a \times b$$

ظاہر ہے کہ دونوں رکنوں میں $3, a, b$ مشترک جز ضربی ہیں۔اسلئے

ایک عبارت حاصل ضرب کی شکل میں یک رکنی ہوتا ہے

$$6ab - 9ab = (2 \times 3 \times a \times a \times b) - (3 \times 3 \times a \times b)$$
$$= (2 \times 3ab \times a) - (3 \times 3ab)$$
$$= 3ab\ (2 \times a - 3)$$
$$= 3ab(2a - 3) \quad (3ab \text{ مشترک لینے پر})$$

یہی مطلوبہ اجزائے ضربی ہے۔

ہم نے دو رکنوں والے عبارت کا اجزائے ضربی کیا ہے۔اسی طرح دو سے زیادہ رکن والے عبارتوں کا حاصل ضرب بھی کیا جا سکتا ہے۔جیسے

$15a^4 - 20a^3 + 5a^2$ کا اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

یہ سہ رکنی (Trinomial) عبارت ہے۔پہلے ہم ہر ایک رکن کا دو رکنی کی طرح غیر منقسم اجزائے ضربی نکالتے ہیں۔

حل:
$$15a - 20a + 5a = (3 \times 5 \times a \times a \times a \times a) - (2 \times 2 \times 5 \times a \times a \times a) + (5 \times a \times a)$$

دھیان دیجئے یہاں $5 \times a \times a$ اجزائے ضربی مشترک ہے۔اسلئے مشترک کو بنٹن کے اصول کے مطابق باہر لیتے ہیں۔

$15a = 3 \times 5 \times a \times a \times a \times a$
$20a =$ ....
$5a =$ ....

$$= 5 \times a \times a\ (3 \times a \times a - 2 \times 2 \times a + 1)$$
$$= 5a^2\ (3a^2 - 4a + 1)$$

خود کر کے دیکھئے (اجزائے ضربی معلوم کیجئے)۔

(i) $11xy + 22$ (ii) $p + pq - pqr$ (iii) $13x^2 - 2by^2$

(iv) $4p^2q^2r^2 + 2pqr$ (v) $7xy - 8y$

14.4 رکنوں کی ترتیب بدل کر اجزائے ضربی معلوم کرنا

عبارتوں کا اجزائے ضربی کرتے وقت ہمیں کئی بار ایسی عبارتیں مل جاتی ہیں جنکے سبھی رکنوں میں کوئی بھی مشترک جز ضربی (1 کو چھوڑ کر) نہیں ہوتا ہے۔ لیکن رکن کے کچھ جوڑوں میں مشترک جز ضربی ہوتے ہیں۔ جیسے $ax^2 + by^2 + bx^2 + ay^2$ میں دکھائی دیتا ہے۔ آیئے اسے سمجھیں۔

$ax^2 + by^2 + bx^2 + ay^2$ میں کیا آپ کو کوئی مشترک جز ضربی ملتا ہے؟

پر جب ہم اسے الگ طرح سے ترتیب دیتے ہیں جیسے:-

$ax^2 + by^2 + bx^2 + ay^2 = ax^2 + bx^2 + ay^2 + by^2$ (پھر ترتیب دینے پر)

تب اسکے پہلے دو رکنوں میں x^2 اور آخری دو رکنوں میں y^2 مشترک ہو جاتا ہے۔

$= x^2 (a + b) + y^2 (a + b)$

$= (a + b) (x^2 + y^2)$ (مطلوبہ اجزائے ضربی)

اسطرح عبارتوں کی ترتیب بدل کر اسکا جز ضربی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یہی دوبارہ ترتیب کے ذریعہ اجزائے ضربی کرنا ہے۔ دوبارہ ترتیب ایک سے زیادہ طریقوں سے کی جاسکتی ہے۔ لیکن نتیجہ غیر تبدیل رہتا ہے۔ ترتیب بدل سکتے ہیں کیونکہ آپ جانتے ہیں کہ ضرب کے عمل میں ترتیب بدلنے سے نتائج نہیں بدلتے۔ اس عبارت کو ایک اور طریقہ سے دوبارہ ترتیب دیکر اجزائے ضربی کیا جا سکتا ہے۔ جیسے:-

$ax^2 + by^2 + bx^2 + ay^2 = ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2$ (دوبارہ ترتیب سے)

$= a(x^2 + y^2) + b(x^2 + y^2)$ (مشترک لینے پر)

$= (x^2 + y^2) (a + b)$

اسطرح دوبارہ ترتیب کے ذریعہ اجزائے ضربی میں ہم ذیل مرحلوں میں کام کرتے ہیں۔

مرحلہ۔1 جانچ کرتے ہیں کہ عبارت کے سبھی رکنوں میں کوئی مشترک جز ضربی ہے یا نہیں

مرحلہ۔2 سبھی رکنوں میں مشترک جز ضربی نہیں ہونے پر ایسے رکنوں کی پہچان کرتے ہیں جنمیں مشترک جز ضربی ہو پھر ان رکنوں کو گروپ میں ترتیب دیتے ہیں

مرحلہ۔3 ہر گروپ کا اجزائے ضربی نکالتے ہیں

مرحلہ۔4 گروپوں کے مشترک جز ضربی کی پہچان کر الگ کر بنٹن اصول سے منظم کرتے ہیں۔

اسے بھی سمجھئے۔

$9ab + 6b^2 + 3a + 2b$ (دوبارہ ترتیب کرنے پر)

$= 3b(3a + 2b) + 1\ (3a + 2b)$ (1 سب کے لئے مشترک ہوتا ہے)

$= (3b + 1)\ (3a + 2b)$

جیسے $ab + ac + db + dc$ کا اجزائے ضربی کیجئے۔

مرحلہ۔1 یہاں چاروں رکن میں کوئی مشترک جز ضربی نہیں ہے۔

مرحلہ۔2 عبارت کے رکن $(ab + ac)$ کا ایک گروپ بناتے ہیں کیونکہ $(ab + ac)$ میں مشترک جز ضربی a ہے۔اسی طرح $(db + dc)$ کا ایک گروپ بناتے ہیں (کیوں؟)

مرحلہ۔3 اب دونوں گروپوں کا اجزائے ضربی کرتے ہیں۔

$$ab + ac + db + dc = (ab + ac) + (db + dc)$$
$$= a(b + c) + d(b + c)$$

مرحلہ۔4 اب دونوں گروپوں کے مشترک جز ضربی $(b + c)$ کو بنٹن کے اصول سے منظم کرتے ہیں۔

$$a(b + c) + d(b + c) = (b + c)(a + d)$$

یعنی $ab + ac + db + dc = (b + c)(a + d)$

مندرجہ بالا عبارت کا ایک دوسرے طریقہ سے گروپنگ کر کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

سوالنامہ 14.1

1۔ دیئے گئے رکنوں میں مشترک اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

(a) $9y, 27$ (b) $5x, 25x$ (c) $7ab, -14ab$

(d) $-16x^2y^2, -x^2y^2z^2$ (e) $17x, 102y$ (f) $11xyz, 10z$

(g) a^2bc, ab^2c, abc^2 (h) $2x, 3y, 5z$

(i) $20x^2y^2, 30y^2z^2, 40x^2z^2$ (j) $2x(a + b), x(a + b)$

2۔ دیئے گئے مثال کی بنیاد پر خالی جگہوں کو بھریئے:۔

ترتیب نمبر	رکن	الگ کیا گیا اجزائے ضربی	باقی بچا اجزائے ضربی
I	$12x^2y$	$3x$	$4xy$
II	$15ab$	-3	....
III	$-20xy$	$-2xy$	....
IV	$40x^2y^2$	....	-20
V	$-27abc$	....	$-3ab$

3۔ مندرجہ ذیل کا اجزائے ضربی معلوم کیجئے:۔

(a) $12x^2 - 15y^2 - 24^2xz^2$ (b) $-6a^2 + 36a - 24\,ab$

(c) $3a^2 + ab + 9a + 3b$ (d) $6ab - 4b + 6 - 4a$

(e) $ab^2 + a^2b + ac + bc$ (f) $a^2bc + b^2ca + c^2ab + a + b + c$

(g) $a(b - c) + d(c - b)$ (h) $3y(y + 3) + 6y(3y + 4)$

(i) $a^2 - 3a^2 + a - 3$ (j) $ab^2 - bc^2 - ab + c^2$

(k) $xy(a^2 + b^2) + ab(x^2 + y^2)$

14.5 متماثلات (Identities) کے استعمال سے اجزائے ضربی

آپ $(a + b)^2$ اور اسکی پھیلی ہوئی شکل $(a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b)$ کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ اسلئے جب عبارت مکمل مربع ہو تو معیاری متماثلہ کا استعمال کر کے۔ اسکا اجزائے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ آیئے معیاری متماثلوں کے استعمال سے عبارتوں (مکمل مربع) کا اجزائے ضربی کرتے ہیں

(i) $9x^2 + 12xy + 4y^2$ (ii) $4p^2q^2 - 8pqr + 4r^2$

(iii) $x^2 + 25y^2 - 10xy^2$

حل: یہاں $9x^2 + 12xy + 4y^2$

$= (3x)^2 + \times 3x \times 2y + (2y)^2$

یہاں $a = 3x$ اور $b = 2y$ ہے

$= (a)^2 + 2 \times a \times b + b^2$

$= (3x + 2y)^2 \; [\because a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)]$

$= (3x + 2y)\,(3x + 2y)$

مندرجہ بالا مثال میں ہم نے عبارت کو $a^2 + 2ab + b^2$ کی شکل میں بدلا جس سے ہمیں اجزائے ضربی حاصل ہوا۔ اسی طرح دوسری عبارتوں کو معیاری شکل میں بدل کر اجزائے ضربی معلوم کرتے ہیں۔

(ii) $4p^2q^2 - 8pqr + 4r^2 = 4(p^2q^2 - 2pqr + r^2)$

$= 4[(pq)^2 - 2 \times (pq)r + (r)^2]$

$= 4\,(pq - r)^2$ (کیوں)

$= 4(pq - r)\,(pq - r)\;[a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2]$

دیئے گئے مثال میں مشترک جز ضربی کو الگ کرنے سے معیاری شکل حاصل ہوتا ہے۔

(iii) $x^2 + 25y^2 - 10xy^2 = x^2 - 10xy + 25y^2$

$= (x)^2 - 2x.5y. + (5y)^2$

$= (x - 5y)^2$

$= (x - 5y)\,(x - 5y)$

اس طرح ایسی عبارت جو مکمل مربع (Whole square) ہوتی ہیں۔اُنکا اجزائے ضربی معیاری متماثلات کی بنیاد پر کیا جاسکتا ہے۔

14.6 دومربعوں کے فرق کی شکل میں دیئے گئے عبارتوں کا اجزائے ضربی

ہم جانتے ہیں:

$$a^2 - b^2 = (a - b)\,(a + b)$$

اس شکل میں دی گئی عبارتوں کو مناسب معیاری تماثلہ کی شکل میں بدل کر اسکا اجزائے ضربی معلوم کرسکتے ہیں۔دیئے گئے مثالوں ذریعہ اسے سمجھنے کی کوشش کرتے ہیں۔

مندرجہ ذیل عبارتوں کا اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

(i) $16x^2 - 9y^2$ (i) $x^4 - y^2$

(iii) $(p + q)^2 - (r - s)^2$ (iv) $x^2 - y^2 - z^2 + 2yz$ (v) $5^2 - 4^2$

(i) $16x^2 = (4x)^2$, $9y^2 = (3y)^2$ $\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$\therefore 16x^2 - 9y^2 = (4x)^2 - (3y)^2$

$= (4x - 3y)\,(4x + 3y)$

(ii) $x^4 - y^2 = (x^2)^2 - (y)^2$

$= (x^2 - y)\,(x^2 + y)$

(iii) $(p + q)^2 - (r - s)^2 = \{(p + q) - (r - s)\}\,\{(-p + q) + (r - s)\}$

$= \{p + q - r + s\}\,\{p + q + r - s\}$

$= (p + q - r + s)\,(p + q + r - s)$

(iv) $x^2 - y^2 - z^2 + 2yz = (x)^2 - (y^2 + z^2 - 2yz)$

$= (x)^2 - (y - z)^2$ [$(a - b)^2$ سے]

$= \{x - (y - z)\}\,\{x + (y - z)\}$

$= (x - y + z)\,(x + y - z)$

متماثلہ $(x + a)\ (x + b) = x^2 + (a + b)\ x + ab$ پر مشتمل عبارتوں کا اجزائے ضربی

عبارت $x^2 + 8x + 15$ پر غور کیجئے۔ کیا آپ پہلے دیئے گئے کسی طریقے سے اسکا اجزائے ضربی معلوم کر سکتے ہیں؟ ہم پاتے ہیں کہ اسکا اجزائے ضربی معیاری متماثلوں سے نہیں کیا جا سکتا ہے کیونکہ یہ مکمل مربع نہیں ہے؟ یہ مکمل مربعوں کے فرق کی شکل میں بھی نہیں ہے۔ آیئے دی گئی عبارت $x^2 + 8x + 15$ کے اجزائے ضربی کرنے کا طریقہ سمجھیں۔

متماثلہ $x^2 + (a + b)x + ab$ کے ذریعہ عبارت $x^2 + 8x + 15$ کے اجزائے ضربی کرنے کا طریقہ

مثال۔1 $x^2 + 8x + 15$

اگر ہم $x^2 + 8x + 15$ کا موازنہ $x^2 + (a + b)x + ab$ سے کریں تو ہم پائینگے کہ $ab = 15$ اور $a + b = 8$ ہے۔ اسکا مطلب ہے کہ ساکن رکن 15 کے ایسے دو جز ضربی ہوں جنکا حاصل ضرب 15 ہو اور $a + b$ کا حاصل جمع x کے ضربی عدد کے برابر یعنی 8 ہو۔ آپ a اور b کی الگ الگ قیمت سوچئے جنکا حاصل جمع 8 ہو اور جنہیں ضرب کرنے پر آپکو 15 ملتا ہے۔ آیئے $a = 4$، $b = 4$ انکا حاصل جمع $4 + 4 = 8$ ہے انکا حاصل ضرب $4 \times 4 = 16$ ہے جو اوپر دی گئی شرط کو پورا نہیں کرتا ہے۔ اب اگر $a = 1$ اور $b = 15$ تو $a \times b = 15$ لیکن $a + b = 15 + 1 = 16$۔ اس لئے a اور b کی مندرجہ بالا قیمتیں بھی دونوں شرطوں کو پورا نہیں کرتیں۔ اب اگر $a = 3$ اور $b = 5$ لیں $a + b = 3 + 5 = 8$ اور $3 \times 5 = 15$ اسلئے $a = 3$، $b = 5$ صحیح متبادل ہے۔

$$\therefore \text{جز ضربی}\ (x + a) = (x + 3)$$

$$(x + b) = (x + 5)$$

$$\therefore\ x^2 + 8x + 15 = x^2 + (3 + 5)x + 3 \times 5$$

$$= (x + 3)\ (x + 5)$$

$$[\ x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

اسلئے عام طور سے $x + mx + n$ کی شکل والے عبارتوں کو اجزائے ضربی کرنے کے لئے ہم ذیل مرحلوں میں کام کرتے ہیں۔

مرحلہ۔1 عبارت کے رکنوں کو انکے قوت نماؤں کی گھٹتی ترتیب میں رکھینگے

مرحلہ۔2 ساکن رکن n کے ایسے دو جز ضربی a اور b اسطرح لینگے کہ $a + b = m$ اور $a \times b = n$

مرحلہ۔3 بیچ والے رکن کو بنٹن کے اصول سے توڑیں گے یعنی

$$mn = (a + b)x = ax + bx$$

مرحلہ۔4 عبارت کی دوبارہ گروپنگ کر کے اجزائے ضربی کرینگے۔ جیسے

$$\begin{aligned} x^2 + mx + n &= x^2 + (a + b)x + ab \\ &= x^2 + ax + bx + ab \\ &= x(x + a) + b(x + a) \\ &= (x + a)\ (x + b) \end{aligned}$$

کچھ مثالوں سے اسے سمجھنے کی کوشش کیجئے۔

مندرجہ ذیل عبارت کا اجزائے ضربی نکالئے

(i) $x^2 + 21x + 80$ (ii) $y^2 - 15y + 56$

حل:

(i)
$$\begin{aligned} x^2 + 21x + 80 &= x^2 + (16 + 5)x + 16 \times 5 \\ &= x^2 + 16x + 5x + 16 \times 5 \\ &= x(x + 16) + 5\ (x + 16) \\ &= (x + 16)\ (x + 5) \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} y^2 - 15y + 56 &= y^2 + \{(-7) + (-8)\}\, y + (-7)(-8) \\ &= y^2 - 7y - 8y + (-7)\ (-8) \\ &= y(y - 7) - 8(y - 7) \\ &= (y - 7)\ (y - 8) \end{aligned}$$

آپنے دیکھا کہ $x^2 + mx + n$ کی طرح کی عبارت کا اجزائے ضربی متماثلہ کے استعمال سے کیسے کیا گیا۔

$ax^2 + bx + c$ کی طرح کے عبارتوں کا اجزائے ضربی نکالنا ہم آگے کے درجوں میں سیکھینگے ۔

سوالنامہ۔14.2

1۔ مندرجہ ذیل عبارتوں کا اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

(a) $1 + 2x + x^2$
(b) $a^2b^2 - 6abc + 9c^2$
(c) $1 - (a - b)^2$
(d) $16(a - b)^2 - 9(a + b)^2$
(e) $(x + y)^2 - 10(x + y) + 25$
(f) $ax^2 - bx - 4ab$
(g) $4x^2 - y^2 + 4y - 4$
(h) $9x^2 - \dfrac{x^2}{4}$
(i) $a^2 + a + 4 + 3a$
(j) $x^2 + 6x + 8$
(k) $y^2 - 13y + 30$
(l) $x^2 + 9x - 22$

2۔ درج ذیل عبارتوں کا اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

(a) $x^2 - 6x - 135$
(b) $8(x + y)^3 - 50(x + y)$
(c) $4x^2 + 9y^2 + 12xy - 1$
(d) $75 - x^2 + 10x$
(e) $12a^2 - 27$
(f) $ax^2 - bx^2 + by^2 - ay^2$

3۔ مندرجہ ذیل عبارتوں کا اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

(a) $16x^4 - 81y^4$
(b) $x^4 - 1$
(c) $x^4 - (x - y)^4$
(d) $9x^2 - 4y^2 - 3x + 2y$
(e) $(x + y)^3 + 4(x + y)^2 + 4x + 4y$

14.8 الجرائی عبارتوں کی تقسیم:

ابھی تک ہم نے الجرائی عبارتوں کے اعمال (Operations) میں جوڑنا، گھٹانا، ضرب کرنا اور اجزائے ضربی کرنا سیکھا۔ یہاں ہم الجرائی عبارتوں کو تقسیم کرنا سمجھینگے۔ آپ نے سیکھا کہ تقسیم، ضرب کے اُلٹا عمل ہے۔

اگر $2 \times 3 = 6$ تو $6 \div 2 = 3$

یا $6 \div 3 = 2$

اس خاصیت کا استعمال ہم الجرائی عبارتوں کے تقسیم میں بھی کرتے ہیں۔

اگر $2x \times 3x = 6x^2$

تو $6x^2 \div 2x = 3x$

$6x^2 \div 3x = 2x$

اسے ایسے بھی سمجھئے

$$\frac{6x^2}{2x} = \frac{2 \times 3 \times x \times x}{2 \times x} = 3x$$

الجرائی عبارتوں کے تقسیم کو سمجھنے کیلئے یک رکنی کا یک رکنی سے تقسیم پر غور کرتے ہیں۔

14.8.1 ایک رکنی کا ایک دوسرے یک رکنی سے تقسیم

$6x^2y$ کو $2x$ سے تقسیم کیجئے۔

ہمیں $6x^2y \div 2x$ معلوم کرنا ہے یعنی $\frac{6x^2y}{2x}$ معلوم کرنا ہے

ہم $6x^2y$ اور $2x$ کا غیر منقسم اجزائے ضربی حاصل کرتے ہیں۔

$$6x^2y = 2 \times 3 \times x \times x \times y$$

$$2x = 2 \times x$$

اسلئے $$\frac{6x^2y}{2x} = \frac{2 \times 3 \times x \times x \times y}{2 \times x} = \frac{(2 \times x)(3 \times x \times y)}{2 \times x}$$

ہم پاتے ہیں کہ نسب نما اور شمار کنندہ میں مشترک جز ضربی $(2 \times x)$ ہے جسے اسی طریقہ سے ہٹا دیتے ہیں جیسے ہم اعداد کے تقسیم میں کرتے ہیں۔

اسے ہم ذیل طریقہ سے بھی حل کر سکتے ہیں۔

$$\frac{6x^2y}{2x} = \frac{2 \times 3 \times x \times x \times y}{2 \times x} = 3 \times x \times y = 3xy$$

($\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ قوت نما کے اصول سے)

مثال۔2 مندرجہ ذیل کو حل کیجئے۔

$$-12a^4b^5 \div (-3a^2b^2)$$

حل: $$-12a^4b^5 + (-3a^2b^2) = \frac{-12a^4b^5}{-3a^2b^2}$$

$$= \frac{-2 \times 2 \times 3 \times a \times a \times a \times a \times b \times b \times b \times b}{-3 \times a \times a \times b \times b}$$

$$= \frac{-2 \times 2 \times 3 \times a \times a \times a \times a \times b \times b \times b \times b}{-1 \times 3 \times a \times a \times b \times b}$$

$$= \frac{-2 \times 2 \times a \times a \times b \times b \times b}{-1}$$

$$= \frac{-4a^2b^3}{-1}$$

$$= \frac{-4a^2b^3}{-1} \times \frac{(-1)}{(-1)}$$ (نسب نما اور شمار کنندہ کو(-1) سے ضرب کرنے پر)

$$= \frac{4a^2b^3}{1} = 4a^2b^3$$

خود کر کے دیکھیے

تقسیم کیجیے

(i) $18a^2b^2 \div 18$ (ii) $9x^2y \div x^2y$

(ii) $-8xy \div 2y$ (iv) $2ab \div 3$

14.8.2 کثیر رکنی کا یک رکنی سے تقسیم

ایک سہ رکنی $4x^3 = 6x^2 + 24$ میں یک رکنی $2x$ سے تقسیم کرتے ہیں۔ دیا گیا ہے

$$4x^3 - 6x^2 + 2x \div 2x = \frac{4x^3 - 6x^2 + 2x}{2x}$$

(سبھی رکنوں کا اجزائے ضربی کرنے پر) $$= \frac{2 \times 2 \times x \times x \times x - 2 \times 3x \times x + 2 \times x}{2x}$$

$$= \frac{(2 \times x) \times (2 \times x \times x) - (2 \times x)(3 \times x) + (2 \times x) \times 1}{2 \times x}$$

$$=\frac{(2\times x)\{(2\times x\times x)-(3\times x)+1\}}{2\times x}=\frac{2x(2x^2-3x+1)}{2x}$$

نسب نما اور شمار کنندہ سے مشترک اجزائے ضربی ہٹانے پر

$$\frac{4x^3-6x^2+2x}{2x}=2x^2-3x+1 \quad \text{(مطلوبہ حاصل تقسیم)}$$

آیئے ایک دوسرے طریقہ سے اسے کریں

$$\frac{4x^3-6x^2+2x}{2x}=\frac{4x^3}{2x}-\frac{6x^2}{2x}+\frac{2x}{2x}$$

(عبارت کے ہر ایک رکن میں تقسیم کنندہ سے تقسیم کرنے پر)

مطلوبہ حاصل تقسیم $= 2x^2 - 3x + 1$

اس طرح ہم نے پایا کہ کسی کثیر رکنی میں تقسیم کرنے کے لئے اسکا اجزائے ضربی کر یک رکنی بناتے ہیں۔ پھر منقسم (Dividend) عبارت اور تقسیم کنندہ (Divisor) کے مشترک اجزائے ضربی کو مناسب طریقہ سے ہٹا کر تقسیم کا عمل پورا کرتے ہیں۔ ہم نے یہ بھی پایا کہ کثیر رکنی میں یک رکنی سے تقسیم دینا اس عبارت کے ہر ایک رکن میں اس یک رکنی سے تقسیم کرنے کے برابر ہوتا ہے۔

اب ذرا سوچیے اگر مندرجہ بالا مثال میں عبارت کا ایک رکن 3 ہوتا ہے تو کیا ہم $2x$ سے اس کثیر رکنی عبارت میں پورا تقسیم دے پاتے؟

ایک دوسرے مثال سے اسے سمجھتے ہیں۔

$(3x^3 - 5x^2 + 12x) \div 6x$

$$=\frac{3x^3-5x^2+12x}{6x}=\frac{3x\times x^2-3x\times\frac{5x}{3}+3x\times 4}{3x\times 2}$$

$$=\frac{3x(x^2-\frac{5x}{3}+4)}{3x\times 2}$$

$$=\frac{x^2-\frac{5x}{3}+4}{2}$$

کیا $5x^2$ کو $3x \times \frac{5x}{3}$ کی شکل میں رکھنے پر کوئی فرق پڑا

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{3} \div 2 + \frac{4}{2}$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{3} \times \frac{1}{2} + 2$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{6} + 2$$

دوسرے طریقہ سے

$$\frac{3x^3 - 5x^2 + 12x}{6x} = \frac{3x^3}{6x} - \frac{5x^2}{6x} + \frac{12x}{6x}$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{6} + 2$$

خود کرکے دیکھئے۔

تقسیم دیجئے

(i) $24\,(a^2bc + ab^2c + abc^2) \div 9abc$

(ii) $(4x^2 - 12xy + 6y^2) \div 2xy$ (iii) $(x^2 - 2x - 1) \div 2$

(B) 14.8.3 کثیر رکنی کا کثیر رکنی سے تقسیم

ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ تقسیم کرتے وقت کثیر رکنی کو یک رکنی بنا کر یک رکنی سے تقسیم کرتے ہیں۔ یا یک رکنی سے کثیر رکنی کے ہر ایک رکن میں تقسیم کرتے ہیں۔ کثیر رکنی سے کثیر رکنی میں تقسیم کرتے وقت بھی ہم اس حقیقت کا دھیان رکھتے ہیں۔ یہاں دھیان دینے والی بات یہ ہے کہ ایک سے زیادہ رکن والے عبارتوں کو بھی یک رکن کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ اجزائے ضربی کرنے پر وہ یک رکنی عبارت بن جاتے ہیں۔ آیئے اس اصول کا استعمال کر کثیر رکنی سے کثیر رکنی میں تقسیم کریں جیسے $x^2 + 2x$ کو $x + 2$ سے تقسیم دیجئے۔

حل: دیا گیا ہے۔

$$(x^2 + 2x) \div (x + 2) = \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$$

$$= \frac{x(x+2)}{(x+2)}$$

کسب نما اور شمار کنندہ میں مشترک اجزائے ضربی $(x + 2)$ ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی عدد میں اسی عدد سے تقسیم دینے پر حاصل تقسیم 1 ہوتا ہے۔ اسلئے

$$\frac{(x+2)}{(x+2)} = 1$$

$$= x \times 1$$

$$= x$$

مثال۔3 $4x^2 - 12xy + 9y^2 \div (4x^2 - 9y^2)$

حل: دیا گیا ہے

$$\frac{4x^2 - 12xy + 9y^2}{4x^2 - 4y^2} = \frac{(2x)^2 - 2 \times 2x \times 3y + (3y)^2}{(2x)^2 - (3y)^2}$$

$$= \frac{(2x-3y)^2}{(2x-3y)(2x+3y)}$$ (متماثلہ $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ کے استعمال سے)

$$= \frac{(2x-3y)(2x-3y)}{(2x-3y)(2x+3y)}$$

$$= \frac{(2x-3y)}{(2x+3y)}$$ (مشترک اجزائے ضربی کاٹنے پر)

سوالنامہ۔ 14.3

1۔ مندرجہ ذیل عبارتوں کو تقسیم کیجئے۔

(a) $-2x^2yz$ کو $4xyz$ سے

(b) $-\frac{1}{2}xy$ کو $\frac{x}{2}$ سے

(c) $(3x^2)^5$ کو $(9x^2)^3$ سے

(d) $(7x^5)^2 \times (3y^5)^5$ کو $27y^3$ سے

(e) $8x^6y^6$ کو $-4x^6y^6$ سے

2۔ دیئے گئے کثیر رکنی کو یک رکنی سے تقسیم دیجئے۔

(a) $(5m^3 - 30m^2) \div 5m$ (b) $(12x^4 - 6x^2) \div (-3x^2)$

(c) $(5x^2 - 15x) \div (x - 3)$ (d) $(6x^4 + 9x^3 - 12x^2) \div 3x^2$

3۔ تقسیم دیجئے

(a) $(a^2 + 8a + 16) \div (a + 4)$ (b) $\{(a + b)^2\} - 4ab\} \div (a - b)^2$

(c) $(a^4 - b^4) \div (a^2 - ab)$ (d) $(x - 81) \div (x + 9)$

(e) $121x^2 + 16y^2 - 88xy \div 4y - 11x$

(f) $(x^2 - x - 30) \div (x - 6)$ (g) $\left[p^2 - p + \frac{1}{4}\right] \div \left\{p - \frac{1}{2}\right\}$

(h) $(x^2 - 5xy + 6y^2) \div (x - 2y)$ (i) $(27x^3 + 3x^2 - 2x + 8) \div (3x - 2)$

14.9 الجبرائی سوالات کے حل میں کچھ عام غلطیاں

الجبرائی سوالات جیسے۔ کثیر رکنی عبارتوں کے جوڑ، گھٹاؤ اور ضرب و تقسیم میں کچھ غلطیاں عام طور سے ہو جاتی ہیں۔ آیئے انہیں جان کر دور کریں۔

غلطی۔1 کلاس میں ایک طالب علم نے 2 میں x جوڑ کر حاصل جمع $2x$ معلوم کیا اور دوسرے نے $x + 2$ حاصل کیا۔ کسکا جواب صحیح ہے؟

ہمیں معلوم ہے کہ غیر یکساں (unlike) رکنوں کو آپس میں نہیں جوڑا جا سکتا۔ یکساں رکنوں کو چھانٹئے،

.... $5, 31x, 5z, y, 2x$

$2x + 31x = ?$ $2 + x = ?$

اسلئے انکا حاصل جمع $2x$ نہیں ہوگا۔ اسکا صحیح حل ہوگا $2 + x$ یا $x + 2$

غلطی۔2 روبی کو $7x + x + 2x$ کا حاصل جمع $9x$ ہوا۔ کیا یہ صحیح ہے؟ کیا آپ روبی کے حل میں کی گئی غلطی بتا سکتے ہیں؟ عام طور سے x کا ضربی عدد 1 ہونے پر اسے نہیں لکھا جاتا ہے۔ اگر آپ $7x + 1x + 2x$ کو جوڑیں تو اسکا صحیح حل کیا ہوگا؟

غلطی۔3 سونم نے $x = -5$ کے لئے رکن $7x$ کی قیمت درج ذیل عمل سے حاصل کیا۔

$$7x = 7 - 5 = 2$$

کیا یہ عمل صحیح ہے؟

$7x$ کا مطلب ہے $7 \times x$ یہاں x کی قیمت میں 7 سے ضرب کیا جانا چاہئے لیکن برائیکٹ کا استعمال نہیں ہونے سے یہ گھٹانے کی ہدایت دیتا ہے۔ اگر ہم گھٹاؤ کے نشان کے ساتھ برائیکٹ کا استعمال کریں تو سونم کا صحیح حل

$$7 \times (-5) = ?$$

غلطی۔4 یاسمین اور جوہی نے الجبرائی عبارتوں کا ضرب مندرجہ ذیل طریقوں سے کیا

	یاسمین	جوہی
(i)	$2(x-1) = 2x-1$	$2(x-1) = 2x-2$

اوپر $2(x-1)$ کے حل میں کس کا حل صحیح ہے؟ وجہ کے ساتھ بتائیے۔

ہاں آپ نے صحیح سوچا جوہی کا حل صحیح ہے۔

	یاسمین	جوہی
(ii)	$(3x)^2 = 9x^2$	$(3x)^2 = 3x^2$

اوپر دیئے گئے حل میں کس کا حل صحیح ہے۔ اور کیوں؟

جولی نے برائیکٹ کے بھی متغیر اور غیر متغیر کا مربع نہیں کیا ہے۔ اس لئے حل غلط ہے؟

	یاسمین	جوہی
(iii)	$(3x-2)(x+1) = 3x^2 - 1$	$(3x-2)(x+1) = 3x^2 + x - 2$

یاسمین نے عبارت کے ہر ایک رکن سے دوسری عبارت کے ہر ایک رکن میں ضرب نہیں کیا ہے۔ اسلئے یاسمین کا حل غلط ہے۔

(iv)	$(2x+3)^2 = (4x+9)$	$(2x+3)^2 = (4x^2 + 12x + 9)$

....

....

سوچئے

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

کے مطابق کس کا حل صحیح ہے۔

غلطی۔5 سنتوش اور امرکانت نے عبارتوں کی تقسیم مندرجہ ذیل طریقے سے کیا۔

سنتوش

$$\frac{2x+5}{5} = 2x+1$$

امرکانت

$$\frac{2x+5}{5} = \frac{2x}{5}+1$$

آپ جانتے ہیں تقسیم میں $\frac{8}{2} = 4$ جب ہم $\frac{8}{2} = 4$ میں کراس ضرب کرتے ہیں تو $8 = 8$ تب ہمیں برابر کے نشان کے دونوں طرف ایک قیمت حاصل ہوتی ہے۔ اسلئے

$\frac{2x+5}{5} = 2x+1$ میں $2x + 5 = 5(2x + 1)$ کو حل کیجئے

اسی طرح $\frac{2x+5}{5} = \frac{2x}{5}+1$ میں

$2x+5 = 5\left(\frac{2x}{5}+5\right)$ کو حل کیجئے۔

غلطی۔6 رنکو نے x میں x سے ضرب کر کے $2x$ معلوم کیا۔ کیا اسکا حاصل ضرب صحیح ہے؟

تشریح۔ رنکو کا حاصل ضرب غلط ہے یہاں قوت نما کا اصول کام کرے گا اور یکساں متیغروں کے بیچ ضرب ہونے پر انکے قوت نما بدلینگے۔ اسلئے

$$x \times x = x^1 \times x^1 = x^{1+1} = x^2$$

غلطی۔7 رکنوں کے ضرب میں عام طور سے حاصل ضرب کے نشانات سے دھیان ہٹ جاتا ہے۔ جس سے کئی غلطیاں ہو جاتی ہیں۔

تشریح۔ رکنوں کے ضرب میں نشان متعین کرنے کے لئے ذیل کے اصولوں کا استعمال کیجئے۔

(i) (+ رکن) × (+ رکن) = + رکن

(ii) (+ رکن) × (– رکن) = – رکن

(iii) (– رکن) × (+ رکن) = – رکن

(iv) (– رکن) × (– رکن) = + رکن

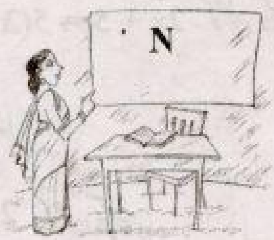
باب-15 گرافوں سے تعارف

15.1 تمہید

ٹیچر نے بلیک بورڈ پر ایک نقطہ لگا دیتی ہے (شکل-1) پھر وہ طالب علموں سے پوچھتی ہے کہ بلیک بورڈ پر درج نقطہ N کو آپ کیسے بتائینگے؟ آپ بھی سوچئے، آپ نقطہ کو کیسے بتائینگے؟ کلاس میں اس کے مختلف جواب ملے۔

نقطہ بلیک بورڈ کے اوپری حصہ میں واقع ہے

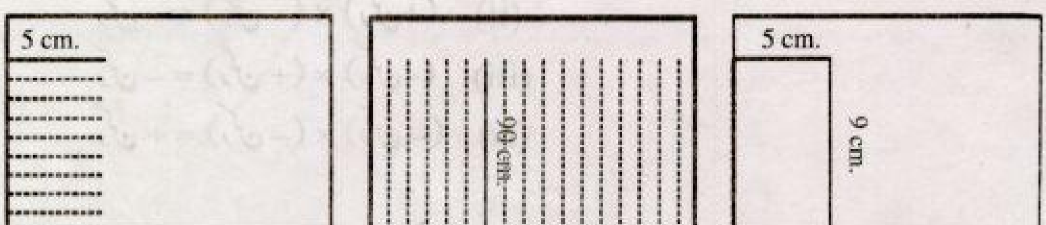
یہ نقطہ بلیک بورڈ کے بائیں کنارے کے نزدیک ہے



یہ نقطہ بلیک بورڈ کے بائیں طرف کے اوپری کونے کے کافی نزدیک ہے

شکل-1

کیا اوپر دیئے گئے بیانات میں سے کسی بھی بیان کی بنیاد پر آپ نقطہ کا ٹھیک ٹھیک مقام پا سکتے ہیں؟ واضح ہے کہ جواب نہیں ہے۔ لیکن اگر آپ یہ کہیں کہ نقطہ بلیک بورڈ کے بائیں طرف سے لگ بھگ 5cm دور ہے تو اس سے آپکو نقطہ کے مقام کا اندازہ تو ہو جاتا ہے۔ پھر بھی ٹھیک ٹھیک مقام کا پتہ نہیں چلتا۔ سوچئے کیوں؟ (شکل (2(a)۔ آپ کہہ سکتے ہیں کہ نقطہ بلیک بورڈ کے نچلے کنارے سے 90 سنٹی میٹر کی دوری پر ہے۔ کیا اب بھی ہم نقطہ کا صحیح مقام بتا سکتے ہیں (شکل (2(b)



(2a) (2b) (2c)

اوپر کے تصویروں سے واضح ہے کہ ہم بلیک بورڈ کے بائیں کنارے اور سب سے نیچے والے کنارے سے دیئے گئے نقطہ کا مقام متعین کر سکتے ہیں۔

سوچئے کیا آپ مذکورہ دو جانکاریاں

1۔ نقطہ بورڈ کے بائیں کنارے سے 5cm دور ہے

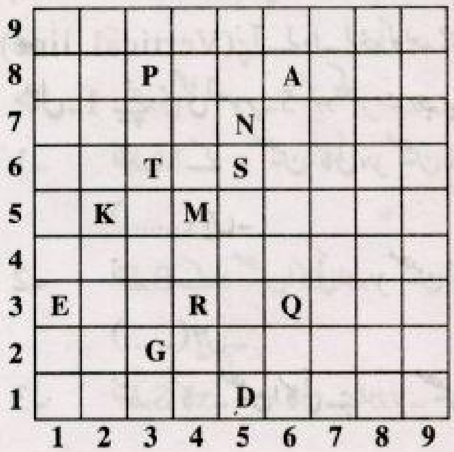
2۔ نقطہ بورڈ کے نچلے کنارے 90cm اوپر ہے

سے بورڈ پر دو الگ الگ نقطے درج کر سکتے ہیں؟

دوسرے الفاظ میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ کسی سطح پر نقطہ کے مقام کا تعین کرنے کے لئے دو آزاد معلومات کا ہونا ضروری ہے۔

15.2 باہم معین اعداد (co-ordinates)

ایک درجہ میں ہر ایک طالب علم کی میز کو ایک مربع کے شکل میں ظاہر کرتے ہوئے (تصویر-3) بنائی گئی ہے جس میں کچھ طالب علموں کے نام حرف سے دکھائے گئے ہیں۔ اب ہم M طالب علم کی میز کو ڈھونڈتے ہیں۔ اسکے لئے ہم کو دو اعداد چاہئے۔ آپ سوچئے کہ اگر آپکو M کا مقام بتانا ہوتو آپ کیسے بتائینگے؟

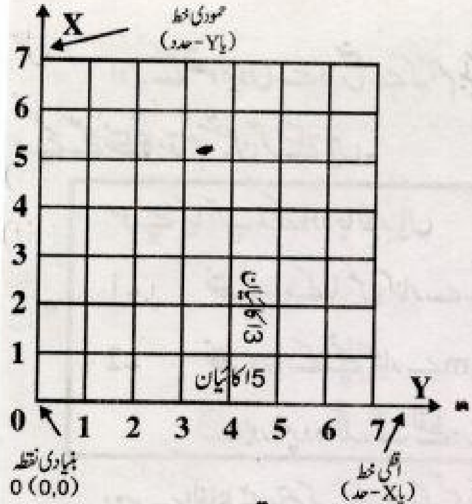


تصویر-3

تصویر 3 میں M چوتھے کالم اور پانچویں قطار میں ہے۔ تو M کے مقام کو (5 ,4) کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ جہاں پہلا عدد کالم عدد کو دکھاتا ہے اور دوسرا عدد قطار عدد کو دکھاتا ہے۔ آپ باقی طالب علموں کے بیٹھنے کے مقام کو لکھئے۔ مثال کے لئے G طالب علم کا مقام۔ G(3,2) لکھئے۔

تصویر 4 پر دھیان دیجئے کہ نقطہ (3 ,5) جسکی دوری بائیں کنارے سے 15 اکائی اور نچلے کنارے سے 3 اکائی ہے۔ گراف کے کاغذ پر کس طرح درج کیا گیا ہے۔

کہا جاتا ہے کہ عظیم فرانسیسی ریاض داں اپنے دکارتے (Rene Descartes) نے بستر پر لیٹے لیٹے ایک چونٹی کو چھت کے کونے کے پاس چلتے ہوئے دیکھا اور اس نے ایک سطح میں ایک نقطہ کے مقام کا تعین کرنے سے متعلق مسئلے کا حل ڈھونڈ نکالا۔ اس طریقہ کو دکارتے کی یاد میں کارتے طریقہ (Cartesian system) بھی کہا جاتا ہے۔



تصویر-4

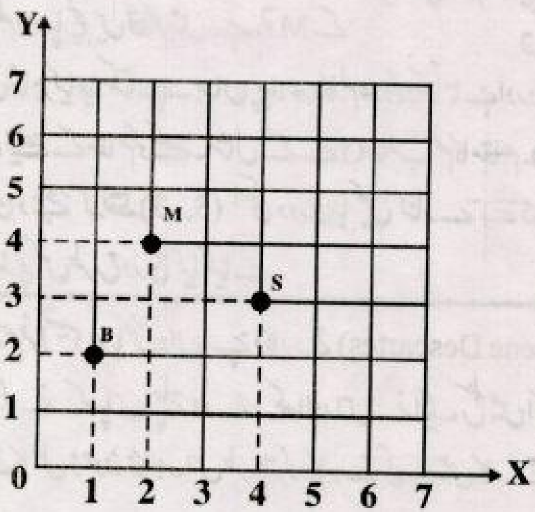
گراف کاغذ پر ہم X ساق (X-axis) اور y-ساق (y-axis) اپنی سہولت کے مطابق دکھاتے ہیں اور جہاں دونوں خطوط ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں اسے بنیادی نقطہ (origin) کہا جاتا ہے اور اسے 0 سے دکھایا جاتا ہے۔ عدد 5 نقطہ کا x معین اکائی۔(x-co-ordinate) اور عدد 3، y معین اکائی (y-co-ordinate) کہلاتا ہے اور (5,3) نقطہ کے ''معین اعداد'' ہیں۔ اسطرح سطح پر کسی نقطے کے مقام کو عددی جوڑے کے ذریعہ دکھایا جاتا ہے۔ آسانی کیلئے افقی خط (Horizontal line) پر آنے والے عدد کو پہلے اور عمودی (Vertical line) پر آنے والے خط کو بعد میں لکھتے ہیں۔

مثال۔1 نیچے دی گئی تصویر۔5 کو دیکھر مندرجہ بیانات کو پورا کیجئے۔

1۔ نقطہ M کے x معین اکائی، y معین بالترتیب............اور............ ہیں اسلئے نقطہ M کے معین اعداد (.......) ہیں۔

2۔ نقطہ B کے x معین اکائی اور y معین اکائی بالترتیب..........اور.......... ہیں اسلئے نقطہ B کے معین اعداد (......) ہیں۔

3۔ نقطہ S کا x۔ معین اکائی ہے اور y۔ معین اکائی......ہے تو S کے معین اعداد (.........) ہیں۔



تصویر-5

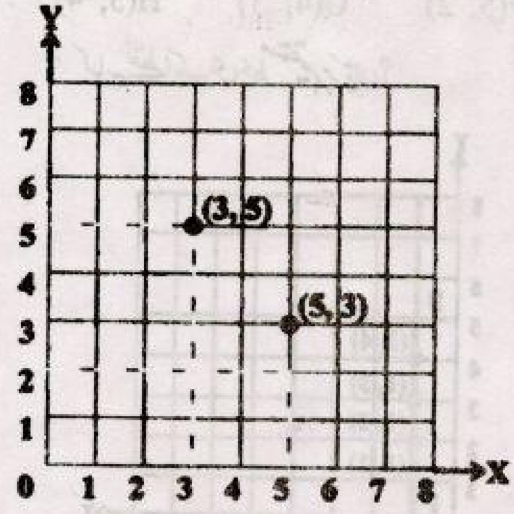
حل:1 کیونکہ y۔ساق سے نقطہ M کی دوری 2 اکائی ہے اسلئے نقطہ M کا x معین اکائی 2 ہوگا۔x۔ساق سے نقطہ M کی دوری 4 اکائی ہے اسلئے نقطہ M کا y۔معین اکائی 4 ہوگا۔اسلئے نقطہ M کا معین عدد (4 ,2) ہے۔

(ii) نقطہ B کے x اور y معین اکائی بالترتیب 4 اور 3 ہیں۔اسلئے B کے معین اعداد (3 ,4) ہیں۔

(iii) نقطہ S کا x معین اکائی 1 ہے اور y۔معین اکائی 2 ہے تو S کے معین اعداد (2 ,1) ہیں۔

مثال۔2 ایک گراف پر نقطہ (5,3) درج کیجئے کیا یہ وہی نقطہ ہے جو (3,5) دکھاتا ہے۔

حل: سب سے پہلے گراف کاغذ پر x ساق اور y ساق دکھاتے ہیں۔اب بنیادی نقطہ (0,0) سے شروع کر کے 5 اکائی دائیں چلکر پھر 3 اکائی اوپر کی طرف چلتے ہیں تو نقطہ (5,3) ملتا ہے۔تصویر 6 سے ظاہر ہے کہ نقطہ (5,3) اور نقطہ (3,5) الگ الگ نقطے ہیں۔



تصویر۔6

مثال۔3 تصویر 7 دیکھکر مندرجہ ذیل نقطہ کے مقام کے لئے مناسب حرف چنیئے۔

(i) (2,1) (ii) (1,2) (iii) (0,4) (iv) (4,0)

اور مندرجہ ذیل لفظوں کے لئے معین اعداد لکھئے۔

(v) A (vi) B (vii) K

حل:۔ (i) (2,1) ہے نقطہ R

(ii) (1,2) ہے نقطہ Q

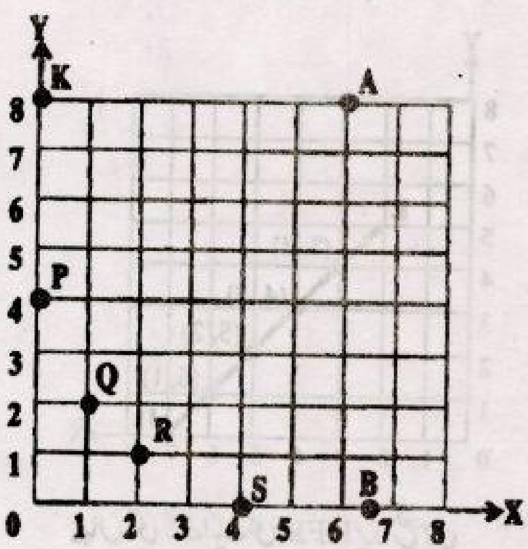
(iii) (0,4) ہے نقطہ P

(iv) (4,0) ہے نقطہ S

(v) نقطہ A معین اعداد (6,8) ہیں

(vi) نقطہ B کے معین اعداد (6.5,0) ہیں

(vii) نقطہ K کے معین اعداد (0,8) ہیں

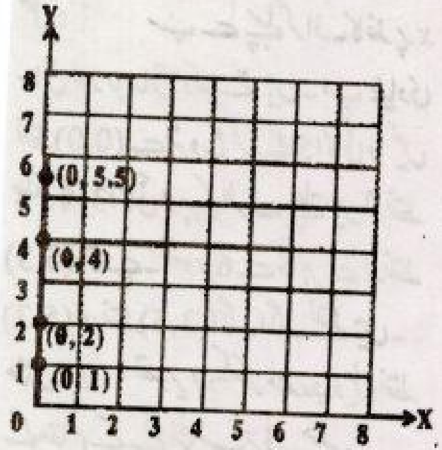


تصویر۔7

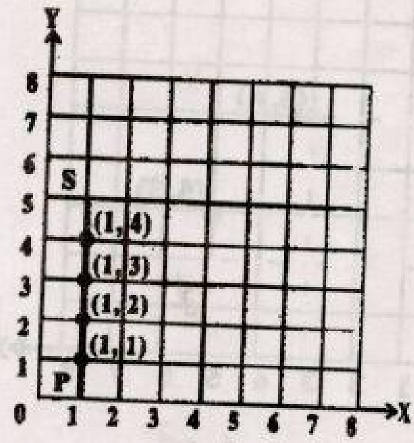
مثال۔4 گراف پیپر پر درج ذیل نقطوں کو دکھائیں۔

(i)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 4)	(0, 5.5)
(ii)	P(1, 1)	Q(1, 2)	R(1, 3)	S(1, 4)
(iii)	A(1, 4)	B(2, 4)	C(3, 4)	D(4, 4)
(iv)	E(6, 1)	F(5, 2)	G(4, 3)	H(3, 4)

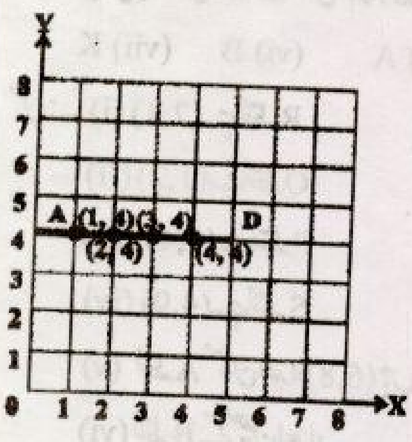
کیا یہ نقطے ایک ہی خط مستقیم پر ہیں؟



یہاں سبھی نقطے ایک ہی خط y ساق پر ہیں

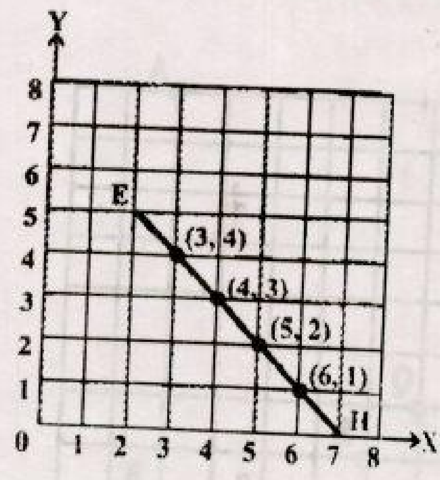


یہاں سبھی نقطے ایک ہی خط PS پر ہیں



یہاں سبھی نقطے ایک ہی خط AD پر ہیں

یہ X۔ساق کے متوازی ہے



یہاں سبھی نقطے ایک ہی خط HF پر واقع ہیں

اوپر کے مثالوں میں درج نقطوں کو ملانے پر حاصل گراف ایک خط مستقیم حاصل ہوتا ہے۔ ایسے گرافوں کو خطی گراف (Linear graph) کہتے ہیں۔

15.3 گراف کے مختلف استعمال

آپنے براہ راست اور بالواسطہ تناسب کے باب میں سیکھا تھا کہ ایک عدد دوسرے عدد کو متاثر کرتا ہے۔ چینی کی زیادہ کھپت چینی پر خرچ کو متاثر کرتی ہے۔ بجلی کا بل استعمال کی گئی بجلی کی مقدار پر منحصر کرتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ بجلی کی مقدار ایک آزاد متحرک (Independent Variable) جبکہ بجلی کا بل ایک منحصر متحرک (dependent variable) ہے۔ ایسے اعداد کے تعلق کو ہم گراف کے ذریعہ بھی نمایاں کر سکتے ہیں۔ آگے ہم ضلع۔ احاطہ گراف، وقت دوری گراف وغیرہ مختلف حالات کو گراف سے دکھائینگے۔

مربع کا ضلع اور احاطہ کے بیچ گراف

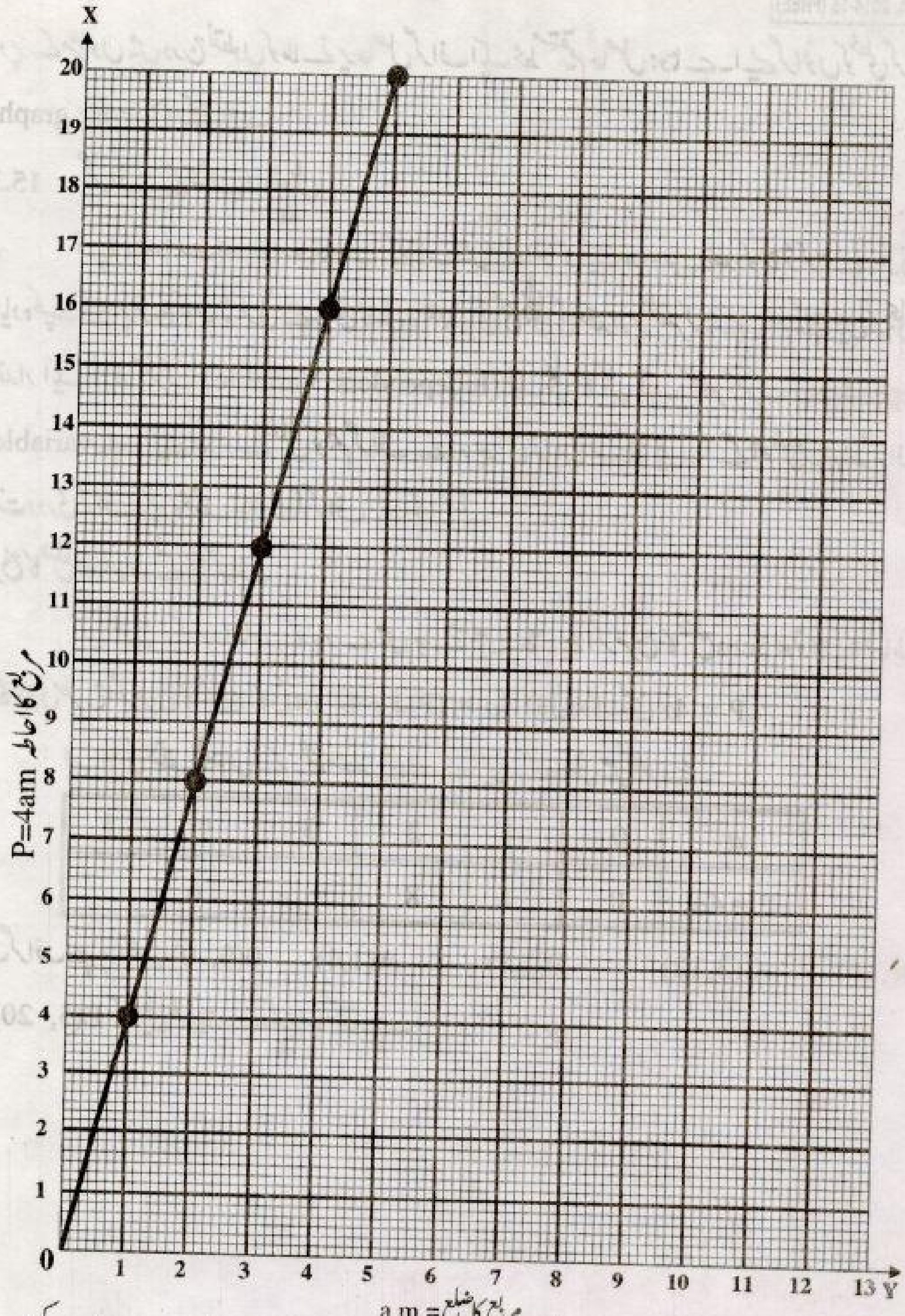
آپ مربع کے اور احاطہ کے بارے میں جانتے ہیں۔ بتایئے اگر مربع کا ضلع 5cm ہو تو اس کا احاطہ کیا ہوگا؟ اسی طرح اگر مربع کا ضلع a اکائی ہو تو اسکا احاطہ $(P) = 4a$ اکائی ہوگا۔ یعنی $P = 4a$۔

اب a کی مختلف قیمتوں کے لئے متعلقہ قیمت سے ذیل کے جدول میں بھریئے۔

a	0	1	2	3	4	5
$P = 4a$	0	4	8	....	16	....

اب گراف پیپر پر نقطوں 0(0, 0 A(1,4) B(2,8) C(3,12) D(,16)

او(E(5, 20 کو ذیل طریقہ سے دکھایا جاسکتا ہے۔



اسی طرح آپ مثلث متساوی الاضلاع کے لئے احاطہ اور رقبہ کے لئے الگ الگ جدول بنا گراف کھینچئے ۔

مثال۔5 مربع کے ضلع اور رقبہ کے بیچ گراف کھینچیں۔اس میں دکھائیں کہ ضلع کی لمبائی 3 اکائی رہنے پر رقبہ کیا ہوگا؟

حل: ہم جانتے ہیں کہ مربع کا رقبہ = ^{2}(ضلع)

یا $A = (x)^2$

اسلئے x کے مختلف قیمتوں سے متعلق A کی قیمت ذیل کی طرح ہوگی۔

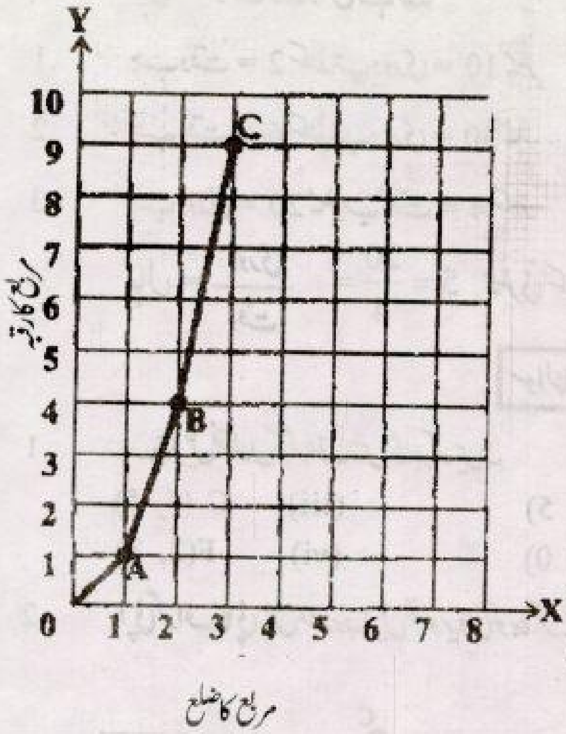
$x = 0 \Rightarrow A = 0^2 = 0$

$x = 1 \Rightarrow A = 1^2 = 1$

$x = 2 \Rightarrow A = 2^2 = 1$

$x = 3 \Rightarrow A = 3^2 = 9$

اسلئے C(3, 9), B(2, 4), A(1, 1), O(0, 0) نقطوں کو گراف پر دکھاتے ہیں۔اسطرح ضلع 3 اکائی رہنے پر رقبہ 9 مربع اکائی ہے۔

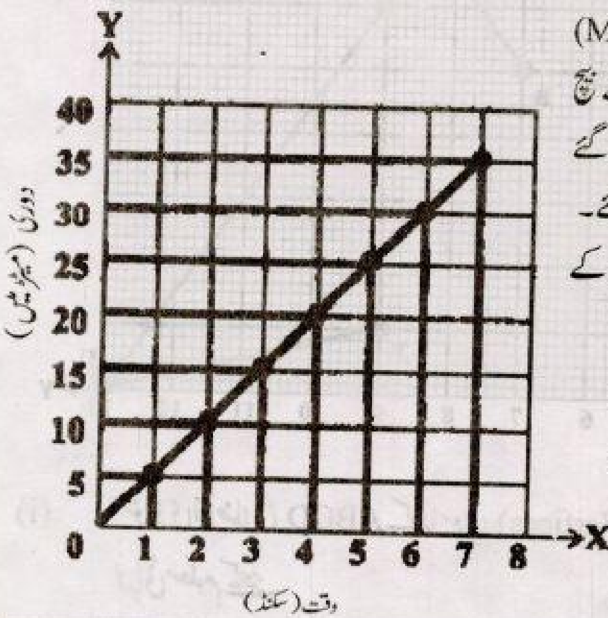


15.4 گراف کو پڑھنا (Readings of Graph)

اب تک ہم نے مربع کے ضلع اور احاطہ، مربع کے ضلع اور رقبہ کے بیچ گراف کھینچا۔اسی طرح اعداد کے مضروب جیسے (3 کا مضروب (Multiple) = 3, 6, 9, 12, ...) وقت اور سود مفرد وغیرہ کے بیچ گراف کھینچ سکتے ہیں۔اب ہم دیکھیں کہ دیئے گئے گراف کو کیسے پڑھ سکتے ہیں؟ ذیل کی مثالوں کو دیکھئے۔

مثال۔6 گراف کو بغور دیکھئے اور ذیل سوالات کے جواب دیجئے۔

1. 2 سکنڈ میں طئے کی گئی دوری کیا ہے؟
2. 6 سکنڈ میں طے کی گئی دوری کیا ہے؟
3. 20 میٹر جانے میں لگا وقت کتنا ہے؟
4. سواری کی چال فی سکنڈ کیا ہے؟



حل: گراف سے واضح ہے کہ۔

1. جب وقت = 2 سکنڈ تب دوری = 10 میٹر

2. جب وقت = 6 سکنڈ تب دوری = 30 میٹر

3. جب دوری = 20 میٹر تب وقت = 4 سکنڈ

4. چال = $\frac{\text{دوری}}{\text{وقت}}$ = $\frac{20}{4}$ = 5 میٹر فی سکنڈ

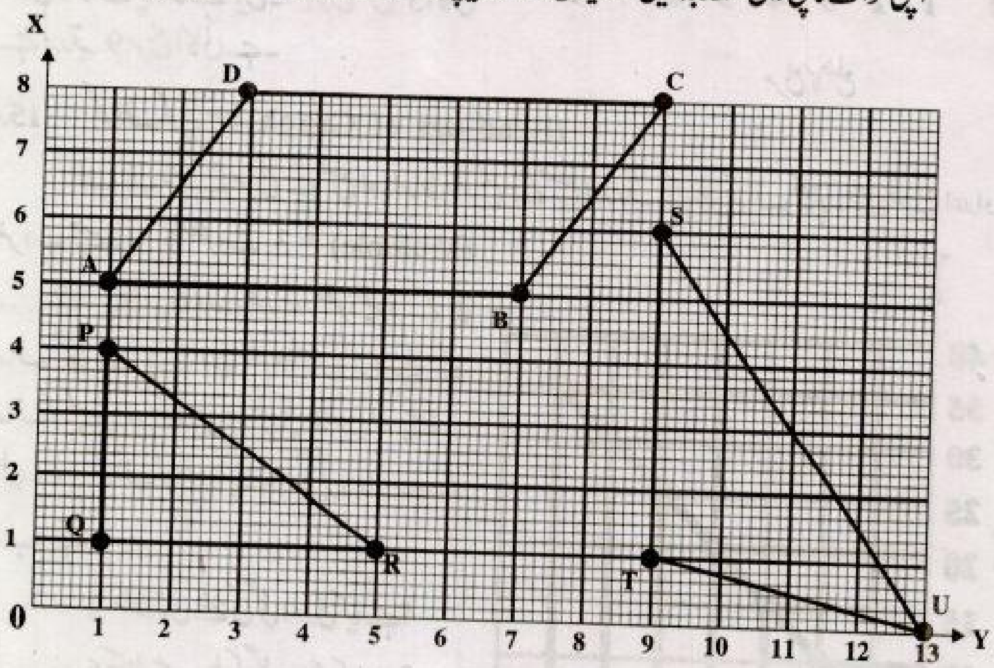
سوالنامہ

1. درج ذیل نقطوں کو گراف میں ظاہر کریں۔

(i) A(5, 3) (ii) B(3, 5) (iii) C (4, 5)

(iv) D(0, 5) (v) E(5, 0) (vi) F(2, 3)

2. اپنی گراف کاپی میں مندرجہ ذیل تصویروں کو بنا کر نیچے دیے گئے سوالوں کے جواب دیجئے۔



(i) متوازی الاضلاع ABCD کے راسوں (Vertices) کے معین اعداد لکھیے اور ضلع AB اور CD کی لمبائی معلوم کیجئے۔

(ii) ΔPQR کے راسوں کے معین اعداد معلوم کیجئے اور ضلع PQ اور QR کی لمبائی معلوم کیجئے۔

(iii) دائرہ کے مرکز M کے معین اعداد معلوم کیجئے اور اس کا قطر (Diameter) معلوم کیجئے۔

(iv) ΔSTU کے راسوں کے معین اعداد معلوم کیجئے۔

3. مندرجہ ذیل جدول کے مطابق وقت اور سود مفرد کے بیچ گراف کھینچئے۔

وقت	1 سال	2 سال	3 سال	4 سال
سود مفرد	60 روپیہ	120 روپیہ	180 روپیہ	240 روپیہ

4. ایک ریل گاڑی 80 km فی گھنٹہ کی مستقل چال سے چل رہی ہے۔ مختلف اوقات میں طئے کی گئی متعلقہ دوری کے بیچ گراف کھینچئے۔

5. صحیح یا غلط لکھئے۔

(i) کسی نقطہ کے مقام کو عددی جوڑے کے ذریعہ دکھایا جاتا ہے۔

(ii) عددی جوڑے کو نقطہ کا معین اعداد کہتے ہیں۔

(iii) x ساق پر y کا عدد معین صفر اور y۔ ساق پر x کا معین عدد صفر ہوتا ہے۔

(iv) ابتدائی نقطہ کے معین اعداد (0,0) ہوتے ہیں۔

ہم نے سیکھا

1. کسی نقطہ کے مقام کو عددی جوڑے کے ذریعہ دکھایا جاتا ہے۔

2. جہاں x اور y ساق (axes) ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں اُسے ابتدائی نقطہ (origin) کہا جاتا ہے۔

3. آسانی کے لئے افقی خط پر آنے والے عدد کو پہلے اور عمودی خط پر آنے والے عدد کو بعد میں لکھتے ہیں۔

4. x۔ ساق پر y کا معین عدد اور y۔ ساق پر x کا معین عدد صفر ہوتا ہے۔

5. جب معین اعداد کے نقطوں کو ملانے پر خط مستقیم حاصل ہو تو یہ خطی گراف کہلاتا ہے۔ اسمیں دونوں متحرکوں (variables) میں بلا واسطہ یا سیدھے تناسب کا تعلق ہوتا ہے۔

*

باب-16 اعداد کے ساتھ کھیل

عددی خاندان کے تحت قدرتی اعداد، مکمل اعداد، اعداد صحیح اور قابل پیائش اعداد کے بارے میں آپ جانکاری حاصل کر چکے ہیں۔ آپ اعدادوں کے پھیلی ہوئی شکل کے بارے میں جانتے ہیں۔ آیئے اس سے جڑے دوسرے بنیادی تصورات کو سمجھیں۔

عام شکل میں اعداد:

ہم ایک عدد 75 لیتے ہیں اور اُسے ذیل شکل میں لکھتے ہیں:

75=10x7+5

اسی طرح عدد 32 کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے:

32=10x3+2

یعنی a اور b سے بنے کسی دو ہندسوں کے عدد ab کا مطلب ہے:

ab=10xa+b=10a+b

یہاں ab اور ba اعداد کو دکھاتے ہیں نہ کہ عام ضرب کو۔

عام ضرب میں 6x3=3x6

تب axb=bxa

یا ab = ba

لیکن اعداد میں ab میں a دہائی کے مقام پر ہے اسلئے

ab=ax10+b اور ba=10xb+a

اس لئے ax10+b / = bx10+a

اب ہم تین ہندسوں والا عدد 452 لیتے ہیں۔ اس عدد کو اس شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

452 = 4x100+5x10+2 = 400+50+2

378 = 3x100+7x10+8 = 300+70+2

یعنی b،a اور c سے بنے تین ہندسوں کے عدد کو اس شکل میں لکھا جاسکتا ہے:

abc = 100xa + 10xb+c

= 100a + 10b+c

bca = 100xb +10xc+a

= 100b+10c+a

cab = 100xc+10xa+b

= 100c+10a+b

کوشش کیجیے:

1۔ نیچے لکھے اعداد کو پھیلی ہوئی شکل میں لکھیں:

(a) 75 (b) 89 (c) 135

(d) 524 (e) acb

2۔ درج ذیل کو مختصر شکل میں لکھیں:

(a) 10x6+5 (b) 100x6+10x8+3 (c) 100c+10a+b

یہاں b,a اور c کی قیمتیں دی ہوئی ہیں اُس کے مطابق عدد معلوم کیجیے:

.1 100c+10a+b جب a=2 'b=9 اور c=2 ہو

.2 100c+10a+b جب a=0 'b=1 اور c=4 ہو

.3 100a+b جب a=2 'b=4

16.2 ہندسوں کا پلٹنا دو ہندسوں کا پلٹنا

رِچا اور شرون کے بیچ بات چیت

رِچا		شرون
دو ہندسوں کا کوئی عدد لو	⟷	ٹھیک ہے، دو ہندسوں کا عدد لے لیا، 78
جو عدد لیا اُسے پلٹ دو	⟷	ٹھیک، میں نے پلٹ دیا، 87 حاصل ہوا
پہلے والے عدد اور نئے عدد کو	⟷	جوڑ لیا، 78+87=165، حاصل ہوا۔
اب حاصل جمع میں 11 سے تقسیم	⟷	تقسیم دے دیا 165÷11=15، حاصل ہوا۔
باقی صفر حاصل ہوا	⟷	لیکن تمہیں یہ کیسے معلوم ہوا۔

اس میں ایسا ہوا کہ شرون دو ہندسوں والا عدد 78 لیا۔ ہندسوں کو پلٹنے پر اُسے 87 ملا۔ دونوں کو جوڑنے پر 165=78+87 حاصل ہوا۔ آخر میں 11 سے تقسیم دینے پر 15=11÷165 حاصل ہوا اور باقی صفر حاصل ہوا۔

کوشش کیجئے:

جانچ کر کے پتہ کیجئے کہ شرون نے درج ذیل اعداد چُنا ہوتا تو کیا نتیجہ حاصل ہوتا؟

(1) 28 (2) 42 (3) 75 (4) 18

آیئے رِچا کی چالاکی (Trick) کو واضح کریں۔ مانکہ شرون ab چُنتا ہے جو دو ہندسوں کا عدد ہے۔ اس کی وسیع شکل 10a+b ہے۔ ہندسوں کو پلٹنے پر ba حاصل کرتا ہے یعنی 10b+a ۔ دونوں اعداد کو جوڑنے پر وہ حاصل کرتا ہے۔

$$(100+b)+(10b+a) = 10a+b+10b+c$$
$$= 11a+11b$$
$$= 11(a+b)$$

یعنی حاصل جمع ہمیشہ 11 کا مقسوم (Multile) ہوتا ہے۔ دھیان دیں اگر ہم حاصل جمع کو 11 سے تقسیم دیں تو حاصل تقسیم (a+b) حاصل ہوتا ہے۔ یہاں حاصل تقسیم چُنے گئے عدد ab کے ہندسوں کے جوڑ کے برابر ہے۔ اس طرح دو ہندسوں والے دوسرے اعداد کو لے کر حقیقت کی جانچ کر سکتے ہو۔

رچا اور شرون کھیل کو آگے بڑھاتے ہیں:

رچا: شرون دو ہندسوں والا کوئی عدد لو لیکن مجھے نہیں بتانا۔

شرون: ٹھیک ہے۔

رچا: اب ہندسوں کو پلٹ کر بڑے عدد میں سے چھوٹے عدد کو گھٹاؤ۔

شرون: گھٹا لیا اب کیا کریں۔

رچا: اب جو گھٹا کر عدد بچا ہے اُس میں 9 سے تقسیم کر دو شاید باقی صفر حاصل ہوگا۔

شرون نے 62 سوچا تھا ہندسوں کو پلٹنے پر 26 حاصل ہوا۔ بڑے عدد میں سے گھٹانے پر 62-26=36 حاصل ہوا اور 9÷36 سے حاصل تقسیم 4 اور باقی صفر حاصل ہوا۔

کوشش کیجیے:

شرون اگر ذیل عدد سوچا ہوتا تو کیا نتیجہ حاصل ہوتا؟

(1) 27 (2) 23 (3) 52 (4) 36

ایسا کیسے ہو جاتا ہے شرون سوچنے لگا۔

مان لیا کہ وہ دو ہندسوں والا عدد ab=10a+b چُنتا ہے۔ ہندسوں کو پلٹنے پر ba=10b+a حاصل ہوتا ہے۔ رچا اُسے بڑے عدد میں سے چھوٹا عدد گھٹانے کو کہتی ہے۔

اگر دہائی کا ہندسہ اکائی کے ہندسہ سے بڑا ہوتا وہ اس طرح گھٹاتا ہے۔ یعنی (a>b) تو

$$(10a+b)-(10b+a)$$
$$=10a+b-10b-a$$
$$=9a-9b$$
$$= 9(a-b)$$

اگر اکائی کا ہندسہ دہائی کے ہندسہ سے بڑا ہے یعنی $(b>a)$ تب $9(b-a)$

جب $a=b$ تو وہ 0 (صفر) حاصل ہوتا ہے۔

ہر حالت میں نتیجہ 9 سے منقسم ہوگا۔ اور باقی صفر ہوگا۔ ہم اگر حاصل عدد کو 9 سے تقسیم دیتے ہیں تو ہمیں $a>b$ یا $a<b$ کے مطابق $(a-b)$ یا $(b-a)$ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح کوئی بھی دوسرا دو ہندسوں والا عدد لے کر مندرجہ بالا حقائق کے جانچ کر سکتے ہیں۔

16.3 ہندسوں کو پلٹنا۔ تین ہندسوں کا عدد:

شرون: رِچا ایک تین ہندسوں والا کوئی عدد سوچو۔

رِچا: ٹھیک ہے سوچ لیا۔ (رِچا نے 345 چُنا)

شرون: اب اِن ہندسوں کو اُلٹی ترتیب میں لے کر ایک نیا عدد بناؤ اور بڑے عدد میں سے چھوٹا عدد گھٹاؤ۔

رِچا: ٹھیک ہے گھٹا لیا۔ اب کیا کریں۔ (543-345=198)

شرون: اب حاصل عدد میں 99 سے تقسیم دو۔ طئے ہے کہ باقی 0 (صفر) ہوگا۔

کوشش کیجئے:

جانچ کریں کہ اگر رِچا مندرجہ ذیل اعداد چُنی ہوتی تو نتیجہ کیا حاصل ہوتا؟

(i) 231 (ii) 694 (iii) 636 (iv) 801

آؤ دیکھیں کہ شرون کی یہ چالاکی کیسے کام کرتی ہے۔

مان لیجئے کہ رِچا نے تین ہندسوں کا عدد چُنا abc

$$abc=100a+10b+c$$

ہندسوں کو پلٹنے پر وہ عدد cba حاصل کرتی ہے۔

$$cba=100c+10b+a$$

اگر $a>c$ ہے تو اعداد کا فرق ہوگا۔

$$= (100a+10b+c)-(100c+10b+a)$$
$$= 100a+\cancel{10b}+c-100c-\cancel{10b}-a$$
$$= 99a-99c$$
$$= 99(a-c)$$

اگر $c>a$ تو اعداد کا فرق ہوگا $99(c-a)$

اگر $a=c$ تو فرق 0 (صفر) ہے۔ آپ دوسرے تین ہندسوں کے اعداد لیکر اس حقیقت کی جانچ کر سکتے ہیں۔

کسی بھی تین ہندسوں سے تین ہندسوں والے اعداد بنانا۔

رچا، تین ہندسوں والا کوئی ایک عدد من میں سوچو۔

سوچ لیا — 456

اب عدد کے انھیں ہندسوں کا استعمال کر کے دوسرا دو عدد تین ہندسوں والا بناؤ۔

بنالیا۔(564اور645)

اب اِن اعداد کو جوڑو اور حاصل عدد کو 37 سے تقسیم دو۔ طے ہے کہ باقی صفر ہوگا۔

تم ٹھیک کہتے ہو سچ مچ میں باقی صفر آیا۔

شرون کے کہنے کے مطابق رچا نے کیا۔

حاصل عدد 1665 کو 37 سے تقسیم دیا۔

456
645
+ 564
1665

1665÷37=45

باقی صفر(0) حاصل ہوا۔

تین ہندسوں 4,5 اور 6 کا استعمال کر کے تین ہندسوں والے سبھی ممکن اعداد بنائیں اور ان کا حاصل جمع معلوم کر کے جانچ کیجئے کہ کیا یہ جوڑ 37 سے منقسم ہے۔ کیا یہ حقیقت عدد abc کے تینوں ہندسوں a, b اور c سے بنے سبھی اعداد کے جوڑ کے لئے سچ ہے۔

کوشش کیجئے:

شرون نے اگر درج ذیل اعداد چُنے ہوتے تو نتیجہ کیا حاصل ہوتا؟

(1) 418 (2) 234 (3) 137 (4) 872

کیا یہ چالاکی ہمیشہ کام کرتی ہے؟

abc= 100a+10b+c

cab= 100c+10a+b

bca= 100b+10c+a

abc+cab+bca= 111(a+b+c)

= 37x3(a+b+c)

جو 37 سے منقسم ہے۔

16.4 ہندسوں کے لئے حروف:

کچھ ایسی پہیلیاں ہیں ہندسوں کے مقام پر حروف ہوتے ہیں۔ اس پہیلی کے تحت مسئلہ یہ ہوتا ہے کہ کون سا حرف کس ہندسہ کو دکھاتا ہے۔ اس لئے یہ ایک طرح سے کوڈ (code) کو حل کرنے جیسا مسئلہ ہے۔ اِن پہیلیوں کے تحت جوڑ اور ضرب مسائل تک ہی ہم محدود رہیں گے۔ ایسی پہیلیوں کو حل کرتے وقت مندرجہ ذیل دو اصولوں کا استعمال کریں گے۔

۱. پہیلی میں ہر ایک حرف سے صرف ایک ہی ہندسہ ظاہر ہو اور ایک ہندسہ سے صرف ایک ہی حرف ظاہر کیا جائے۔
۲. کسی عدد کا پہلا ہندسہ صفر نہیں ہوسکتا۔
۳. ایک پہیلی کا ایک ہی جواب ہو۔

مندرجہ ذیل جوڑ میں P معلوم کیجئے۔

$$\begin{array}{r} 41p \\ +1p3 \\ \hline 601 \end{array}$$

یہاں صرف حرف p ہے جس کی ہمیں قیمت معلوم کرنی ہے۔ اکائی کے کالم کا مطالعہ کیجئے P+3 سے ہمیں 1 حاصل ہوتا ہے۔ یعنی اِکائی کا ہندسہ 1 ہو۔ ایسا ہونے کے لئے p کی قیمت طے ہے کہ 8 ہونا چاہئے۔ p کی قیمت رکھ کر حل کرنے پر:

$$\begin{array}{r} 418 \\ +183 \\ \hline 601 \end{array}$$

یعنی P=8

مندرجہ ذیل جوڑ میں P اور Q کی قیمت معلوم کریں۔

$$\begin{array}{r} p \\ +p \\ +p \\ \hline QP \end{array}$$

اس دو حرف P اور Q کی قیمت معلوم کرنا ہے۔ دھیان دینے کی ضرورت ہے کہ تین P کا حاصل جمع ایسا عدد ہے جس کا اِکائی کا ہندسہ P ہے۔ اس لئے دو P کا حاصل جمع ایسا عدد ہونا چاہئے جس کا اکائی کا ہندسہ 0 (صفر) ہو۔ یہ تبھی ہوگا جب P=0 ہو یا P=5 ہو۔

اگر P = 0 ہو تو جوڑ 0 = 0 + 0 + 0 ہوگا جس میں Q = 0 ہوجائے گا۔ ہم اسے نہیں مانیں گے۔ کیونکہ P=Q ہوجائے گا اور QP کے دہائی کا ہندسہ بھی 0 (صفر) ہوجائے گا۔ اس لئے ہم اسے چھوڑ دیں گے۔ اس لئے P=5 ہے۔

پہیلی کا حل:

$$\begin{array}{r} 5 \\ +5 \\ +5 \\ \hline 15 \end{array}$$

یعنی P=5 اور Q=1 ہوگا۔

A اور B کو معلوم کریں۔

$$\begin{array}{r} B\ 3 \\ \times\ B\ A \\ \hline 57\ A \end{array}$$

مندرجہ بالا پہیلی میں بھی دو حرف A اور B ہیں جن کی قیمت معلوم کرنی ہے۔

57A کا اکائی ہندسہ A ہے۔اس لئے A=0 یا A=5 ہے۔

اب B کو دیکھتے ہیں اگر B=1 ہو تو BAxB3 کی قیمت زیادہ سے زیادہ 15x13=195 ہوگی۔لیکن یہاں حاصل ضرب 57A ہے جو 500 سے زیادہ ہے۔اس لئے B=1 نہیں ہوسکتا ہے۔

اگر B=3 ہو تو BAxB3 کا حاصل ضرب کم سے کم 30x33 ہوگا۔یعنی یہ 900 سے زیادہ ہوگا لیکن 57A کی قیمت 600 سے کم ہے۔اس لئے B=3 نہیں ہوگا۔مندرجہ بالا قیمتوں سے پتہ چلتا ہے کہ B کی قیمت صرف 2 ہوسکتی ہے۔

$$\boxed{\begin{array}{r} B\ 3 \\ \times\ B\ 5 \end{array}} \qquad \begin{array}{r} 23 \\ 25 \\ \hline 575 \end{array}$$

اس لئے A=3 اور B=2 ہے۔

سوالنامہ۔16.1

(1)

(i)
$$\begin{array}{r} 6..... \\ +\ ...28 \\ \hline ......2 \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{r} 7....... \\ +\ 5\ \ 4 \\ \hline .....0 \end{array}$$

(iii)
$$\begin{array}{r} 3....8 \\ +\ 2\,6\,... \\ \hline ......3 \end{array}$$

(iv)
$$\begin{array}{r} 8 \\ \times\ .... \\ \hline 0 \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{r} 9 \\ \times\ ... \\ \hline ...5 \end{array}$$

(2) A,B,C کی قیمت معلوم کریں۔

(i)	(ii)	(iii)
A B	C 2	4 B A
x 6	+ 2 B	+ 2 B 1
BBB	B 0	

کھیلنے کی کوشش کریں:

مندرجہ ذیل اعداد کو 100a+10b+c کی شکل میں ظاہر کیجئے۔

1. (i) 876 (ii) 556 (iii) 89 (iv) 270 (v) 813

2. کوئی بھی تین ہندسہ لیں۔ ان تین ہندسوں سے جتنے بھی اعداد بن سکتے ہیں۔ بنائیں پھر سبھی کو جوڑ کر (i) حاصل جمع معلوم کریں۔(ii) بڑھتی اور گھٹتی ہوئی ترتیب میں لکھیں۔

نو گھر والے جادو کا گھر بھرنے کے لئے تجربہ:

پہلا مرحلہ

H	E	B	C	I	G	F	A	D

دوسرا مرحلہ

A	B	C
H	I	D
G	F	E

تیسرا مرحلہ

پہلے مرحلہ کے خانہ میں H کے نیچے کوئی ایک عدد لکھیں پھر اُس سے شروع کرتے ہوئے لگاتار D تک لکھیں۔ جیسے پہلے مرحلہ کے خانے میں H کے نیچے 3 لکھ کر D تک 11 لکھیں گے۔

اس طرح H=3,E=4,B=5,C=6,I=7,G=8,F=9,A=10,D=11 ہوا۔

اب H,E,B,C,I,G,A,D کی اس قیمت کو مرحلہ—2 کے خانوں کے مطابق مرحلہ—3 میں بھریں۔ تب A کی جگہ 10، B کی جگہ 5 وغیرہ وغیرہ۔ نو گھروں کو بھریں تب چاروں طرف کا حاصل جمع برابر ملے گا۔

مثال:

H	E	B	C	I	G	F	A	D
3	4	5	6	7	8	9	10	11

A	B	C
H	I	D
G	F	E

10	5	6	21
3	7	11	21
8	9	4	21
21 21	21	21	21 21

اب آپ خود دوسرے ہندسے لیکر حقیقت کی جانچ کریں۔

سلمیٰ اور مہیش آپس میں ہندسوں کا کھیل کھیلنا چاہتے ہیں۔

سلمیٰ: مہیش تم چار ہندسوں کا کوئی عدد لو۔

مہیش: لے لیا۔3128

سلمیٰ: میں اور کچھ ہندسے لینے کو کہوں گی اور جو حاصل جمع آئے گا وہ میں پہلے ہی تمہیں بتا دینا چاہتی ہوں۔

مہیش: ٹھیک ہے بتاؤ۔

سلمیٰ: مہیش 13127 لکھو۔

سلمیٰ: مہیش رنجن سے چار ہندسوں والا ایک عدد مانگ لو۔

مہیش: مانگ لیا۔2125

سلمیٰ: اب میں تمہیں چار ہندسوں والا عدد دیتی ہوں۔7874

مہیش: اب تم تینوں کو جوڑو۔

$$\begin{array}{r} 3128 \\ 2125 \\ +\ 7874 \\ \hline 13127 \end{array}$$

سلمیٰ کی چالاکی کیا تھی؟ سلمیٰ کا دیا ہوا عدد اور رنجن سے لئے گئے عدد کے اکائی + دہائی + سینکڑہ + ہزار کے ہندسوں کا حاصل جمع 9 ہونا چاہئے۔ ہندسوں کا حاصل جمع 9 ہوتا ہے۔

سلمیٰ کے ذریعہ حاصل جمع پہلے کیسے بتا دیا گیا؟ مہیش کے ذریعہ لیا گیا عدد 3128 ہے سلمیٰ نے اکائی ہندسہ 8 میں سے 1 گھٹا دیا اور سبھی ہندسوں کو جیوں کا تیوں لکھ دیا۔ ساتھ ہی 1 جو گھٹایا تھا اُسے بائیں طرف آخر میں لکھا۔ یعنی دس ہزار کے مقام پر 1 اس طرح نیا عدد 13127 بنا جو حاصل جمع ہونے والا تھا۔ اگر اکائی، دہائی، سینکڑہ کا ہندسہ صفر ہو تو بغل سے اُدھار لے کر گھٹالیں اور بغل والا ہندسہ جو باقی بچتا ہے اُسے لکھ دیں۔

اس طرح اپنے ساتھیوں کے ساتھ ملکر حاصل جمع کا کھیل کھیلو۔

سوالنامہ

1. قدرتی اعداد کا سب سے چھوٹے عدد اور مکمل اعداد کے سب سے چھوٹے عدد کا فرق لکھیں۔

2. 14- اور 13- دونوں میں بڑا عدد کون ہے؟

3. 45=45-45 کیسے ہوگا؟

4. $(9)^2=90-9=81$

$(99)^2=9900-99=9801$

$(9999)^2=$..............................

$(99999)^2=$..............................

5. $\frac{1}{10}$ کا آدھا کتنا ہوگا؟

—