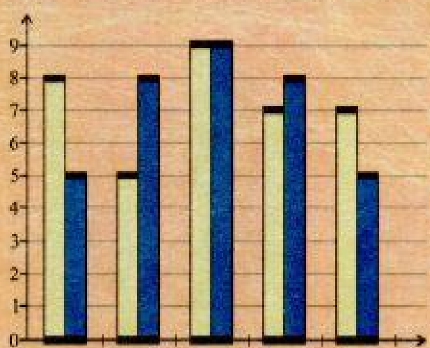
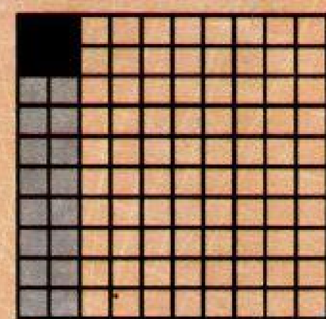
مفت تقسیم

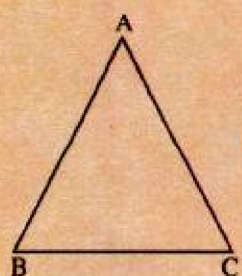
رجہ-7

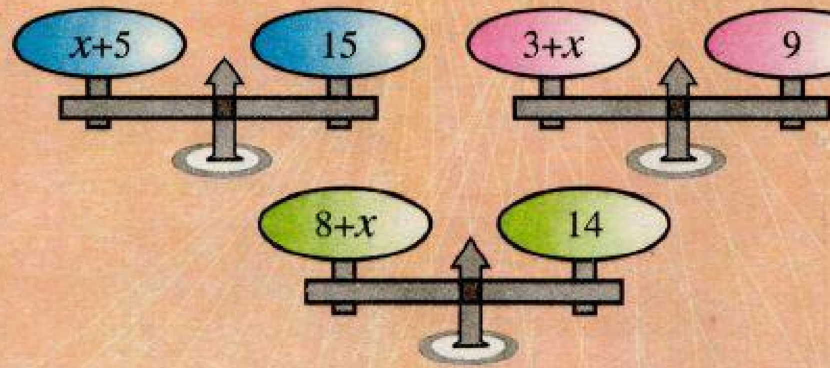
سب کے لیے تعلیمی مہم پروگرام
سب پڑھیں۔ سب بڑھیں

حساب









سب کے لیے تعلیمی مہم پروگرام کے تحت اسکولی بچوں کے لیے درسی کتابیں برائے **مفت تقسیم** شائع کی گئیں۔ اس کتاب کی خرید وفروخت قانوناً جرم ہے۔

بہار معیاری تعلیمی مہم (بہار ایجوکیشن پروجیکٹ کونسل) کی
جانب سے چلائی جارہی بیداری مہم
"سمجھیں — سیکھیں"
معیاری تعلیمی مہم کے بیس رہنما اصول

1. اسکولوں کا وقت سے کھلنا اور بند ہونا۔
2. وقت پر تعلیمی سیشن کا انعقاد۔
3. ہر ایک بچہ اور استاد کی اسکول کے وقت میں، اسکول میں موجودگی۔
4. ہر ایک بچہ اور ہر ایک استاد سیکھنے۔ سکھانے کے عمل میں غرق ہو۔
5. اساتذہ کو بچوں کے تعلیمی معیار کی واقفیت اور اس کے تئیں مستعدی۔
6. مسلسل اور گہرائی کے ساتھ صلاحیتوں کی جانچ۔
7. درجہ۔ 1 کے لئے خاص طور پر کل وقتی اساتذہ۔
8. اسکول کے سبھی درجات میں بلیک بورڈ کا مکمل طور سے استعمال۔
9. سبھی درجات میں روزانہ کے تعلیمی ٹائم ٹیبل کی دستیابی اور اس کا استعمال۔
10. آخری گھنٹی میں کھیل کود، آرٹ اور ثقافتی سرگرمیاں۔
11. اسکول میں دستیاب کرائی گئیں کہانی کی کتابیں اور کھیل کود کے سامانوں کا استعمال۔
12. Menu کے مطابق دوپہر کے کھانے (Mid-day meal) کی پابندی کے ساتھ روزانہ تقسیم۔
13. فعال بچوں کا پارلیامنٹ اور مینا منچ۔
14. صاف ستھرے بچے اور صاف ستھرا اسکول۔
15. دستیاب پینے کے پانی کا انتظام اور بیت الخلاء کا استعمال۔
16. اسکول کے احاطے میں باغبانی۔
17. اسکولوں میں دستیاب کرائے گئے گرانٹ کا استعمال۔
18. سبھی بچوں کے پاس اپنے اپنے درجہ کی درسی کتابوں کی دستیابی۔
19. اسکول کی انتظامیہ کمیٹی کی پابندی سے ہونے والی میٹنگ میں تعلیم کے معیار (Quality) پر چرچا۔
20. اسکول میں ہر ایک درجہ کے اساتذہ اور گارجین کے ساتھ تبادلۂ خیال۔

حساب

برائے درجہ۔7

تیار کردہ : صوبائی کونسل برائے تعلیمی تحقیق وتربیت (SCERT)، بہار، پٹنہ

شائع کردہ: بہاراسٹیٹ ٹکسٹ بک پبلشنگ کارپوریشن لمیٹڈ، پٹنہ

ڈائرکٹر(پرائمری ایجوکیشن)محکمہ تعلیم، حکومت بہار سے منظور

صوبائی کونسل برائے تعلیمی تحقیق وتربیت (SCERT)، بہار پٹنہ کے تعاون سے پورے صوبہ بہار کے لئے۔

سب کے لئے تعلیمی مہم پروگرام (S.S.A) کے تحت

درسی کتابیں برائے

مفت تقسیم

شائع کی گئیں۔اس کتاب کی خرید وفروخت قانوناً جرم ہے۔

S.S.A 2014-15 - 45,338

شائع کردہ

بہار اسٹیٹ ٹکسٹ بک پبلشنگ کارپوریشن، لمیٹڈ

پاٹھیہ پستک بھون، بدھ مارگ، پٹنہ۔800001

مطبوعہ: جیا پرنٹنگ ورکس، پٹنہ 8 (ٹکسٹ کیلئے H.P.C. کا G.S.M 70 سفید واٹر مارک Cream Wove کاغذ استعمال میں لایا گیا اور سرورق کے لئے HPC کا G.S.M 130 واٹر مارک H.P.C. کا سفید کاغذ استعمال میں لایا گیا۔) Size: 24x18cm

پیش لفظ

محکمہ تعلیم، حکومت بہار کے فیصلے کے مطابق، اپریل 2009ء سے پہلے مرحلہ میں ریاست کے درجہ IX کے طلباء وطالبات کے لئے نئے نصاب کو نافذ کیا گیا۔ اسی کے تحت تعلیمی سال 11-2010 کے لئے درجہ I، VI،III اور X کی تمام لسانی اور غیر لسانی درسی کتابوں کا نصاب نافذ کیا گیا۔

اس نئے نصاب کے تحت قومی کونسل برائے تعلیمی تحقیق وتربیت (NCERT)، نئی دہلی کے ذریعہ تیار کردہ درجہ X کے حساب (ریاضی) اور سائنس نیز صوبائی کونسل برائے تعلیمی تحقیق وتربیت (SCERT)، بہار، پٹنہ کے ذریعہ تیار کردہ درجہ I، III، VI اور X کی تمام درسی کتابیں بہار اسٹیٹ ٹکسٹ بک پبلشنگ کارپوریشن لمیٹڈ کی جانب سے سرورق کی ڈیزائننگ کر کے شائع کی گئیں۔ اس سلسلے کی کڑی کو آگے بڑھاتے ہوئے تعلیمی سال 2011-2012 کے لئے درجہ II، IV اور VII کی نئی درسی کتابیں صوبے کے طلباء وطالبات کے لئے فراہم کی گئیں اور تعلیمی سال 13-2012 کے لئے درجہ V اور VIII کی نئی کتابیں دستیاب کرائی گئیں۔ ساتھ ہی ساتھ درجہ II، IV اور VII کی کتابوں کا نیا ترمیم واضافہ شدہ ایڈیشن بھی اسی سال ایس سی ای آر ٹی، بہار، پٹنہ کے تعاون سے شائع کیا گیا!

ریاست بہار میں معیاری اسکولی تعلیم کے لئے معزز وزیر اعلیٰ، بہار جناب نتیش کمار، وزیر تعلیم جناب پی کے شاہی اور محکمہ تعلیم کے پرنسپل سکریٹری، جناب امرجیت سنہا کی رہنمائی کے تئیں ہم تہہ دل سے شکر گزار ہیں۔

این سی ای آر ٹی، نئی دہلی اور ایس سی ای آر ٹی، بہار، پٹنہ کے ڈائرکٹر صاحبان کے بھی ممنون ہیں، جن کا بیش قیمت تعاون ہمیں ملا۔

بہار اسٹیٹ ٹکسٹ بک پبلشنگ کارپوریشن لمیٹڈ طلباء، سرپرستوں، معلموں نیز ماہرین تعلیم کے تبصروں اور مشوروں کا ہمیشہ خیر مقدم کرے گا، تاکہ ریاست کو ملک کے تعلیمی شعبہ میں بلند مقام حاصل ہو سکے۔

جے۔ کے۔ پی۔ سنگھ .I.R.P.S

مینجنگ ڈائرکٹر

بہار اسٹیٹ ٹکسٹ بک پبلشنگ کارپوریشن، لمیٹڈ

دیباچہ

قومی درسیات کا خاکہ(N.C.F.2005) کی بنیاد پر بہار درسیات کا خاکہ(B.C.F.2008) بہار کے دیہی علاقوں کے ماحول کو مدنظر رکھ کر تیار کیا گیا ہے۔درسی کتاب کے رہنما اصولوں میں سب سے بڑی اور بنیادی بات ہے، بچوں کے علم کو اسکول کی باہری زندگی سے جوڑنا اور رٹنے والے طریقوں سے پاک پڑھائی کو یقینی بنانا ہے۔ یہ اصول کتابی علم کی اس وراثت کے برعکس ہے، جس کے زیر اثر ہمارا نظام آج تک اسکول اور گھر کے درمیان فاصلہ بنائے ہوئے ہے۔ نئے قومی درسی نصاب پر مبنی درسی کتابیں اسی بنیادی فکر پر عمل کرنے کی ایک کوشش ہے۔اس کوشش میں رٹا دینے والی تعلیم کے رجحان کی نفی شامل ہے۔امید ہے یہ قدم ہمیں قومی تعلیمی پالیسی (1986) میں متذکرہ بچوں پر مرکوز تعلیم کے مقاصد کے حصول میں مدد پہنچائے گا اور اس پالیسی کو مضبوطی فراہم کرتے ہوئے ''سیکھنا بغیر بوجھ'' کے عمل کو آسان بنا دے گا۔ ہماری اس درسی کتاب میں سیکھنے کا عمل رٹنے والا نہ ہو کر بچوں میں سمجھ کو فروغ دینے والا ہوتا۔درسی کتاب کے تمام اسباق سرگرمیوں پر مبنی ہیں، جس میں بچے خود دلچسپی لے کر اپنی سمجھ اور صلاحیت کو فروغ دے پائیں گے۔اس میں بچوں کو دلچسپی دلانے اور ان کی فہم وفراست کو فروغ دینے میں استاد کی سرگرم شمولیت کی اشد ضرورت ہوگی۔

اس درسی کتاب کا مقصد اسکول کی روز مرہ زندگی میں دلچسپی اور ردّوبدل کا احساس پیدا کرنا بھی ہے۔ درس وتدریس اور نگرانی کے طریقہ کار میں تبدیلی سے بھی یہ کتاب بچوں میں بوجھل اور دباؤ کے بجائے خوشی اور لگن کا احساس پیدا کرسکتی ہے۔ بوجھ کے مسئلہ سے نبٹنے کے لئے درسی نصاب وضع کرنے والوں نے بچوں کی نفسیات اور مناسب وقت کا دھیان پہلے سے زیادہ رکھا ہے۔ پوچھ کر اس مسئلے کو مزید ختم کرنے میں یہ کتاب معاون ثابت ہوگی۔ کیونکہ اس میں بچوں کے ذریعہ چھوٹے چھوٹے گروپوں میں گفت وشنید، بحث ومباحثہ اور ہاتھ سے کی جانے والی سرگرمیوں کو ترجیح دی گئی ہے اور ان کی دلچسپی کو بڑھانے کی ہر ممکن سعی کی گئی ہے۔

یہ درسی کتاب این سی ای آر ٹی۔ نئی دہلی، ایس سی ای آر ٹی۔ بہار اور بہار اسٹیٹ ٹکسٹ بک پبلشنگ کارپوریشن لمیٹڈ، پٹنہ، ودیا بھون سوسائٹی اودے پور، راجستھان، ایکلویہ بھوپال اور دیگر اہم اداروں سے شائع کتابوں کا مطالعہ کرکے ریاست کی ابتدائی سطح سے تجربہ کار اساتذہ کے ذریعہ تیار کی گئی ہے۔صوبائی کونسل ان اداروں اور اساتذہ کا شکریہ ادا کرتی ہے، جن کے تعاون اور کوششوں سے یہ کتاب حتمی طور پر تیار ہوئی ہے۔

حسن وارث

ڈائرکٹر

ایس سی ای آر ٹی، بہار

رہنما کمیٹی برائے فروغ درسی کتب

☆ جناب راہل سنگھ
اسٹیٹ پروجیکٹ ڈائریکٹر بہار ایجوکیشن پروجیکٹ کونسل، پٹنہ

☆ جناب حسن وارث
ڈائرکٹر ایس سی ای آر ٹی، پٹنہ

☆ جناب امت کمار
اسسٹنٹ ڈائرکٹر، پرائمری ایجوکیشن، محکمہ تعلیم، حکومت بہار

☆ جناب مدھوسودن پاسوان
پروگرام آفیسر، بہار ایجوکیشن پروجیکٹ کونسل، پٹنہ

☆ جناب رام شرناگت سنگھ، جوائنٹ ڈائرکٹر محکمہ تعلیم، حکومت بہار، پٹنہ

☆ ڈاکٹر سید عبدالمعین
صدر، ٹیچرس ایجوکیشن، ایس سی ای آر ٹی، پٹنہ

☆ ڈاکٹر گیان دیومنی ترپاٹھی
پرنسپل میتری کالج آف ایجوکیشن اینڈ مینجمنٹ، حاجی پور

☆ ڈاکٹر شویتا شانڈلیہ
ایجوکیشن اکسپرٹ، یونیسیف، پٹنہ

کمیٹی برائے فروغ درسی کتاب

سبجیکٹ ایکسپرٹ: ☆ ڈاکٹر ہردے کانت دیوان، ودیا بھون سوسائٹی، اُودے پور، راجستھان
☆ ڈاکٹر انل کمار، سنیئر لکچرر، ایس سی ای آر ٹی، نئی دہلی

مجلس مصنفین: ☆ جناب یشونت دوے، ودّیا بھون سوسائٹی، اُودے پور، راجستھان
☆ جناب منوج کمار جھا، استاد، پٹن مڈل اسکول، بتیا
☆ جناب دلیپ کمار، استاد، مڈل اسکول گکڑیا، نور سرائے، نالندہ
☆ جناب ناگیندر پنڈت، استاد، مڈل اسکول، اُتّلی، باراٹن کیا، گیا
☆ جناب راجندر شرما، استاد، مڈل اسکول، وردا، گیا
☆ جناب مرتیونجے کمار اوجھا، اُستاد، اُتکرمیت مڈل اسکول، پیگا بڑہرا، بھوجپور

کوآرڈی نیٹر: ☆ ڈاکٹر سیتھا آشیش داس، لکچرر ایس سی ای آر ٹی، بہار، پٹنہ
☆ ڈاکٹر رادھے رمن، لکچرر ایس سی ای آر ٹی، بہار، پٹنہ

نظر ثانی ہندی: ☆ جناب وجے کمار جھا، پرنسپل، ڈائٹ کمار باغ (مغربی چمپارن)
☆ جناب کرشن پرساد، استاد پی ایل ساہو ہائی اسکول، نالندہ

مترجمین اردو: ☆ جناب محمد شاہد، استاد پرائمری اسکول مائل اردو، بڈ وپور، ویشالی
☆ جناب عبدالمجید، استاد، پرائمری اسکول، انور پور، حاجی پور، ویشالی

نظر ثانی اردو: ☆ محترمہ صبیحہ صادق، معلّمہ ایوب اردو گرلس ہائی اسکول، پٹنہ

فہرست عنوانات

باب۔1	عددِ صحیح	1
باب۔2	کسری اعداد	33
باب۔3	اعشاریہ کسر	53
باب۔4	اعداد و شمار کی ترتیب	65
باب۔5	شکلوں کی تفہیم	95
باب۔6	مثلث اور ان کی خاصیت	116
باب۔7	مماثلت	135
باب۔8	قوت نما	153
باب۔9	الجبرائی عبارت	175
باب۔10	اعداد کا موازنہ	189
باب۔11	سہل مساوات	221
باب۔12	قابلِ پیائش اعداد	243
باب۔13	اقلیدسی شکلوں کی تشکیل	278
باب۔14	تشاکل	286
باب۔15	احاطہ اور رقبہ	294
باب۔16	سہ بعدی شکلوں کا دو بعدی میں ظاہر کرنا	230
	جوابات	247

☆☆☆

باب-1

اعدادِ صحیح کی تفہیم

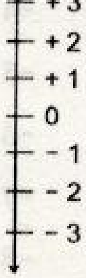
1.1 تمہید

ہم مکمل اعداد اور اعداد صحیح سے واقف ہیں۔ اس باب میں اعداد صحیح، ان کی صفت اور ان کی اہمیت کے بارے میں غور وخوض کریں گے۔ لیکن اس سے پہلے ہم مکمل اعداد اور اعداد صحیح کا اعادہ کرلیں گے۔

1.2 اسباق کا اعادہ

پچھلی جماعت میں ہم نے سیکھا:

(i) اگر زمین کی سطح سے ایک پہاڑ کی اونچائی 560 میٹر ہے اور کنویں کی گہرائی 65 میٹر تو پہاڑ کی اونچائی کو 560+ میٹر اور کنویں کی گہرائی کو 65- میٹر کے ذریعہ ظاہر کیا جا سکتا ہے کیوں کہ اگر اونچائی کو مثبت عدد صحیح ظاہر کرتے ہیں تو گہرائی کو منفی عدد صحیح سے ظاہر کریں گے۔



(ii) نفع کو مثبت عدد صحیح سے اور نقصان کو منفی عدد صحیح سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

(iii) '0' سے اوپر کے حرارت کو مثبت اور '0' سے نیچے کے حرارت کو منفی شکل میں بیان کرتے ہیں۔

یہاں مختلف علامتوں کی فہرست دی گئی ہے، جنھیں مثبت اعداد صحیح سے ظاہر کرتے ہیں تو ان کے متضاد کون سی علامتیں ہوں گی، جنھیں منفی اعداد صحیح میں بیان کر سکتے ہیں؟

نمبر شمار	مثبت عدد صحیح میں ظاہر ہونے والی	منفی عدد صحیح میں ظاہر ہونے والی
1	سمندر کی سطح سے اونچائی	
2	آبادی میں توسیع	
3	اوسط سے زیادہ بارش	
4	0°C سے اوپر کی حرارت	
5	کسی مقام سے داہنی طرف کی دوری	

6	نفع		
7	قیمت میں اضافہ		
8	جمع پونجی		
9	اوسط سے زیادہ پیداوار		

ہم جانتے ہیں:

... 1, 2, 3, 4, 5, ... اگر عدد صحیح ہے جس میں ... ,5- ,4- ,3- ,2- ,1- ,0 ,1 ,2 ,3 ,4 ... وغیرہ مثبت اعداد صحیح ہیں اور ... ,5- ,4- ,3- ,2- ,1- وغیرہ منفی اعداد صحیح ہے۔

-1 '0' (صفر) نہ تو مثبت عدد صحیح ہے نہ منفی عدد صحیح ہے۔

-2 '0' کے بعد کے اعداد بڑھتے ترتیب میں ہے۔

-3 '0' کے پہلے کے اعداد گھٹتے ترتیب میں ہے۔

-4 عددی خط پر بائیں سے دائیں کے اعداد بڑے ہوتے ہیں۔

-5 عددی خط پر دائیں سے بائیں کے اعداد چھوٹے ہوتے ہیں۔

-6 صفر ہر ایک منفی اعداد صحیح سے بڑا اور ہر ایک مثبت اعدادِ صحیح سے چھوٹا ہوتا ہے۔

-7 منفی اعداد صحیح میں اگر $a > b$ تو منفی اعداد صحیح میں $-a > -b$ جیسے $4 > 8$ تو $-4 < -8$

-8 کسی اعداد صحیح کے مخالف نشان والے عدد صحیح کو اس کا جمعی معکوس (Addititive inverse) کہتے ہیں۔ جیسے 5 کا جمعی معکوس 5- ہے اور 8- کا جمعی معکوس 8+ ہے۔ دو جمعی معکوس کا جوڑ صفر ہوتا ہے۔ جیسے $-5 + (-5) = 0, -5 + 5 = 0$ ؛ اس بنیاد پر اگر دو اعداد صحیح کا جوڑ صفر ہوتا ہے تو وہ ایک دوسرے کا جمعی معکوس کہلاتے ہیں۔

خود کر کے دیکھئے:

اعداد صحیح	8	−5	−12	15	−20	16	18
جمعی معکوس	−8	+5					
غور وفکر	(8)+(−8)=0	(−5)+(+5)=0					

ہم اپنی پچھلی جماعت میں اعدادِ صحیح کے جوڑ اور گھٹاؤ (تفریق) کا مطالعہ کر چکے ہیں کہ کس عددی پر

جب ہم:

(i) ایک مثبت عدد کو جوڑتے ہیں تو دائیں طرف چلتے ہیں۔

(ii) ایک منفی اعدادِ صحیح کو جوڑتے ہیں تو بائیں طرف چلتے ہیں۔

(iii) ایک مثبت عددِ صحیح کو گھٹاتے ہیں تو بائیں طرف چلتے ہیں۔

(iv) ایک منفی عدد صحیح کو گھٹاتے ہیں تو دائیں طرف چلتے ہیں۔

بتائیں کہ مندرجہ ذیل اقوال صحیح ہیں یا غلط۔ جو قول غلط ہیں ان کو صحیح کیجیے:

(i) جب دو مثبت اعدادِ صحیح کو جوڑا جاتا ہے تو ہمیں ایک مثبت عدد صحیح حاصل ہوتا ہے۔

(ii) جب دو منفی اعدادِ صحیح کو جوڑا جاتا ہے تو ہمیں ایک مثبت عدد صحیح حاصل ہوتا ہے۔

(iii) جب ایک مثبت عدد اور ایک منفی عدد صحیح کو جوڑا جاتا ہے تو ہمیں ہمیشہ ایک منفی عدد صحیح حاصل ہوتا ہے۔

(iv) $-4+(-8)+(12)+(-18)+(5)=-13$

(v) $(-10)+3=10-3$

(vi) $8+(7)-(-4)\neq 8+7-4$

اپنے جوابات کا موازنہ مندرجہ ذیل جوابات کے ساتھ کیجیے:

(i) صحیح ہے۔ مثال کے طور پر:

(a) $56+73=129$ (b) $11+82=195$

(c) $15+25=40$ (d) $20+30+15=65$ وغیرہ

اس طرح مثبت اعدادِ صحیح کا حاصل جوڑ ایک مثبت عدد صحیح ہوتا ہے۔ ایسے پانچ اور مثال دیجئے۔

(ii) غلط ہے کیونکہ $(-5)+(-8)=-13$ جو کہ مثبت عدد صحیح نہیں ہے۔

$-8+(12)=$
$25+(-75)$
$-28+(52)$
$50+88=$
$-20+(-15)+50$
$-12+(-4)+(-10)+15+18=$

$$(-18)+(-7)+(-5)=-30$$

اس لیے منفی اعدادِ صحیح کا جوڑ ایک منفی عدد صحیح ہوتا ہے۔ اس قول کے ضمن میں پانچ اور مثال دیجئے۔ (منفی اعداد صحیح کا حاصل جمع میں دا صحیح کے خالص قیمت کو جوڑ کر حاصل جمع کے پہلے (-) علامتی نشان لگاتے ہیں۔

(iii) غلط کیوں کہ $(-8)+(20)=12$ یہ ایک منفی عدد صحیح نہیں ہے۔

$$(+15)+(-50)=-35$$

اس لیے جب ایک مثبت اور ایک منفی یا ایک منفی اور ایک مثبت عدصحیح کو جوڑا جاتا ہے تو دونوں اعداد کو گھٹا دیتے ہیں اور بڑے اعدادِ صحیح کی علامت اس فرق کے پہلے رکھ دیا جاتا ہے۔ بڑے اعدادِ صحیح کا فیصلہ دونوں اعدادِ صحیح کے علامتوں کو نظر انداز کرتے ہوئے لیا جاتا ہے جیسا کہ اوپر کے مثال سے ظاہر ہے۔

(iv) صحیح ہے: $-4+(-8)+(12)+(-18)+(5)$ کو حل اس طرح کیا جاتا ہے۔

$$-4+(-8)+(12)+(-18)+5$$

یا $-30+17=-13$

چونکہ دو سے زیادہ منفی اور مثبت اعداد کا حاصل جمع معلوم کرنے کے لیے مثبت اعداد کا حاصل جمع ایک ساتھ اور منفی اعداد کا حاصل جمع ایک ساتھ معلوم کرنے کے بعد پھر ان کا فرق قاعدہ(iii) کے مطابق حاصل کر لیتے ہیں۔ اس لیے عددِ صحیح کی جمع ایک عددِ صحیح ہوتا ہے۔

1.3 اعداد صحیح کے جوڑ و گھٹاؤ کی خاصیتیں:

1.3.1 جوڑ کے تحت مربوط ہونے کی خاصیت (Closer Property)

ہم سیکھ چکے ہیں کہ دو مکمل عدد کا حاصل جمع ایک مکمل عدد ہی ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر $5+8=13$ ہے، جو کہ ایک مکمل عدد ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ یہ خاصیت مکمل اعداد کے جوڑے کے تحت مربوط(Close) ہونے کی خاصیت کہلاتا ہے۔

آیئے دیکھیں کہ کیا یہ خاصیت اعدادِ صحیح کے لیے بھی ٹھیک ہے یا نہیں۔ اعدادِ صحیح کے کچھ جوڑے نیچے دیئے جا رہے ہیں۔ نیچے دی ہوئی جدول کو دیکھئے اور اُسے پورا کیجیے:

	قول	جانچ
(i)	$8 + 4 = 40$	نتیجہ ایک عددِ صحیح ہے۔
(ii)	$(-3) + 5 =$ -------	------------------------------
(iii)	$(25) + 8 =$ -------	------------------------------
(iv)	$19 + (-25) = -6$	نتیجہ ایک عددِ صحیح ہے۔
(v)	$5 + (-3) =$ -------	------------------------------
(vi)	$(-20) + 0 =$ -------	------------------------------
(vii)	$(-7) + (-8) =$ -------	------------------------------

کیا دو اعدادِ صحیح کا جمع ہمیشہ ایک عددِ صحیح حاصل ہوتا ہے؟ کیا آپ کو اعدادِ صحیح کا کوئی ایسا جوڑا ملا جس کا جمع عددِ صحیح نہیں ہے؟ اس طرح اعدادِ صحیح کا جمع ایک عددِ صحیح ہوتا ہے اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اعدادِ صحیح، جمع کے تحت مربوط(Closed) ہوتا ہے۔

بڑے پیمانے پر کسی دو اعدادِ صحیح a اور b کے لیے a+b ایک عددِ صحیح ہوتا ہے۔

1.3.2 ترتیب تبادلہ کی خاصیت (Commutative Property)

$(-5) + (-3) = -8$ پھر $(-3) + (-5) = 8$

تو ہم پاتے ہیں کہ $(-3) + (-5) = (-5) + (-3)$

اس لیے دو اعدادِ صحیح کا حاصل جمع اور ان کی الٹی ترتیب کے حاصل جمع کے برابر ہوتا ہے۔ اس صفت کو ترتیب تبادلہ کی خاصیت (Commutative Property) کہتے ہیں۔ آپ دوسرے اعدادِ صحیح کے ساتھ کر کے دیکھئے ۔ کیا آپ کو ایسے اعدادِ صحیح ملتے ہیں جو ترتیب تبادلہ کے اصول کا لحاظ نہیں رکھتا۔a اور b دو عددِ صحیح ہیں تو $a + b = b + a$ یہ ترتیب تبادلہ کی خاصیت ہے۔

1.3.3 معاونت کی خاصیت (Associative Property)

مندرجہ ذیل مثالوں کو دیکھئے :

اعدادِ صحیح 5- اور 2-،3- کو لیجیے۔

$[(-5) + (-3)] + (-2)$ اور $(-5) + [(-3) + (-2)]$ پر توجہ دیجئے۔

پہلے جوڑ میں (3−) اور (2−) کو ملا کر ایک گروہ بنایا گیا ہے اور دوسرے جوڑ میں (3−) اور (5−) کو ملا کر ایک گروہ بنایا ہے۔ ہم اس کی جانچ کریں گے کہ ہمیں کیا نتیجہ حاصل ہوتے ہیں؟

$(-5)+[(-3)+(-2)]$

$[(-5)+[(-3)+(-2)$

ان دونوں ہی حالتوں میں ہمیں 10− حاصل ہوتا ہے۔

یعنی کہ $(-5)+[(-3)+(-2] = [(-5)+(-2)+(-3)$

اسی طرح 7− اور 3−, 1 کو لیجیے۔

$(-3)+[1+(-7)] = -3 + \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$

$[(-3)+1]+(-7) = -2 + \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$

کیا $[(-7)+1]+(-3)$ اور $[(-3+1]+(-7)$ کا حل یکساں ہیں۔

اس طرح کی پانچ اور مثال لیجیے۔ آپ ایسی کوئی مثال نہیں پائیں گے، جس کے لیے اس طرح کے جمع مختلف ہیں۔ یہ ظاہر کرتا ہے کہ اعداد صحیح کے لیے جمع معاونتی Associative ہوتا ہے۔ بڑے پیمانے پر اعداد صحیح a , b اور C کے لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $a+(b+c)=(a+b)+c$

1.3.4 جمعی شناخت

درج ذیل پر غور کریں:

(i) $(-5)+0=-5$ (ii) $2+0=2$

پھر $0+(-5)=-5$ $0+2=2$

$\Rightarrow (-5)+0=0+(-5)=-5$ $\Rightarrow 0+2=2+0$

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ کسی عدد صحیح کے لیے

$a+0=a$ اور $0+a=a$

تب a جوڑ کے لئے جمعی شناخت (Additive identitity) کہلاتا ہے۔

خود کر کے دیکھیے:

مندرجہ ذیل کے سامنے اس کی خاص صفت کو لکھیے:

$5+(-2)=-2+5$		-1
$(-2+5)+(-4)=-2+\{5+(-4)\}$		-2
$-25+0=-25$		-3
$-12+(-5)=-17$		-4

1.4 اعدادِ صحیح کا گھٹاؤ (Subtraction) دیکھیے اور سمجھیے:

(i) $12-20=-8$ (ii) $8-(-5)=8+5=13$

(iii) $-5-(-4)=-5+4=-1$ (iv) $-10-(4)=-10-4=-14$

خود کر کے دیکھیے:

$-5-(-50)=$ $20-(-45)=$ $-55-(+75)=$ $-60-(-4)=$

1.5 اعدادِ صحیح کی خاصیت (گھٹاؤ کے لیے)

(a) $-10-(5)=-15$ (b) $6-(-10)=6+10=16$

اس لیے دو اعدادِ صحیح کا فرق عددِ صحیح عدد ہوتا ہے۔ اسے گھٹاؤ کا مربوطی خاصیت کہتے ہیں۔ آپ مثال لے کر دیکھیے کیا کوئی ایسے عددِ صحیح بھی ملے جن کا فرق ایک عددِ صحیح نہ ہو۔ بڑے پیمانے پر a اور b دو عددِ صحیح اعداد ہیں تو $a-b$ بھی ایک عددِ صحیح عدد ہوگی۔

خود کر کے دیکھیے:

4, 12, 20, 28, ____, ____, ____

8, 6, 4, ____, ____, ____, ____

−8, −12, ____, −20, ____, ____

−15, −10, −5, ____, ____, ____

ایسے کچھ اور Pattern بنائیے اور خود یا اپنے دوستوں سے کروائیے۔

سوالات

1- مندرجہ ذیل کے درمیان کے سبھی اعداد صحیح لکھیے :

(a) 5 اور -5   (b) 8 اور -2

(c) -2 اور -6   (d) -10 اور -4

2- مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک میں بڑے عدد صحیح پر گھیرا (○) لگائیں :

(a) -20,4   (b) -15,-8   (c) 0,-5

(d) -20,-7   (e) 25,-2   (f) -20,-18

3- خالی جگہوں میں مناسب علامت (= اور < , >) کو پُر کیجیے :

(a) -6 □ -8   (b) 4 □ 0   (c) -15 □ 2

(d) -50 □ -54+4   (e) 25 □ 25   (f) 4-15 □ 2-20

4- نیچے دیئے گئے عدد صحیح کو بڑھتے ترتیب میں لکھیے :

(a) -8,12,-5,15,20,-2   (b) 5,0,-2,4,-15,8

5- نیچے دیئے گئے عدد صحیح کے بعد والا عدد صحیح عدد بتائیں :

(a) -18   (b) 15   (c) -20

(d) 18   (e) -5

6- نیچے دیئے گئے اعداد صحیح کے پہلے والا عدد صحیح بتائیں :

(a) 25   (b) -59   (c) -55

(d) -26   (e) +100

7- خالی جگہوں کو پُر کیجیے :

(i) (-5) + (2) = ...   (2) + (-5) = ...

کیا (-5) + 2 = (2) + (-5) ہے؟ ....

کچھ دوسرے اعداد صحیح لے کر جدول کو پورا کیجیے اور جانچیے :

	a	b	a + b	b + a	کیا(a + b) = (b + a) ہے؟	a - b	b - a	کیا(a - b) = (b - a) ہے؟
(i)	-6	3	-6+3 = -3	3+(-6) = -3		(-6)- (3) = -9	(3)-(-6) = 9	
(ii)								
(iii)								

-8 خالی جگہوں کو پُر کیجیے:

(i) $(-a)+(6)=(6)+(\ldots\ldots\ldots\ldots)$

(ii) $-8+\ldots\ldots\ldots\ldots=0$

(iii) $(2)+[0+(6)]=[2+9]+(\ldots\ldots\ldots\ldots)$

(iv) $15+\ldots\ldots\ldots\ldots=15$

-9 مندرجہ ذیل کو جوڑیے:

(a) -15 میں 18 کو (b) -20 میں 17 کو

(c) +24 میں -16 کو (d) -8 میں 5 کو

-10 مندرجہ ذیل کو گھٹائیں:

(a) -15 میں سے -5 کو (b) 25 میں سے -75 کو

(c) -8 میں سے -16 کو (d) -20 میں سے -18 کو

-11 مندرجہ ذیل صفتوں کا ایک ایک مثال دیجیے:

(a) ترتیب تبادلہ کی خاصیت (b) معاونت کی خاصیت

(c) مربوطی خاصیت (d) جمعی شناخت

-12 ایسے اعداد صحیح کے جوڑے لکھیے، جن کا:

(a) جمع -18 (b) فرق -18 (c) جمع 0 ہے

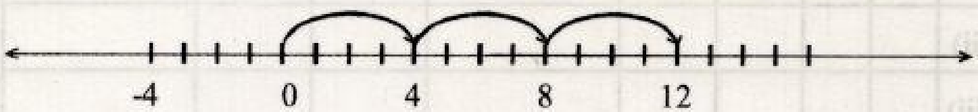
(d) اشارے (a) کے لیے (i) -8 = $-5 + (-3) = -8$ (ii) $-1+ (7) = -8)$

1.6 اعداد صحیح کا ضرب (Multiplication of integers)

مثبت اعداد صحیح کا ضرب

ہم جانتے ہیں 3×4 یعنی 4 تین بار یعنی $4+4+4=12$

اسے عددی خط پر اس طرح ظاہر کر سکتے ہیں:



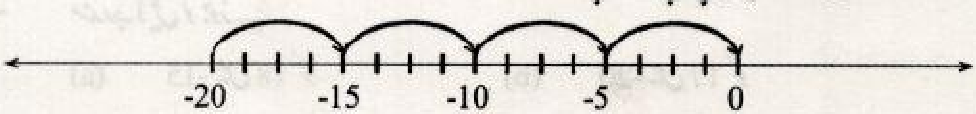
خط عددی سے ظاہر ہوتا ہے $4+4+4=3\times4=12$ اس لیے $3\times4=12$

مثبت عدد صحیح کا منفی عدد سے ضرب:

جیسے $(-5)\times4$ کا مطلب ہے -5 کو چار دفعہ جوڑنا

اس لیے $(-5)+(-5)+(-5)+(-5)=-20$ ہے۔ عددی خط کے ذریعہ اسے اس طرح ظاہر کر سکتے ہیں:

دو اعداد صحیح کے درمیان چار چار خط کھینچیے۔



عددی خط سے ظاہر ہے کہ $(-5)+(-5)+(-5)+(-5)=4\times-5=20$

ظاہر ہے کہ:

(i) دو مثبت اعداد صحیح کا حاصل ضرب مثبت ہوتا ہے۔

مان لیا کہ $+a$ اور $+b$ دو مثبت عدد صحیح ہے۔

$\therefore \quad (+a)\times(+b)=+ab$

(ii) ایک مثبت عدد صحیح کا دوسرے منفی عدد صحیح سے ضرب کرنے سے حاصل ضرب منفی ہوتا ہے۔

مان لیا کہ $+a$ اور $-b$ دو عدد صحیح ہے۔

$\therefore \quad (+a)\times(-b)=-ab$

خود کر کے دیکھیے:

$5\times(-6)=$

$4\times(-2)=$

$3\times(-4)=$

$5\times(-2)=$

$2\times7=$

آیئے درج ذیل Pattern پر غور کریں:

5×4	$=20\downarrow$
5×3	$=15$
5×2	$=10$
5×1	$=5$
5×0	$=0$
$5\times(-1)$	$=?$

سامنے دیئے گئے جدول میں حاصل ضرب کے Pattern کو دیکھنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ اوپر سے نیچے کی طرف عدد سلسلہ وار 5 ہوتی جاتی ہے۔

اس لیے $5\times(-1)=-5$

اسی طرح سے ان کے لیے بھی Pattern بنائیے کم

(i) 4×3 سے شروع کیجیے۔

(ii) 7×3 سے شروع کیجیے۔

چونکہ ایک مثبت عدد صحیح اور ایک منفی عدد صحیح کا ضرب کرنے پر ہمیشہ ایک منفی عدد صحیح حاصل ہوتا ہے۔

دو منفی عدد صحیح کا ضرب:

$5\times$	(-1)	$=$	$-5\downarrow$
$4\times$	(-1)	$=$	-4
$3\times$	(-1)	$=$	-3
$2\times$	(-1)	$=$	-2
$1\times$	(-1)	$=$	-1
$0\times$	(-1)	$=$	-0
$(-1)\times$	(-1)	$=$	$?$

سامنے دیئے گئے جدول میں حاصل ضرب کے Pattern کو بغور دیکھنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ اوپر سے نیچے کی طرف عدد کی قیمت سلسلہ وار 1 (ایک) زیادہ ہوتی جاتی ہے۔ اس لیے $-1\times(-1)=+1$ اس Pattern کو آگے بڑھائیے:

$$(+a)\times(+b)=+ab$$

$$(-a)\times(-b)=+ab$$

$$(-a)\times(+b)=-ab$$

$$(+a)\times(-b)=-ab$$

ایسے اور Pattern بنائیے:

(i) -5×3 سے شروع کریں۔ (ii) -3×4 سے شروع کریں۔

اس لیے جب دو منفی اعداد صحیح کو ضرب کیا جاتا ہے تو ہمیشہ ایک مثبت عدد صحیح حاصل ہوتا ہے۔

ذیل کی مثالوں کو پڑھئے اور سمجھئے:

(i) 5x=20 یا (+5)x(+4)=+20

(ii) -5x4=-20 یا (-5)x(+4)=-20

(iii) 8x(-2)=-16 یا (+8)x(-2)=-16

(iv) -10x(-5)=50 یا -10x(-5)=-5+50

خود کر کے دیکھئے:

(i) -8x(-20)= (ii) -5x(-15)= (iii) -10x40=

(iv) -30x20= (v) 18x4= (vi) 16x(-15)=

کوشش کیجیے: ہر ایک خانے میں کالم اور افقی قطار والے عدد سے ضرب کیجیے:

	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	-81																			
8																				
7																				
6																				
5																				
4																				
3																				
2																				
1																				
-1																				
-2																				
-3																				
-4																				
-5																				
-6																				

1.7 تین یا زائد منفی اعداد صحیح کا حاصل ضرب:

آیئے درج ذیل مثالوں کو دیکھئے۔

(a) $(-2)\times(-4)=8$

(b) $(-2)\times(-4)\times(-5)=[(-2)\times(-4)]\times(-5)=8\times-5=-40$

(c) $(-3)\times(-4)\times(-6)\times(-8)=[(-3)\times(-4)]\times[(-6)]\times(-8)]=12\times 48=576$

(d) $(-4)\times(-5)\times(-2)\times(-6)\times(-3)\backslash[(-4)\times(-5)]\times[(-2)\times(-6)]\times(-3)=20\times$ $12\times(-3)=240\times(-3)=-720$

مندرجہ بالا مثالوں سے ہم دیکھتے ہیں کہ:

(a) پہلے دو عدد صحیح کا حاصل ضرب پاتے ہیں پھر حاصل شدہ حاصل ضرب کو دیگر عدد صحیح سے ضرب کرتے ہیں۔

(b) دو منفی اعداد صحیح کا حاصل ضرب ایک مثبت عدد صحیح ہے۔

(c) تین منفی اعداد صحیح کا حاصل ضرب ایک منفی عدد صحیح ہوتا ہے۔

(d) چار منفی عدد صحیح کا حاصل ضرب ایک مثبت عدد صحیح ہے۔

اس لیے جانچ سے ظاہر ہوتا ہے کہ اگر منفی عدد صحیح کو جفت مرتبہ ضرب کیا جائے تو حاصل ضرب مثبت عدد صحیح حاصل ہوتا ہے، جب کہ منفی عدد صحیح کو طاق مرتبہ ضرب کیا جائے تو حاصل ضرب منفی عدد صحیح حاصل ہوتا ہے۔

آپ بھی پانچ منفی عدد صحیح لے کر حاصل ضرب کی جانچ کیجیے۔کیا حاصل ضرب منفی حاصل ہوتا ہے یا نہیں؟

1.8 اعداد صحیح کے ضربی عمل کی خاصیت

I- ضرب کے لیے مربوطی اصول

ذیل پر غور کریں:

$4\times 2=8$

$-5\times -3=15$

$-2\times 4=-8$

$3\times -6=-18$

ان مثالوں سے ظاہر ہوتا ہے کہ دو اعداد صحیح کا حاصل ضرب ایک عدد صحیح ہی ہوتا ہے۔ اس لیے اعداد صحیح

ضرب کے لیے مربوط ہوتے ہیں۔ مان لیا کہ a اور b دو اعداد صحیح ہیں اور ان کا حاصل ضرب 'c' ہے تو c بھی ایک عدد صحیح ہوگا، کیا آپ ایسے کوئی دو عدد صحیح سوچ سکتے ہیں۔ جن کا حاصل ضرب عدد صحیح نہ ہو۔؟

II- ضرب کا ترتیب تبادلہ خاصیت

اس سچائی پر غور کریں:

$-2\times3=-6$

$3\times-2=-6$

$\Rightarrow -2\times3=3\times-2$

اس طرح

$5\times4=20$

$4\times5=20$

$\Rightarrow 5\times4=4\times5$

$-8\times2=-16$

$2\times-8=-16$

$\Rightarrow -8\times2=2\times-8$

مندرجہ بالا مثالوں سے ظاہر ہوتا ہے کہ دو اعداد صحیح کے ضرب میں پہلے عدد صحیح کو دوسرے سے ضرب کریں یا دوسرے کو پہلے سے، حاصل ضرب برابر ہوتے ہیں۔ اس لیے اعداد صحیح کا ضرب میں تبادلہ کے اصول کو عمل میں لایا جاتا ہے۔ اگر a اور b دو عدد صحیح ہیں تو $a\times b=b\times a$ بھی صحیح ہے۔

III- ضربی معاونت کی خاصیت(Associative Property of Multiplication)

ذیل پر غور کریں:

$2\times3\times4$ میں

$(2\times3)\times4 = 6\times4 = 24$

$2\times(3\times4) = 2\times12 = 24$

اس لیے $(2\times3)\times4=2\times(3\times4)$

اسی طرح:

$-4\times5\times6$ میں

$(-4\times5)\times6 = -20\times6 = -120$

$-4\times(5\times6) = -4\times30 = -120$

اس لیے $(-4\times5)\times6=-4\times(5\times6)$

نیچے دیے تین اعداد صحیح کا اسی طرح گروپ بدل کر ضرب کیجیے:

(i) $3\times-2\times4$ (ii) $-3\times-5\times7$

کیا ان کا حاصل ضرب گروپ بدلنے سے بدلا؟

وسیع پیمانے میں کس تین اعداد صحیح a,b,c کے لیے:

$$(a\times b)\times c \quad = \quad a\times(b\times c)$$

a, b, c میں ہر ایک کے لیے پانچ قیمتیں لیجئے اور اس خاصیت کی جانچ کیجیے۔

اس لیے مکمل اعداد کی طرح تین اعداد صحیح کا حاصل ضرب ان کے گروپ بنانے پر منحصر نہیں کرنا ہے۔ یعنی پہلی کا دوسری کے ساتھ ضرب کر کے تیسری اعداد صحیح کے ساتھ ضرب کریں یا دوسرے اور تیسرے اعداد صحیح کا ضرب کر پہلے عدد صحیح کے ساتھ ان کا ضرب کریں۔ حاصل ضرب یکساں آتا ہے اور یہ اعداد صحیح کے لیے ضرب کا معاونت (اصول) خاصیت کہلاتا ہے۔

عمومی طور پر مانا کہ a,b اور c تین اعداد صحیح ہیں تو $\boxed{(a\times b)\times c = a\times(b\times c)}$ بھی صحیح ہے۔

IV - جوڑ پر تقسیمی خاصیت (Distributive property)

ذیل پر غور کریں:

$4\times(5+8) \qquad = 4\times5+4\times8$

$= 4\times13 \qquad = 20+28$

$= 52 \qquad = 52$

لہذا $4x(5+8)=4x5+4x8$

اس طرح $4\times(-5+7) \quad = \quad 4\times-5+4\times7$

$= 4\times2 \qquad = -20+28$

$= 8 \qquad = 8$

لہذا $4x(-5+7)=4x(-5)+4x7$

اسی طرح $4\times[5+(-7)] \qquad 4\times5+4\times-7$

$4\times(5-7) \qquad = 20-28$

$= 4\times-2 \qquad = 20-28$

$= -8 \qquad = -8$

اس لیے $4\times[5+(7)] = 4\times5+4\times-7$

مندرجہ بالا صداقتوں سے ظاہر ہے کہ دو یا زائد اعداد صحیح کے جمع میں کس دوسری عدد سے ضرب کیا جائے تو حاصل ضرب وہی آتا ہے، جو جزء ضربی کا اعداد صحیح میں الگ الگ ضرب کر کے جوڑنے سے دستیاب ہوتا ہے۔

اس طرح اس صفت کو جوڑ پر تقسیمی اصول (Distributive Law) کہتے ہیں۔ مانا کہ x اور y دو عدد صحیح ہیں، جس کا حاصل جمع $(x+4)$ ہے تو اس کے حاصل جمع میں a عدد صحیح سے ضرب کرنے پر دستیاب حاصل ضرب وہی آتا ہے جو عدد صحیح a کا x اور y کے ساتھ الگ الگ ضرب کر جوڑنے پر آتا ہے۔

$$a(x+y) = ax + ay$$

V - ضرب کے لیے شناختی عنصر (Identity Element)

ذیل پر غور کریں:

$4 \times 1 = 4$	$(-3) \times 1 =$	$25 \times 1 =$ ....
$4 - 2 \times 1 = -2$	$(4) \times 1 =$	$-32 \times 1 =$ ....

مندرجہ بالا جدول سے ہم پاتے ہیں کہ کس عدد صحیح کو ایک سے ضرب کرنے پر وہی عدد صحیح حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے اعداد صحیح میں ضرب کے لیے شناختی عنصر 1 ہے۔

VI - ذیل کو سمجھیں:

$5 \times (-1) = -5$	$-1 \times (-5) = +5$
$-5 \times (-1) = +5$	$-1 \times 5 = -5$

اس طرح کس عدد صحیح میں 1- سے ضرب کرنے پر حاصل ضرب مخالف علامت کا وہی عدد صحیح حاصل ہوتا ہے۔ یعنی جمعی معکوس (Aditive Inverse) حاصل ہوتا ہے۔ اگر a کوئی عدد صحیح ہو تو $\boxed{a \times -1 = -a}$

VII - ذیل کو سمجھیں:

$2 \times 0 = 0$	$25 \times 0 =$	$125 \times 0 =$ ....
$-4 \times 0 = 0$	$37 \times 0 =$	$229 \times 0 =$ ....

اس لیے کس عدد صحیح میں صفر سے ضرب کرنے پر حاصل ضرب صفر حاصل ہوتا ہے۔ مانا کہ a ایک عدد صحیح ہے، تو $a \times 0 = 0$

VIII - ذیل کو سمجھیں:

$8 > 5$	دوبارہ $8 > 5$
یا $8 \times 2 > 5 \times 2$	$8 \times -2 < 5 \times -2$

اگر a, b اور c ایسے عدد صحیح ہیں کہ $a > b$ تو

(i) $a\times c > b\times c$ اگر c = مثبت عدد صحیح ہو

(ii) $a\times c < b\times c$ اگر c = منفی عدد صحیح ہو

IX- (i) $2\times3\times4=(2\times3)\times4=2\times(3\times4)=(4\times2)\times3$

(ii) $(-2)\times(-3)\times(-4)=[(-2)\times(-3)]\times(-4)=(-2)\times[(-3)\times(-4)]=$
$[(-2)\times-4]\times(-3)$

چونکہ تین اعداد صحیح کا ضرب کرنے میں کس دو اعداد صحیح کے حاصل ضرب میں باقی تیسرے عدد صحیح سے ضرب کرنے سے آخری حاصل ضرب وہی رہتا ہے۔

خود کر کے دیکھئے:

ذیل کے ضربوں کے سامنے ہر ایک کا مناسب مثال دیں (ضرب کے لیے)

ضرب	ضرب کے تحت	مثال
معاونت کی صفت		
تقسیمی صفت		
مربوطی صفت		
ترتیب تبادلہ کی صفت		
شناختی صفت		

1.9- ضرب کو آسان بنانے کا طریقہ:

$5\times78\times20$ کو حل کرنے کے لیے ہم اسے دو طریقے سے کر سکتے ہیں:

$=(20\times78)\times5=1560\times5=7800$

یعنی $(20\times5)\times78$

$100\times78=7800$

کون سا طریقہ آسان ہے؟

ظاہر ہے کہ دوسرا طریقہ آسان ہے۔ کیوں کہ 20 کو 5 سے ضرب کرنے پر 100 حاصل ہوتا ہے۔ جسے 78 سے ضرب کرنا آسان ہے۔ غور کیجئے دوسرے اصول میں اعداد صحیح میں ترتیب تبادلہ کی خاصیت اور معاونت کی خاصیت کو اپنایا گیا۔

مثال 1:

(i) 28×12

$28\times12=28\times(10+2)$

$=28\times10+28\times2$

$=280+56=336$

(ii) -8×48

$-8\times(50-2)$

$=-8\times50+[(-8)\times(-2)]$

$=-400+16=-384$

(iii) $(-250\times(-98)$

$=-25\times(-100+2)$

$(-25)\times(-100)+(-25)\times2$

$=2500-50=2450$

(iv) $54\times(-8)+(-54)-2$

$=-54\times8+(-54)\times2$

$=-54\times(8+2)==54\times10$

$=540$

مندرجہ بالا مثالوں کو دیکھنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ ضرب کے اصولوں/خصوصیات کا استعمال کر حاصل ضرب کو آسانی سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

خود کر کے دیکھئے:

ضرب کے اصولوں کے ذریعہ مندرجہ ذیل کو حل کریں:

(a) $-50\times48\times2$ (b) 850×48

(c) -75×52 (d) $-38\times2-38\times8$

لفظی مسائل:

مثال: 2 دو اعداد صحیح کا حاصل ضرب 30- ہے، اگر ان میں سے ایک عدد صحیح 15 ہے تو دوسرا عدد صحیح معلوم کریں۔

حل: یہاں ایک عدد صحیح 15 =

$\therefore$ 15× دوسرا عدد صحیح = 30-

دوسرا عدد صحیح $=\dfrac{-30}{15}=-2$ جواب

سوالات

-1 ضرب کیجئے:

(a) $225\times(-4)$ (b) $(-405)\times(-5)$
(c) $(-80)\times(-50)$ (d) $(-11)\times15$
(e) $(-3)\times35\times(-10)$ (f) $(-25)\times0$
(g) $(-4)\times(-4)\times(-4)\times(-4)$ (h) $(-2)\times(-2)\times(-2)$
(i) $-20)\times(-15)\times(-25)\times(-5)$ (j) $-50\times5\times(-20)$

-2 مندرجہ ذیل میں صحیح اور غلط کو دریافت کریں:

(i) $18\times(-2)=(-2)\times18$ (ii) $-38\times1=38$
(iii) $(-20)\times(5)=(-5)\times(-20)$ (iv) $43\times0=43$
(v) $1\times-425=-425$ (vi) $-1\times25=-25$
(vii) $[(-2)\times(-12)]\times-24=(-2)\times[(-12)\times(-24)]$
(viii) $(-5)\times(-2+3)=(-5\times2+(-5)\times3$

-3 مندرجہ ذیل کے سامنے اس کے مناسب صفت کو لکھئے:

(i) $-25\times(8+2)=(-25)\times8+(25)\times2$.................
(ii) $(-8)\times(-4)=(-4)\times(-8)$ (iii) $(20\times30)\times40=20\times(30\times40)$
(iv) $(-2)\times-10=20$ (v) $-5\times1=-5$

-4 جانچ کر بتائیں:

(i) $42\times(-5)=-5\times42$ (ii) $25\times(28+2)=25\times28+25\times2$
(iii) $(50\times60)\times70=50\times(60\times70)$ (iv) $(-24)\times(5\times2)=(-24\times5)\times2$

-5 کس عدد صحیح میں (1-) کا ضرب کرنے پر حاصل ضرب ذیل میں حاصل ہوتے ہیں۔

(i) 20 (ii) −45 (iii) 0 (iv) 1 (v) −50

-6 $-4\times0=0$ کے طریقے پر جانچئے کہ دو منفی اعداد صحیح کا حاصل ضرب مثبت اعداد صحیح ہوتا ہے۔

اشارے: $-4\times(2-2)=0$ یا $-4\times[2+(-2)]=-4\times2+(-4)\times(-2)=-8+(-4)\times(-2)=0$

اس کی قیمت صفر اسی وقت ہوگا جب $8+ = (-2) \times (-4)$

∴ دو منفی اعداد صحیح کا حاصل ضرب مثبت اعداد صحیح ہوتا ہے۔

-7 سہل کیجیے (مختلف خاصیتوں کا استعمال کرتے ہوئے)۔

(i) $(-7)\times 5+(-7)\times 11$ (ii) $675\times(-5)-5\times(-675$

(iii) $8\times(50-4)$ (iv) $5\times 27\times(-4)$

(v) 987×98 (vi) $-57\times(-19)+57$

-8 مندرجہ ذیل جدول(Table) کو پورا کریں:

x	0	−1	−2	−3	4	6
−2						
−3						
−4						
−1						
5						

-9 مندرجہ ذیل میں کون صحیح ہے اور کون غلط؟

(i) 20- کا اُلٹا یا جمعی معکوس 20 ہے۔ ( )

(ii) کس عدد صحیح کا جمعی معکوس حاصل کرنے کے لیے اس میں صفر سے ضرب کرتے ہیں۔ ( )

(iii) 5 منفی اعداد صحیح کا حاصل ضرب مثبت عدد صحیح ہوتا ہے۔ ( )

(iv) چار منفی اعداد صحیح کا حاصل ضرب مثبت عدد صحیح ہوتا ہے۔ ( )

(v) $-4\times 1=-4$ ( )

(vi) $-5\times 0=0$ ( )

-10 مندرجہ ذیل میں اعداد صحیح کے ضرب میں صحیح عبارت کے آگے صحیح کی علامت لگائیں اور غلط عبارت کو ٹھیک کر کے لکھیے:

(i) $(+2)\times(-3)=-6$ ( ) (ii) $(-4)\times(+8)=+32$ ( )

(iii) $(-2)\times(-2)=+4$ ( ) (iv) $(+3)\times(+4)=-12$ ( )

-11 کسی منجمد کرنے کے عمل میں کمرے کے درجہ حرارت کو 40°c سے 5°c فی گھنٹے کی شرح سے کم کرنے کی ضرورت ہے۔ اُس عمل کے شروع ہونے کے 10 گھنٹے کے بعد کمرے کا درجۂ حرارت کیا ہوگا؟

-12 دس سوالات والے ایک امتحان میں ہر ایک صحیح جواب کے لیے 5 نمبر دیئے جاتے ہیں اور ہر ایک غلط جواب کے لیے (2-) نمبر دیئے جاتے ہیں اور سعی نہیں کیے گئے جواب کے لیے صفر دیا جاتا ہے۔

(i) موہن چار سوالات کا صحیح اور چھ سوالات کا غلط جواب دیتا ہے۔ اُس کے ذریعہ حاصل شدہ نمبر کتنے ہیں؟

(ii) ریشما کے سات جواب صحیح ہیں اور پانچ جواب غلط ہیں۔ اس نے کتنے نمبر حاصل کیے؟

(iii) حنا نے کل پانچ سوالات حل کئے ہیں۔ ان میں سے دو کا جواب صحیح ہے اور پانچ کا جواب غلط ہے، تو اس کے کتنے نمبر حاصل ہوتے ہیں؟

-13 ایک سیمنٹ کمپنی کو سفید سیمنٹ فروخت کرنے پر 8 روپے فی بورا کی شرح سے فائدہ ہوتا ہے اور سلیٹی (Gray) رنگ کی سیمنٹ فروخت کرنے پر 5 روپے فی بورا کی شرح سے نقصان ہوتا ہے۔

(a) کسی ماہ میں وہ کمپنی 3000 بوریاں(Bags) سفید سیمنٹ کی اور 5000 بوریاں(Bags) سلیٹی سیمنٹ کا فروخت کرتا ہے۔ اس کا فائدہ اور نقصان کیا ہے؟

(b) اگر فروخت کی گئی سفید سیمنٹ کی بوریاں کی تعداد 6400 ہیں تو کمپنی کی سلیٹی سیمنٹ کی کتنی بوریاں فروخت ہونی چاہئیں تا کہ اسے نہ تو فائدہ ہو اور نہ نقصان؟

-14 ایک بجلی کمپنی ہر ایک رنگین ٹیلی ویژن پر 80 روپے کا فائدہ کماتا ہے اور ہر ایک ریفریجریٹر (Refrigarator) پر 60 روپے کا نقصان ہوتا ہے۔

(a) کمپنی 5000 رنگین ٹیلی ویژن اور 4000 ریفریجریٹر (Refrigarator) ایک ماہ میں فروخت کرتا ہے تو کمپنی کو کتنا فائدہ یا نقصان ہوتا ہے؟

(b) کمپنی کے ذریعہ 4000 ریفریجریٹر فروخت کرنے پر کمپنی کتنا رنگین ٹیلی ویژن فروخت کرے کہ اسے نہ تو فائدہ ہو اور نہ تو نقصان؟

-1.10 اعداد صحیح میں تقسیم کا عمل (Division Operation in Integers)

ہم جانتے ہیں کہ تقسیم، ضرب کا مخالف عمل ہے جیسے $28 = 7 \times 4$ ہے، اس لیے $28 \div 4 = 7$ اور $28 \div 7 = 4$ ہے۔

اس طرح $20 = 4 \times 5$ اور $20 \div 5 = 4$ اور $20 \div 4 = 5$ حاصل ہوتا ہے۔

اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ مکمل اعداد کے ہر ایک ضربی قول کے لیے دو تقسیم کے قول ہوتے ہیں۔

کیا آپ اعداد صحیح کے لیے ضربی قول اور متعلق تقسیم کے اقوال کو لکھ سکتے ہیں؟

مندرجہ ذیل جدول کو دیکھئے اور اسے پورا کیجئے :

	متعلق تقسیمی قول	
ضربی قول	I	II
$2 \times (-6) = (-12)$	$(-12) \div (-6) = 2$	$(-12) \div 2 = (-6)$
$(-4) \times 5 =) - 20)$	$(-20 \div (5) = (-4)$	$(20) \div (-4) = 5$
$(-8) \times (-9) = 72$	$72 \div$ _____ = _____	$72 \div$ _____ = _____
$(-3) \times (-7) =$ ___	_____ $\div (-3) =$ _____	_____
$(-8) \times 4 =$ _____	_____	_____
$5 \times (-9) =$ _____	_____	_____
$(-10) \times (-5) =$	_____	_____

مندرجہ بالا سے ہم دیکھتے ہیں کہ:

$(-12) \div 2 = (-6)$ $\qquad$ $(-20) \div (5) = (-4)$

$(-32) \div 4 = -8$ $\qquad$ $(-45) \div 5 = 9$

ہم دیکھتے ہیں کہ جب ہم ایک منفی عدد صحیح کو مثبت عدد صحیح سے تقسیم دیتے ہیں تو ہم انھیں مکمل اعداد کی صورت میں تقسیم دیتے ہیں، اور اس کے بعد حاصل تقسیم سے پہلے منفی نشان (−) رکھ دیتے ہیں۔ اس طرح ہم ایک منفی عدد صحیح حاصل کرتے ہیں۔

ہم یہ بھی دیکھتے ہیں کہ:

$72 \div (-8) = -9$ اور $50 \div (-10) = -5$

$72 \div (-9) = -8$ $\quad$ $50 \div (-5) = -10$

اس طرح ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ جب ہم ایک مثبت عدد صحیح کو ایک منفی عدد صحیح سے تقسیم دیتے ہیں تو سب سے پہلے ہم انھیں مکمل اعداد کی صورت میں تقسیم دیتے ہیں اور اس کے بعد حاصل تقسیم کے سامنے منفی علامت (–) رکھ دیتے ہیں۔ اس طرح ہمیں ایک منفی عدد صحیح حاصل ہوتا ہے۔

وسیع صورت میں :

$$(+a) \div (+b) = +\frac{a}{b}, (-a) \div (-b) = +\frac{a}{b}, (+a) \div (-b) = -\frac{a}{b}, (-a) \div (a+b) = -\frac{a}{b}$$

خود کیجیے:

(a) $-50 \div 10$ $\quad$ (b) $-56 \div 7$ $\quad$ (c) $85 \div (-5)$

(d) $90 \div (-3)$ $\quad$ (e) $-100 \div 20$

مثال : 3 کسی امتحان میں ہر ایک صحیح جواب کے لیے (6 +) نمبر دیئے جاتے ہیں اور ہر ایک غلط جواب کے لیے (2–) نمبر دیئے جاتے ہیں۔ (i) سنبل نے سبھی سوالوں کے جواب دیئے اور 36 نمبر حاصل کیے جب کہ اس نے 12 جواب صحیح پائے گئے۔ (ii) فرحان نے بھی سبھی سوالوں کے جواب دیئے اور اس نے (12–) نمبر حاصل کیے، جب کہ اس کے 5 جواب صحیح پائے گئے۔ ہر ایک نے کتنے سوالوں کے جواب غلط دیئے؟

حل: (i) ایک صحیح جواب کے لیے دیئے گئے نمبر $6 =$

اس لیے 12 صحیح جوابوں کے لیے دیئے گئے نمبر $72 = 6 \times 12 = 72 = 12 \times 6 =$

سنبل کے ذریعہ حاصل شدہ نمبر $36 =$

غلط جوابوں کے لیے حاصل نمبر $-36 = 72 - 36 = 36 - 72 =$

(2–) نمبر ملتا ہے ایک غلط جواب پر

اس لیے (36–) عدد ملے گا $18 = (-2) \div -36$ غلط جواب پر

$\because$ غلط جوابوں کی تعداد $18 =$

(ii) پانچ صحیح جوابوں کے لیے دیئے گئے نمبر $30 = 5 \times 6 = 5 \times 6 =$

فرحان کے ذریعہ حاصل کیے گئے نمبر $-12 =$

غلط جوابوں کے لیے حاصل نمبر $-42 = 30 - 12 - = -12 - 30 =$

∵ -2 نمبر ملے گا ایک غلط جواب پر

∴ -42 نمبر $-42 \div (-2) = 21$ غلط جواب پر

∴ غلط جوابوں کی تعداد $= 21$

1.11 عمل تقسیم کی خاصیت (Properties of Division Operation)

درج ذیل پر غور کریں:

I- $-6 \div (-2) = 3$ عدد صحیح عدد ہے۔

$6 \div (-2) = -3$ ایک عدد صحیح ہے۔

لیکن $-2 \div (-6) = \frac{-2}{-6}$ ایک عدد صحیح نہیں ہے

مندرجہ بالا مثال سے ظاہر ہے کہ کس دو اعداد صحیح کا حاصل تقسیم ایک عدد صحیح ہو بھی سکتا ہے اور نہیں بھی۔

II- $-4 \div (-12) = \frac{-4}{-12}$ $\qquad -12 \div (-4) = 3$

$\Rightarrow \qquad -12 \div (-4) \neq -4 \div (-12)$

اس لیے تقسیم میں ترتیب تبادلہ کی خاصیت نہیں ہے۔

III- $-4 \div 0 =$ لا یعنی یا غیر متعین ہے۔ $\qquad -5 \div 0$ لا یعنی متعین ہے۔

اس لیے کسی بھی عدد صحیح کو صفر سے تقسیم کرنا لا یعنی ہے، لیکن $0 \div 5 = 0; 0 \div (-4) = 0$

اس لیے صفر میں کسی بھی عدد صحیح (صفر کو چھوڑ کر) سے تقسیم کرنے پر حاصل تقسیم صفر ہوتا ہے۔

اسے ایک مثال کے ذریعہ سمجھا جا سکتا ہے۔ جیسے: $0 \div 4 = ?$

ہم جانتے ہیں کہ $\quad 0 \div 4 = \frac{0}{4} = \frac{1-1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

IV- مندرجہ ذیل کو سمجھیں:

$+5 \div 1 = 5 \qquad -10 \div 1 = -10$

یہ ظاہر کرتا ہے کہ کسی بھی عدد صحیح میں اسے تقسیم دینے پر وہی عدد صحیح حاصل ہوتا ہے۔

کیا (-1) سے تقسیم دینے پر بھی وہی عدد صحیح حاصل ہوگا۔

مانا کہ عدد صحیح a ہے تو $a \div 1 = a$

V- $4 \div (-1) = -4 \qquad (-4) \div (-1) = 4$

اس لیے کسی بھی عدد صحیح میں (1–) سے تقسیم دینے پر وہی عدد صحیح حاصل نہیں ہوتا ہے۔

V– کیا ہم کہہ سکتے ہیں $[(-8)\div(-4)]\div(-2)$ اور $(-8)\div[(-4)\div(-2)]$ برابر ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ $[(-8\div(-4)]\div(-2)=2\div-=-1$

اور $(-8)\div[(-4)\div(-2)]\backslash(-8)\div 2=-4$

اس لیے $[(-8)\div(-4)]\div(-2)\neq(-8)\div[(-4)\div(-2)]$

کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ اعداد صحیح کے لیے تقسیم معاونت ہے یا نہیں۔

اپنی جانب سے پانچ دیگر مثالوں کو لے کر اس کی جانچ کیجیے۔

خود کیجیے :

کیا تقسیم میں مربوط، شناختی، ترتیب تبادلہ اور معاونت کے اصول لاگو ہیں؟ ایک ایک مثال دے کر سمجھائیں۔

سوالات

1– حل کیجیے :

(i) $(-40)\div 5$ (ii) $(-450)\div 3$ (iii) $(-45)\div(-5)$

(iv) $(-56)\div(-4)$ (v) $25\div 5$ (vi) $(-128)\div(-16)$

(vii) $0\div 50$ (viii) $0\div 50$ (ix) $(-80)\div(-80)$

2– مندرجہ ذیل ضرب کے عمل کو تقسیم کے دو عملوں میں بدلئے :

(i) $5\times 4=40$ (ii) $-4\times -6=24$

(iii) $-12\times 9=-108$ (iv) $-4\times -12=48$

(v) $-10\times 8=-80$

3– خالی جگہوں کو مناسب عدد صحیح سے پُر کیجیے :

(i) $\square\div(-8)=(-12)$ (ii) $\square\div 8=(-9)$

(iii) $24\div\square=-4$ (iv) $-80\div\square=10$

(v) $-48\div 6=\square$

-4 مندرجہ ذیل میں کون صحیح اور کون غلط ہیں۔ حل کیجیے اور بتایئے :

(i) $-4\div2=2\div(-4)$ (ii) $(-2\div4)\div6=-2\div(4\div6)$

(iii) $-25\div0=0$ (iv) $0\div5=0$

(v) $-125\div1=-125$ (vi) $-45\div(-45)=1$

-5 دوپہر 12 بجے درجۂ حرارت صفر سے $10°c$ اوپر تھا۔ اگر یہ آدھی رات تک $20°c$ فی گھنٹہ کی شرح سے کم ہوتا ہے تو کس وقت درجۂ حرارت صفر سے $8°c$ نیچے ہوگا؟ رات کے 12 بجے درجۂ حرارت کیا ہوگا؟

-6 ایک مین دوزلفٹ کسی کان کے غار میں (گہرائی میں) 6m فی منٹ کی شرح سے نیچے جاتا ہے۔ اگر نیچے جانا زمین کی سطح سے 10m اوپر سے شروع ہوتا ہے، تو 350m- پہنچنے میں کتنا وقت لگے گا۔

1.12 مختلف علامتیں شامل عبارتوں کو سہل کرنا

حل کے طریقے :

- سب سے پہلے ''کا'' کو حل کرتے ہیں۔
- اس کے بعد ÷ پھر × کے عمل کو کرتے ہیں۔
- + اور - کے عمل میں پہلے مثبت عدد کو ایک ساتھ اور منفی عدد کو ایک ساتھ جوڑ کر گھٹا دیتے ہیں اور نشان بڑے عدد والا لگا دیتے ہیں (نشان کو چھوڑ کر بڑا عدد)

مثال: 4 $8+20\div25$ کا $\frac{1}{5}\times10-4$

حل: $8+20\div25$ کا $\frac{1}{5}\times10-4$

$=8+20\div5\times10-4$

$=8+4\times10-4$

$=8+40-4$

$=48-4=44$

حل کے طریقے:

- تقسیم کو ضرب میں تبدیل کر کے تقسیم کے بعد آنیوالے عدد (کسر) کو پلٹ دیتے ہیں۔ پھر ضرب کے عمل کو انجام دیتے ہیں۔ ضرب کے عمل میں شمار کنندہ اور نسب نما جس عدد سے پوری طرح تقسیم ہوتا ہو، اس عدد سے تقسیم دے کر اس عدد کے اوپر یا نیچے حاصل تقسیم کو لکھتے ہیں، جیسا کہ مثال سے ظاہر ہوتا ہے۔

مثال: 5 240 کا $\frac{5}{6}$

40

حل: 240 کا $\frac{5}{6}$ = 40 کا 5

مطلب ہے 40 کا 5 بار

یعنی $40\times5=200$

مثال: 6 $350 \div \frac{7}{5}$

$$350 \div \frac{7}{5} = \cancel{350}^{50} \times \frac{5}{\cancel{7}} = 50 \times 5 = 250$$

یاد رکھیں:

کئی ضربی عملیاتوں کے سہل و آسان ترتیب کے لیے انھیں اچھی طرح یاد رکھیں:
پہلے "کا" کر، پیچھے (÷) تقسیم
تب ضرب تب جوڑ۔گھٹاؤ۔

1.13- قوسین کا استعمال (Use of Brackets): آیئے ذیل کی مثالوں پر غور کریں:

مثال: 7 کچھ ٹافیوں کو 5 لڑکے اور 3 لڑکیوں میں برابر اس طرح بانٹنا ہے کہ ہر ایک کو 10 ٹافی ملے تو بتائیں کل کتنی ٹافیاں ہیں؟

حل: اس کا حل دو لڑکوں نے دو مختلف طریقوں سے کیا:

کل ٹافیاں $= 10 \times (5+3)$
$= 10 \times 8$
$= 80$

کل ٹافیاں $= 5 \times 10 + 3 \times 10$
$= 50 + 30$
$= 80$

اس لیے مندرجہ بالا مثالوں سے ظاہر ہوتا ہے کہ مسائل کو حل کرنے میں قوسین Brackets کا استعمال کیا جاتا ہے۔ جس سے مسائل کا حل کرنا آسان ہو جاتا ہے۔ قوسین کی حسب ذیل قسمیں ہیں:

(i) **خطی قوسین (Line Brackets):**

اسے سیدھے خط کے ذریعہ عبارت کے اوپر لگاتے ہیں۔ جس کا حل پہلے کرنا ہوتا ہے۔ جیسے: $(4 \div \overline{2-3}) + 2 - 4 + 3 -$ میں $2-3$ کو پہلے کرنا ہے۔

(ii) **چھوٹا قوسین (Small Brackets) یا Parenthesis:**

اس کا نشان ہے "( )" ہے، جیسے: $2 + 3 \times (4-2)$ اس میں $4-2$ کو پہلے حل کرنا ہے۔

(iii) **درمیانی قوسین (Braces یا Curly Bracket):**

اس کا نشان "{ }" ہے۔

(iv) **بڑی قوسین Square Bracket یا Big Bracket:**

اس کا نشان"[ ]" ہے۔قوسین کو توڑنے یعنی عبارتوں کو سہل کرنے کی ترتیب اس طرح ہے:
خطی قوسین، تب چھوٹا قوسین، پھر درمیانی قوسین اور آخر میں بڑے قوسین کو توڑتے ہیں۔ یعنی قوسین کے اندر کی عبارتوں کو سہل کرتے ہیں۔

مندرجہ ذیل مثال پر غور کریں:

مثال: 8 $(14 \div 7)\times[8+\{3+8-2\}]-(5-2)$

حل: $(14 \div 7)\times[8+\{3+8-2\}]-(5-2)$

$$=\left(14\times\frac{1}{7}\right)\times[8+\{3+6\}]-3$$
$$=2\times[8+9]-3$$
$$=2\times17-3$$
$$=34-3=31$$

مندرجہ بالا مثال کے حل سے ظاہر ہوتا ہے کہ:

(i) سب سے پہلے خطی قوسین کے اندر کی عملیات کو لیتے ہیں۔

(ii) اس کے بعد چھوٹے قوسین کا،

(iii) اس کے بعد درمیانی قوسین کا اور

(iv) آخر میں بڑا قوسین کے اندر کی عملیات کو کرتے ہیں۔

ہمیں قوسین کو توڑتے یا ہٹاتے وقت مندرجہ ذیل اقوال پر دھیان دینا چاہیے۔

(i) اگر کسی قوسین کے ٹھیک پہلے عدد ہے تو اس کا مطلب ہے اس عدد سے قوسین کے اندر کی ہر ایک عدد ضرب کرنا۔

(ii) اگر قوسین کے پہلے منفی (−) علامت ہے تو قوسین کے اندر کے ہر ایک عدد کا نشان بدل جاتا ہے۔ (صرف + اور − نشان)۔[جیسے: $-(8-2)=-8+2$]

(iii) اگر قوسین کے باہر مثبت (+) علامت ہے تو قوسین کے اندر کے ہر ایک عدد کے نشان میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی ہے۔

(iv) قوسین کے باہر اگر کوئی علامت نہ ہو تو ضرب کا نشان (×) سمجھا جاتا ہے۔

(v) اگر ایک ہی قوسین(Brackets) کے اندر کوئی علامت کے ساتھ عدد (فقرہ) ہو تو عملیات میں اس ترتیب (−,+,×,÷, "کا") کی تعمیل کریں۔

اسے آسانی سے یاد رکھنے کے لیے BODMAS کے حروف کی ترتیب ذہن نشیں کرلیں۔ یعنی :

B	$\rightarrow$	Bracket (قوسین)
O	$\rightarrow$	Of (کا)
D	$\rightarrow$	Division (تقسیم)
M	$\rightarrow$	Multiplication (ضرب)
A	$\rightarrow$	Addition (جوڑ)
S	$\rightarrow$	Subtraction (گھٹاؤ/تفریق)

قوسین لگانے کے قاعدے :

(i) اگر قوسین کے باہر منفی (−) علامت رکھتے ہیں تو قوسین کے اندر ڈالے جانے والے ہر ایک عدد (علامت) کا نشان (− اور +) بدل کر رکھتے ہیں۔ جیسے :

$$-12+4-2+5=-(12-4+2-5)$$

(ii) اگر قوسین کے باہر مثبت (+) علامت رکھتے ہیں تو قوسین کے اندر ڈالے جانے والے کسی بھی عدد (علامت) کا نشان تبدیل نہیں ہوتا ہے۔ جیسے :

$$-12+4-2+5=+(-12+4-2+5)$$

مثال: 9 منیش اپنے باپ سے 60 روپے، ماں سے 30 روپے لے کر بازار گیا۔ ان روپیوں میں سے 50 روپے کے اس نے کپڑے خریدے۔ باقی روپے کے پانچویں حصے سے ایک کتاب خریدی۔ اوپر کی تفصیل کو قوسین کی مدد سے ریاضیاتی شکل میں لکھیے اور بتایئے کہ منیش نے کتنے روپے کی کتابیں خریدیں؟

حل: $[(60+30)-50]\div 5$

$=[90-50]\div 5$

$=40\div 5$

$=40\times\frac{1}{5}=8$

اس لیے منیش نے 8 روپے کی کتاب خریدی۔

سوالنامہ

-1 سہل کیجئے:

(i) $20 \text{ کا } \frac{1}{4}$ (ii) $\frac{250}{9} \text{ کا } \frac{3}{50}$ (iii) $2\frac{1}{2} \div \frac{20}{8}$

(iv) $\frac{12}{7} \div \frac{9}{35}$ (v) $\frac{75}{18} \times \frac{60}{36}$ (vi) $20 \text{ کا } \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \div \frac{1}{8} + 10 - 15$

(vii) $20-(8+5)$ (viii) $16 \div (15-8-3)+4$

(ix) $14 \div \{3 \text{ کا } 2-(5-6)\}+9$ (x) $(30-5\times6+2)\div2$

-2 قوسین کا(Brackets) کا استعمال کر کے مندرجہ ذیل سوالوں کو ریاضیاتی شکل دیجئے:

(i) 5 اور 15 کے جمع میں 18 سے تقسیم دینا۔

(ii) 69 میں 4 اور 6 کے حاصل ضرب سے 1 کم کا تقسیم دینا۔

(iii) راہل نے اپنی 24 پنسلوں میں سے 4 کو اپنے پاس رکھ کر باقی کو اپنے 5 دوستوں میں برابر برابر تقسیم کیا۔ ہر ایک دوست کو کتنی پنسلیں ملیں؟

(vi) 25 اور 5 کے جمع سے 1 زاید کا 124 میں تقسیم دینا۔

(v) 2 اور 4 کے حاصل ضرب سے 2 کم کا 9 سے ضرب کر حاصل ضرب میں 6 سے تقسیم دینا۔

-3 سہل کیجئے:

(i) $50+\{15-5+(8-2)\}$ (ii) $8[6+2\{5-4(5-8)\}]$

(iii) $12 \div \overline{6-2}+10$ (iv) $15+[2-3\{2(5-4+1)\}]$

(v) $103-[144\div(12\times12)+5+12\div\overline{6-2}+10]$

(vi) $5[5-\{5-(5-5-5)\}]$

(vii) $15-(-3)(4-4)\div\{5+(-6)\times(-3)\}$

(viii) $(-6)+(-6)\div2-[(-5)\times(-1)-2(4-2)]$

(ix) $25+\left[20-\left\{2-\left(20 \text{ کا } \frac{1}{5}\div\frac{1}{8}\times\frac{1}{16}-8\right)\right\}\right]$

ہم نے سیکھا

1- عدد صحیح اعداد: جب مکمل اعداد کے خاندان میں منفی اعداد شامل ہو جاتے ہیں تو اس عددی خاندان (Family of Numbers) کو اعداد صحیح کہتے ہیں۔ جیسے: ...,5 ,4 ,3 ,2 ,0 ,1 ,... ,2- ,3- ,4-

2- دو مخالف خصوصیتوں کو ظاہر کرنے کے لیے اعداد صحیح کا استعمال کیا جاتا ہے۔ جیسے: اونچائی، گہرائی، نفع، نقصان، ٹھنڈا / گرم وغیرہ۔

3- دو مثبت اعداد صحیح کو جوڑنے پر مثبت عدد حاصل ہوتا ہے اور دو منفی اعداد صحیح کو جوڑنے پر منفی عدد صحیح حاصل ہوتا ہے۔ اگر دو اعداد صحیح مخالف علامت کے ہوتے تو وہ گھٹ جاتے ہیں اور جس کی قیمت بڑی ہوتی ہے اس کی علامت رہ جاتی ہے۔

4- اب ہم نے جوڑ اور گھٹاؤ کے ذریعہ متعلق ہونے والے صفتوں کا مطالعہ کیا ہے۔

(الف) اعداد صحیح جوڑ اور گھٹاؤ دونوں کے لیے مربوط ہیں۔ یعنی $a+b$ اور $a-b$ دونوں عدد صحیح ہوتے ہیں۔ جہاں a اور b کوئی بھی اعداد صحیح ہیں۔

(ب) اعداد صحیح کے لیے جمع کا ترتیب تبادلہ کا اصول لاگو ہے۔ یعنی سبھی اعداد صحیح a اور b کے لیے $(a+b)=(b+a)$ ہوتا ہے۔ لیکن گھٹاؤ کے لیے نہیں ہے $a-b \neq a-b$

(ج) اعداد صحیح کے لیے جمع معاونت ہے۔ یعنی سبھی اعداد صحیح a, b اور c کے لیے $(a+b)+c = a+(b+c)$ ہوتا ہے۔ لیکن گھٹاؤ کے لیے معاونت نہیں ہے۔ یعنی $(a-b)-c \neq a-(b-c)$

(د) جمع کے تحت عدد صحیح صفر شناختی عنصر ہے۔ یعنی کسی بھی عدد صحیح a کے لیے $a+0=0+a=a$ ہوتا ہے۔

ایک مثبت اور ایک منفی عدد صحیح کا حاصل ضرب ایک منفی عدد صحیح ہے۔ جب کہ دو منفی اعداد صحیح کا حاصل ضرب ایک مثبت عدد صحیح ہے۔

مثال: $-2 \times 7 = -14$ اور $-3 \times -8 = 24$ ہے۔

ایک سے زائد منفی اعداد صحیح کو ضرب کرنے کے لیے اگر منفی اعداد صحیح کی تعداد جفت ہونے پر ان کا حاصل ضرب مثبت ہوتا ہے۔ جب کہ یہ تعداد طاق ہونے پر ان کا حاصل ضرب منفی ہوتا ہے۔

7- عدد صحیح ضرب کے تحت کچھ صفتوں کو ظاہر کرتے ہیں۔

(الف) ضربی کے تحت عدد صحیح مربوط ہوتے ہے۔ یعنی کسی دو اعدادِ صحیح a اور b کے لیے $a\times b$ ایک عدد صحیح ہوتا ہے۔

(ب) اعداد صحیح کے لیے ضرب کے عمل میں ترتیب تبادلہ ہوتا ہے۔ یعنی کسی دو اعداد a اور b کے لیے $a\times b=b\times a$ ہوتا ہے۔

(ج) ضرب کے تحت عدد صحیح 1، شناختی عنصر ہوتا ہے۔ یعنی کسی عدد صحیح a کے لیے $1\times a=a\times 1=a$ ہوتا ہے۔

(د) اعداد صحیح کے لیے ضرب معاونت ہوتا ہے۔ یعنی کسی تین اعداد صحیح a,b اور c کے لیے $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ ہوتا ہے۔

-8 اعداد صحیح جوڑ پر تقسیمی صفت کی تعمیل کرتے ہیں۔ یعنی کسی تین اعداد صحیح a,b اور c کے لیے $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ ہوتا ہے۔

-9 جمع اور ضربی کے تحت ترتیب تبادلہ، معاونت اور جوڑ پر تقسیمی اصول کے خواص ہمارے غور وفکر کو سہل بناتے ہیں۔

(الف) کسی دو اعداد صحیح کا حاصل تقسیم ایک عدد صحیح ہو بھی سکتا ہے اور نہیں بھی ہو سکتا ہے۔

(ب) جب ایک مثبت عدد صحیح کو مثبت عدد صحیح سے تقسیم دیا جاتا ہے تو حاصل تقسیم مثبت ہوتا ہے۔

(ج) جب ایک مثبت عدد صحیح کو ایک منفی عدد صحیح سے تقسیم دیا جاتا ہے یا جب ایک منفی عدد صحیح کو ایک مثبت عدد صحیح سے تقسیم دیا جاتا ہے تو حاصل تقسیم ایک منفی عدد صحیح ہوتا ہے۔

(د) ایک منفی عدد صحیح کو دوسرے منفی عدد صحیح سے تقسیم دینے پر حاصل تقسیم ایک مثبت عدد صحیح ہوتا ہے۔

-11 (الف) تقسیم میں ترتیب تبادلہ خاصیت نہیں ہوتا ہے۔

(ب) صفر میں کسی بھی عدد صحیح (صفر کو چھوڑ کر) سے تقسیم دینے پر حاصل تقسیم صفر ہوتا ہے اور کسی بھی عدد صحیح کو صفر سے تقسیم دینا بے معنی اور بے تعریف ہے۔

(ج) کسی بھی عدد صحیح میں اسے تقسیم دینے پر وہی عدد صحیح حاصل ہوتا ہے۔ جیسے $5\div 1=5$ $4\div 1=4$ یعنی $a\div 1=a$ جہاں a کوئی ایک عدد صحیح۔

(د) کسی بھی عدد صحیح میں (-1) سے تقسیم کرنے پر وہی عدد صحیح حاصل نہیں ہوتا ہے۔

(ہ) عدد صحیح تقسیم کے لیے معاونت خاصیت کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔

باب-2

کسر (Fraction)

2.1 - تمہید:

پچھلی جماعتوں میں آپ کسر اور اُس کے جوڑ وگھٹاؤ (تفریق) کا مطالعہ کر چکے ہیں۔آپ نے کسروں کا موازنہ مساوی کسر، کسروں کو خط عددی پر ظاہر کرنا اور کسروں کو سلسلہ وار کرنے وغیرہ کے بارے میں مطالعہ کیا ہے۔ اس باب میں ہم اس سے آگے کسروں کے ضرب اور تقسیم کے بارے میں مطالعہ کریں گے۔

2.2 - اعادہ کرنا:

ہم نے پچھلی جماعتوں میں پڑھا ہے کہ کسر وہ عدد ہے، جسے $\frac{a}{b}$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ جہاں a اور b مکمل اعداد ہیں اور $b \neq o$, کیا $1\frac{2}{3}$ ایک کسر ہے؟ کسر خاص وہ کسر ہوتا ہے۔ جو پورے کے ایک حصہ کو ظاہر کرتا ہے۔کیا $\frac{5}{3}$ ایک کسر خاص Proper Fraction ہے؟ اس کے شمار کنندہ اور نسب نما میں کون بڑا ہے؟

کسر عام میں مکمل اور مکمل کے ایک حصہ (خاص کسر) کا جوڑ ہوتا ہے۔ کیا $\frac{5}{3}$ ایک کسر عام ہے؟ یہاں شمار کنندہ یا نسب نما میں کون بڑا ہے؟ کسر عام $\frac{5}{3}$ کو $1\frac{2}{3}$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ یہ ایک مرکب کسر (Compound Fraction) ہے۔آپ عام کسر اور مرکب کسر کے پانچ پانچ مثال لکھئے۔ کیا $\frac{4}{7}$ اور $\frac{8}{14}$ مساوی کسر ہیں۔ دو کسر مساوی کسر کہلاتے ہیں۔ اگر وہ یکساں مقدار ظاہر کرتے ہیں۔

$\frac{8}{14}$ اور $\frac{4}{7}$ میں سے کسر کا اقل ترین (سہل) شکل کون ہے؟ جس کسر کے نسب نما اور شمار کنندہ

میں ایک کے علاوہ کوئی دوسرا عدد مشترک جز ضربی نہ ہو وہ کسر کا سہل شکل Lowest Form ہوتا ہے۔

مثال 1: $\frac{4}{5}$ اور $\frac{6}{7}$ میں کون بڑا ہے؟

حل: 7 اور 5 کا مشترک ذو اضاف (L.C.M.) = 35

اس لیے $\frac{4}{5}=\frac{4\times7}{5\times7}=\frac{28}{35}$ اور $\frac{4}{5}=\frac{4\times7}{5\times7}=\frac{28}{35}$

چونکہ $\frac{30}{35}>\frac{28}{35}$ اس لیے $\frac{6}{7}>\frac{4}{5}$

مثال 2: مٹھو نے $4\frac{1}{2}$ کیلوگرام آم اور $2\frac{3}{4}$ کیلوگرام لیچی خریدی۔ مٹھو کے ذریعہ خریدے گئے پھلوں کا کل وزن کتنا ہے؟

حل: پھلوں کا کل وزن $=4\frac{1}{2}$ کیلوگرام + $2\frac{3}{4}$ کیلوگرام

$=\left(\frac{9}{2}+\frac{11}{4}\right)$ کیلوگرام

$=\left(\frac{18}{4}+\frac{11}{4}\right)$ کیلوگرام مساوی کسر $\left(\frac{9}{2}=\frac{18}{4}\right)$

$=\frac{29}{4}$ کیلوگرام $=7\frac{1}{4}$ کیلوگرام

مثال 3: روہت روزانہ $3\frac{2}{3}$ گھنٹے کھیلتا ہے۔ وہ اپنے اس وقت میں سے $1\frac{4}{5}$ گھنٹے موہت کے ساتھ کھیلتا ہے تو دوسرے دوستوں کے ساتھ وہ کتنے وقت کھیلتا ہے۔

حل: روہت کے کھیلنے کا کل وقت $3\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$ گھنٹے

روہت کا موہت کے ساتھ کھیلنے میں لگا وقت $=1\frac{1}{4}=\frac{9}{5}$ گھنٹے

اس لیے روہت کا دوسرے ساتھیوں کے ساتھ لگا وقت $=\left(\frac{11}{3}+\frac{9}{5}\right)$ گھنٹے

$$= \left(\frac{55}{15}+\frac{27}{15}\right) \text{گھنٹے} \qquad \left(\frac{11}{3}+\frac{55}{15} \quad \text{اور} \quad \frac{9}{5}+\frac{27}{15}\right)$$

$$= \frac{28}{15} \text{ گھنٹے} = 1\frac{13}{15} \text{ گھنٹے}$$

سوالنامہ

-1 ذیل کے چار چار مساوی کسر لکھئے :

(i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{6}{7}$ (iii) $\frac{3}{17}$

-2 نیچے دیئے گئے کسر عدد کے جوڑوں کا موازنہ کیجیے اور بتایئے کہ دونوں میں سے کون سا کسری عدد چھوٹا ہے؟

(i) $\frac{3}{5}$ اور $\frac{4}{3}$ (ii) $\frac{6}{7}$ اور $\frac{7}{6}$

(iii) $\frac{21}{5}$ اور $\frac{18}{4}$ (iv) $\frac{7}{15}$ اور $\frac{9}{20}$

-3 حل کیجئے :

(i) $\frac{2}{5}+0$ (ii) $4+\frac{7}{8}$

(iii) $\frac{3}{2}+\frac{2}{7}$ (iv) $\frac{5}{9}+\frac{4}{7}$

(v) $\frac{4}{5}+\frac{9}{15}$ (vi) $\frac{2}{15}-\frac{1}{20}$

(vii) $\frac{9}{11}-\frac{4}{15}$ (viii) $7\frac{1}{2}-4\frac{1}{5}$

(ix) $4\frac{1}{2}-1\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$ (x) $2\frac{1}{5}+1\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$

4- ایک جادوئی مربع میں ہر ایک قطار ہر ایک کالم اور ہر ایک وتر کی اعداد (Diagonal) کا جمع برابر ہوتا ہے۔ کیا یہ ایک جادوئی مربع ہے۔

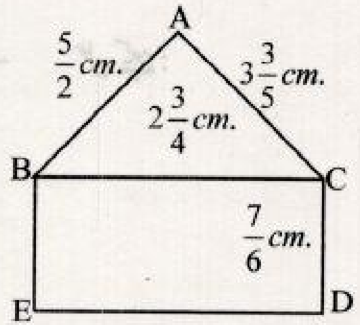
$\frac{4}{13}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{2}{13}$
$\frac{3}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{7}{13}$
$\frac{8}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{6}{13}$

پہلی قطار کے مطابق $\frac{4}{13}+\frac{9}{13}+\frac{2}{13}=\frac{15}{13}$

5- مندرجہ ذیل کسر اعداد کو بڑھتی ہوئی ترتیب میں لکھئے :

(i) $\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{3}{7},\frac{2}{5},\frac{3}{5}$

6- ایک مستطیل نما (Rectangular) تختۂ سیاہ(Black Board) کی لمبائی $3\frac{1}{2}$ میٹر اور چوڑائی $2\frac{2}{3}$ میٹر ہے۔ تختۂ سیاہ کا احاطہ(Perimetre) معلوم کیجیے۔



7- تصویر میں دی ہوئی شکل میں $\triangle ABC$ اور مستطیل $BCDE$ کا احاطہ(Perimetre) معلوم کیجیے۔ ساتھ ہی بتایئے کہ کس کا احاطہ زیادہ ہے؟

8- ستیم نے ایک سبق کو پڑھنے میں $\frac{11}{16}$ گھنٹے کا وقت لیا، سلیم نے اُسی سبق کو پڑھنے میں $\frac{3}{4}$ گھنٹے کا وقت لیا۔ کس نے زیادہ وقت لیا؟ یہ وقت کتنا زیادہ تھا؟

9- خالی جگہوں میں صحیح عدد بھریے :

(i) $\frac{5}{7}+\frac{\square}{7}=\frac{6}{7}$ (ii) $\frac{8}{15}-\frac{2}{15}=\frac{\square}{\square}$ (iii) $\frac{7}{9}+\frac{\square}{\square}=\frac{7}{9}$

(iv) $\frac{3}{5}-\frac{\square}{5}=\frac{1}{5}$ (v) $1-\frac{1}{2}=\frac{\square}{\square}$

2.3 - کسروں کا ضرب:

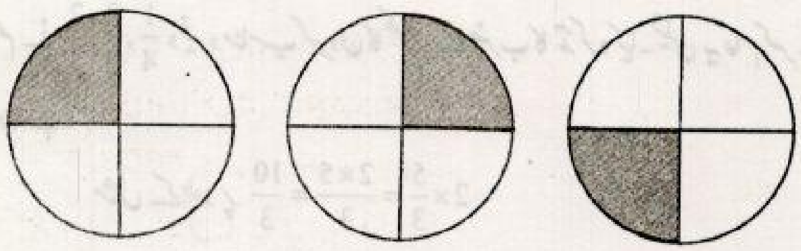
ہم جانتے ہیں کہ اگر کسی مستطیل کی لمبائی و چوڑائی بالترتیب (سلسلہ وار) 9 سینٹی میٹر اور 5 سینٹی میٹر ہے تو اس کا رقبہ 9 سینٹی میٹر × 5 سینٹی میٹر = 45 سینٹی میٹر ہوگا۔

اب اگر مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی بالترتیب $9\frac{1}{2}$ سینٹی میٹر × $5\frac{1}{2}$ سینٹی میٹر ہے تو اس کا رقبہ کیا ہوگا؟ آپ کہیں گے کہ یہ $9\frac{1}{2}$ سینٹی میٹر × $5\frac{1}{2}$ سینٹی میٹر = $\left(\frac{19}{2}\times\frac{11}{2}\right)$ سینٹی میٹر ہے۔

$\frac{19}{2}\times\frac{11}{2}$ کسروں کا ضرب ہے۔ آیئے کسروں کا ضرب کیسے ہوتا ہے؟ دیکھئے:

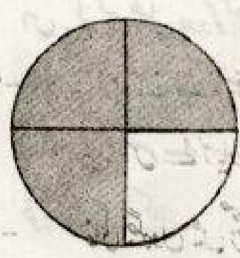
2.3.1: مکمل عدد اور کسر کا ضرب

خاکہ 2.1 کو دیکھئے۔ ہر ایک سایہ دار(Shaded) حصہ، دائرہ کا $\frac{1}{4}$ حصہ ہے۔



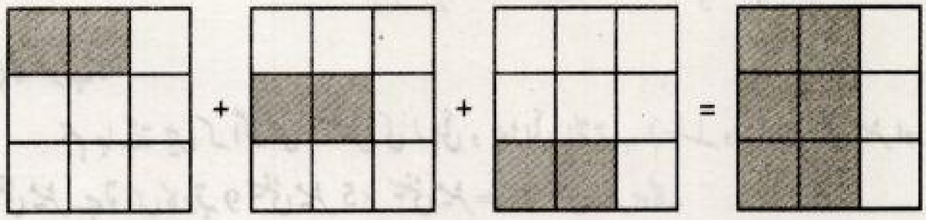
خاکہ: 2.1

اس طرح تین سایہ دار حصہ مل کر دائرے $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}=3\times\frac{1}{4}$ کو ظاہر کریں گے۔ ان تین سایہ دار حصوں کو ملانے پر ہمیں شکل 2.2 حاصل ہوتی ہے جو دائرہ کے $\frac{3}{4}$ حصہ کو ظاہر کرتا ہے۔ یعنی $3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$



خاکہ: 2.2

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ خاکہ 2.3 کسے ظاہر کرے گی؟



خاکہ : 2.3

یہاں ہر ایک میں سایہ دار حصہ $\frac{2}{9}$ ہے۔ آیئے اب ہم $3\times\frac{2}{9}$ معلوم کرتے ہیں۔

$$3\times\frac{2}{9}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{2+2+2}{9}=\frac{3\times2}{9}=\frac{6}{9}$$

اسی طرح $5\times\frac{2}{3}=\frac{5\times2}{3}=\frac{10}{3}$

کیا آپ بتا سکتے ہیں؟ (i) $5\times\frac{1}{5}=?$ (ii) $4\times\frac{2}{7}=?$

اوپر ہم نے $\frac{2}{3},\frac{2}{9},\frac{1}{4}$ وغیرہ مناسب کسروں کا مکمل سے ضرب کا تذکرہ کیا۔ لیکن یہ عام کسر کے لیے بھی لاگو ہوتا ہے۔

مثال کے طور پر $2\times\frac{5}{3}=\frac{2\times5}{3}=\frac{10}{3}$

کوشش کیجیے: (i) $4\times\frac{12}{7}=?$ (ii) $3\times\frac{8}{5}=?$

اس لیے کسی مکمل عدد کو کسی کسر خاص یا کسر عام سے ضرب کرنے کے لیے ہم

(i) مکمل عدد کو کسر کے شمار کنندہ کے ساتھ ضرب کرتے ہیں اور

(ii) کسر کے نسب نما کو غیر تبدیل یا برابر (Same) رکھتے ہیں۔

خود کر کے دیکھئے:

(i) $3\times\frac{1}{3}=\frac{3}{3}$ کو مع تصویر ظاہر کیجیے۔

معلوم کیجیے:

(i) $3\times\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{3}{7}\times 4$ (iii) $\frac{13}{9}\times 7$ (iv) $\frac{16}{7}\times 3$

توجہ دیجیے کہ کس مرکب کسر کو ایک مکمل عدد سے ضرب کرنے کے لیے سب سے پہلے مرکب کسر کو کسر عام میں تبدیل کیجیے اور تب ضرب کیجیے:

جیسے: $5\times 2\frac{3}{7}=5\frac{17}{7}=\frac{85}{7}=12\frac{1}{7}$

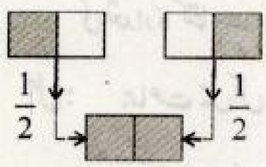
کوشش کیجیے: (i) $3\times 2\frac{5}{7}=?$ (ii) $2\times 4\frac{2}{5}=?$

کسر، آپریٹر (Operator) "کا" کی شکل میں

غور کیجیے:

(i) 2 کا نصف (ii) 3 کا نصف

خاکہ 2.4 میں ہر ایک سایہ دار ٹکڑا 1 کے $\frac{1}{2}$ (نصف) کو ظاہر کرتا ہے۔

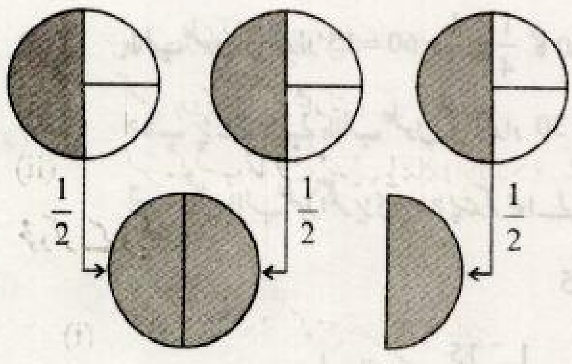


خاکہ: 2.4

اب 2 سایہ دار نصف حصے کو ملانے پر دونوں سایہ دار ٹکڑے مل کر 2 کے $\frac{1}{2}$ کو ظاہر کرتے ہیں۔

اس لیے 2 کا $1=2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

اب خاکہ 2.5 میں تین سایہ دار ٹکڑے مل کر 3 کے $\frac{1}{2}$ نصف حصہ کو ظاہر کرتے ہیں۔



خاکہ: 2.4

اور انھیں ملانے پر $1\frac{1}{2}$ یعنی $\frac{3}{2}$ کو ظاہر کرتا ہے۔

اس لیے 3 کا $\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ اسی لیے $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ ''کا'' ضرب کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال: 4 شوبھم کے پاس 30 روپیہ ہے، شکیلہ کے پاس 30 کا $\frac{1}{5}$ ہے تو شکیلہ کے پاس کتنے روپے ہیں؟

حل: شوبھم کے پاس 30 روپیہ ہے، شکیلہ کے پاس 30 کا $\frac{1}{5}$ ہے۔ یعنی $30 \times \frac{1}{5} = 6$ روپیہ۔

کوشش کیجیے: (i) 16 کا $\frac{1}{2} = ?$ (ii) 25 کا $\frac{2}{5} = ?$

مثال: 5 60 طالب علموں کی ایک جماعت میں کل طالب علموں کی تعداد کا $\frac{1}{4}$ انگریزی پڑھنا پسند کرتے ہیں۔ کل تعداد کا $\frac{1}{2}$ حساب پڑھنا پسند کرتے ہیں اور باقی طالب علم سائنس پڑھنا پسند کرتے ہیں تو بتایئے کتنے طالب علم انگریزی پڑھنا پسند کرتے ہیں؟ کتنے طالب علم حساب پڑھنا پسند کرتے ہیں؟ کل طالب علموں کی تعداد کا کتنا حصہ سائنس پڑھنا پسند کرتے ہیں؟

حل: جماعت میں کل طالب علموں کی تعداد $= 60$

ان میں سے کل کا $\frac{1}{4}$ انگریزی پڑھنا پسند کرتے ہیں۔ اس لیے انگریزی پڑھنا پسند کرنے والے

طالب علموں کی تعداد $= 60$ کا $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 60 = 15$

حساب پڑھنے والے طالب علموں کی تعداد $= 60$ کا $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 60 = 30$ سائنس پڑھنے والوں کی

تعداد = کل طالب علم (انگریزی پڑھنا پسند کرنیوالے طالب علم + حساب پڑھنا پسند کرنیوالے طالب علم)

$= 60 - (15 + 30) + 60 - 45 = 15$

اس لیے مطلوبہ کسر $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ ہے۔

(vii) وسطانیہ آنکڑوں میں سے ہمیشہ ایک آنکڑہ ہوتا ہے۔

(viii) آنکڑے 5 ,3 ,4 کا اوسط 4 ہے۔

4.8 - گراف(Graph)

اب ہم آنکڑوں کے گرافیکل پیش کش کی جانب اپنا دھیان مرکوز کریں گے۔ گراف جمع کیے گئے آنکڑوں کا تصویروں کے ذریعہ مظاہرہ ہے۔ گراف کے ذریعہ پیش کش کو سمجھنے میں بہت آسانی ہوتی ہے۔ ہم نے پچھلی جماعتوں میں بھی مختلف طرح کے گرافوں کے بارے میں کچھ تذکرہ کیا تھا۔

جدول : 4.6

0 = 500 پنسل کی بکری

جنوری	0 0
فروری	0 0 0
مارچ	0
اپریل	0 0 0 0 0
مئی	0 0 0

1- تصویری علامت(Pictograph)

علامتوں کا استعمال کرتے ہوئے آنکڑوں کی تصویری پیشکش :

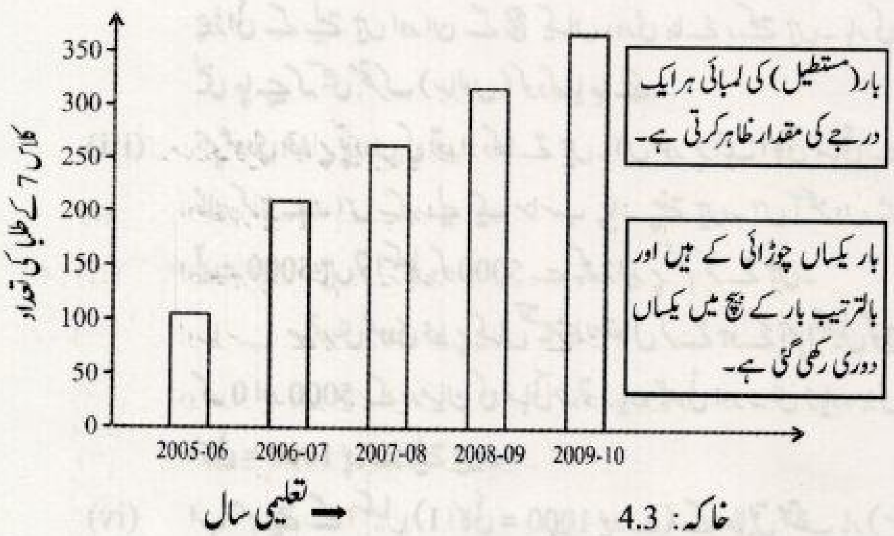
(i) مارچ کے مہینے میں کتنی پنسل کی بکری ہوئی تھی؟

(ii) کس مہینے میں پنسل کی فروخت زیادہ ہوئی تھی؟

(iii) کن کن مہینوں میں پنسل کی بکری برابر ہوئی؟

2- ایک بارگراف(Bar Graph)

ہم جانتے ہیں کہ بارگراف یکساں چوڑائی کے باروں کے ذریعہ آنکڑوں کا مظاہرہ (پیشکش) ہے۔ جس میں باروں کی اونچائی بالترتیب ان کی قیمتوں کے تناسب میں ہوتی ہے۔



خاکہ : 4.3

درج ذیل سوالوں کے جواب دیجیے :

(i) اس بار گراف کے ذریعہ خبر دی گئی ہے؟

(ii) کس سال طلبا کی تعداد بہت زیادہ ہے؟

(iii) کس سال میں طلبا کی تعداد میں زیادہ اضافہ ہوا؟

(iv) کس سال طلبا کی تعداد سب سے کم ہے؟

4.8.1- بار گراف بنانا (Construction of Bar Graph)

آیئے اب ہم ایک مثال لے کر دیکھیں کہ ایک بار گراف کاغذ پر کس طرح بنایا جاتا ہے؟

مثال: 11 ایک باغ میں مختلف سالوں میں لگائے گئے پودوں کی تعداد حسب ذیل ہے :

سال	2006	2007	2008	2009
پودوں کی تعداد	3000	2000	4,000	5000

ان اعداد سے بار گراف بنایئے :

حل: ہم ان اعداد کا بار گراف مندرجہ ذیل مرحلوں میں بناتے ہیں۔

(i) ایک گراف کاغذ پر ہم دو باہم عمودی خط کھینچتے ہیں۔ جن میں ایک پڑی اور دوسری کھڑی ہو۔

(ii) ہم اُفقی خط پر سالوں (متحرک) کو دکھاتے ہیں۔ صاف ظاہر کرنے کے لیے ہم سبھی بار یکساں چوڑائی کے لیتے ہیں اور ان کے بیچ یکساں دوری بنائے رکھتے ہیں۔ بار کی چوڑائی اس طرح لینی چاہیے کہ سبھی متحرک (سالوں) کو دکھایا جا سکے۔

(iii) ہم عمودی خط پر پودوں کی تعداد دکھاتے ہیں۔ اس طور پر ایک اکائی لمبائی سے کتنے مشاہدوں کو ظاہر کرنا ہے۔ اس کے لیے ایک مناسب پیمانہ چنتے ہیں۔ اس آنکڑوں میں سب سے بڑی قیمت 5000 ہیں تو اسکیل کو 5000 سے کچھ زاید پر ختم کرتے ہیں۔

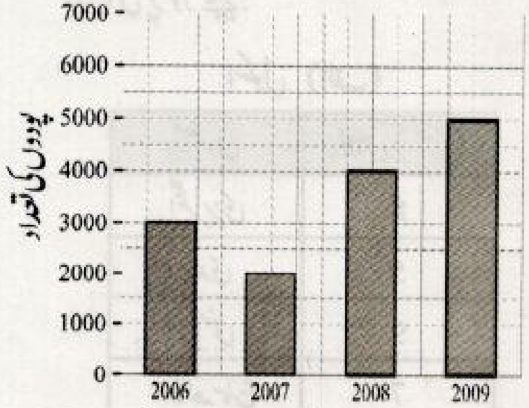
ساتھ ہی عمودی خط پر یکساں تقسیم کا استعمال کرتے ہوئے ہم اسکیل کو اس طرح چنیں گے کہ 0 اور 5000 کے درمیان کی لمبائی نہ تو زیادہ چھوٹی اور نہ ہی زیادہ بڑی ہو۔ یہاں ہم 1 اکائی = 1000 پودے لیتے ہیں۔

(iv) اب ہم چنے گئے اسکیل (1 اکائی = 1000 پودے) کے مطابق مختلف بار (ستون) کی اونچائی

معلوم کرتے ہیں۔

اس طرح گراف کاغذ پر یکساں چوڑائی کے 4 بار(Bar) حسب ذیل طریقے سے بنتے ہیں :

سال	گراف کی اونچائی
2006	$\frac{1}{1000} \times 3000 = 3$ اکائی
2007	$\frac{1}{1000} \times 2000 = 2$ اکائی
2008	$\frac{1}{1000} \times 4000 = 4$ اکائی
2009	$\frac{1}{1000} \times 5000 = 5$ اکائی

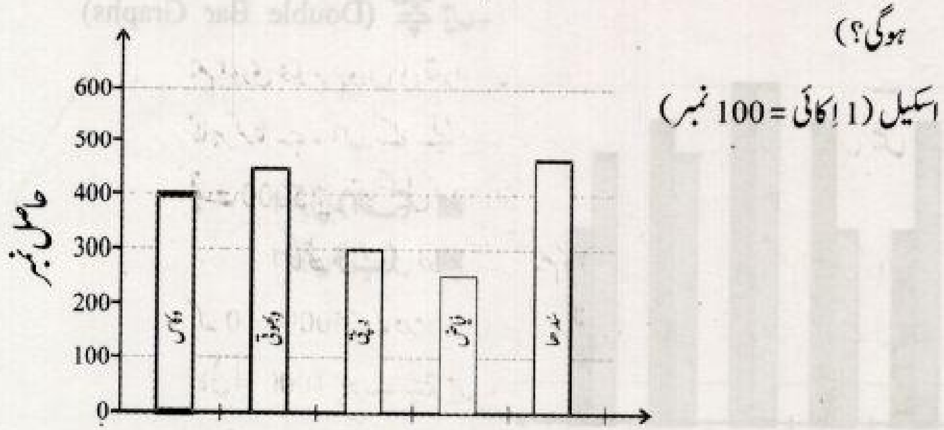


خاکہ: 4.4

مثال:12 مندرجہ ذیل آنکڑے ایک جماعت کے پانچ طلبا کے ذریعہ (500 میں سے) حاصل کیے گئے نمبروں کو دکھاتے ہیں۔ انھیں ایک بار گراف کے ذریعہ ظاہر کیجیے۔

طلباء	وکاس	وبھوتی	دیپتی	فیاض	سُدھا
حاصل شدہ نمبر	400	450	300	250	460

حل: ہم 1 اِکائی = 100 عدد لیتے ہیں۔ (اگر ہم 1 اِکائی سے 10 عدد کو ظاہر کریں، تو کیا پریشانی ہوگی؟)



خاکہ: 4.5

4.8.2 - دوہرے بار گراف کھینچنا

نیچے دو اسکولوں میں مختلف مضامین کے دیئے جانے والے کلاسوں (گھنٹیوں) کے آنکڑے دیئے گئے ہیں۔ اس پر غور کیجیے :

اسکول (الف)

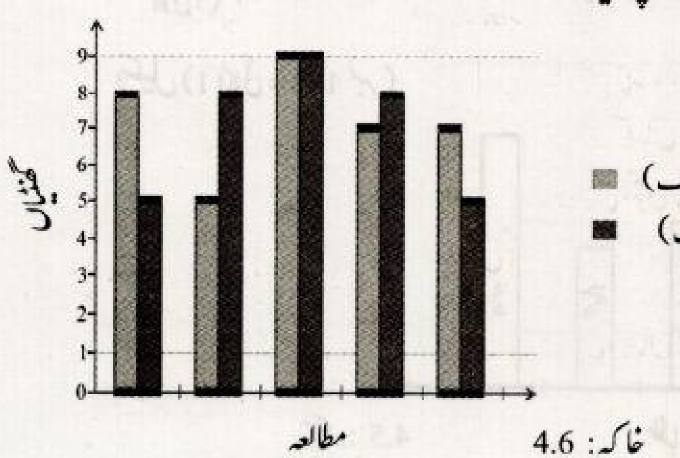
مضمون	کلاس (گھنٹی)
انگریزی	8
ہندی	5
ریاضی	9
مطالعہ سماج	7
سائنس	7

اسکول (ب)

مضمون	کلاس (گھنٹی)
انگریزی	5
ہندی	8
ریاضی	9
مطالعہ سماج	8
سائنس	5

ان کے الگ الگ بار گراف کھینچ کر ہم کئی معلومات فراہم کر سکتے ہیں۔ جیسے دونوں اسکولوں میں سب سے زیادہ کلاس کس مضمون کو دیئے جاتے ہیں۔ یا ہر اسکول میں کس مضمون کو سب سے کم کلاس دیئے جاتے ہیں وغیرہ۔ لیکن ایک خاص مضمون میں کس اسکول میں کلاس زیادہ ہوئے ہیں، جیسے سوالوں کا جواب دینے کے لیے ہم دوہرا بار گراف کھینچیں گے۔

یعنی جب ہمیں آنکڑوں کے دو گروپ کا موازنہ کرنے کی ضرورت ہوتی ہے تو دوہرے بار گراف (Double Bar Graphs) کھینچتے ہیں۔



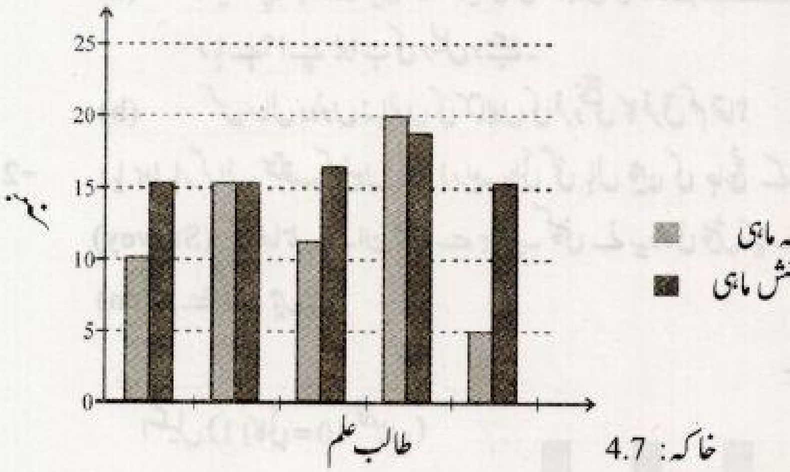
خاکہ: 4.6

مثال: 13 حساب کی استانی نے 5 کمزور بچوں کے ذریعہ سہ ماہی امتحان اور ششش ماہی امتحان میں 25 میں سے حاصل کیے گئے نمبرات کو حسب ذیل صورت میں دکھایا ہے :

طلباء	اشوک	ارون	زاہد	وبھا	ریتا
سہ ماہی	10	15	12	20	5
ششش ماہی	15	15	16	18	15

ان آنکڑوں سے دوہرے بار گراف کھینچیے۔

حل:



خاکہ: 4.7

بار کو دیکھ کر اب آپ درج ذیل سوالوں کا جواب دیجیے :

(i) کس طلبہ کی کارکردگی سہ ماہی کے مقابلے میں چھ ماہی میں سب سے اچھی رہی؟

(ii) کس طلبہ کا پروگریس سہ ماہی اور چھ ماہی میں یکساں رہی؟

(iii) کس طلبہ نے سہ ماہی کے بدلے چھ ماہی میں اچھی کارکردگی نہیں دکھائی؟

(iv) کتنے طلبہ نے چھ ماہی امتحان میں 15 سے زیادہ نمبر حاصل کیے؟

کیا آپ کچھ دوسری حالتوں کے بارے میں بتا سکتے ہیں، جہاں آپ دوہرے بار گراف کا استعمال کر سکتے ہیں؟

خود کر کے دیکھئے:

-1 سال 2006 سے 2010 میں انگریزی اور ہندی کی کتابوں کی فروخت نیچے دی گئی ہے۔

سال	2006	2007	2008	2009	2010
انگریزی	250	300	350	520	620
ہندی	400	425	500	550	600

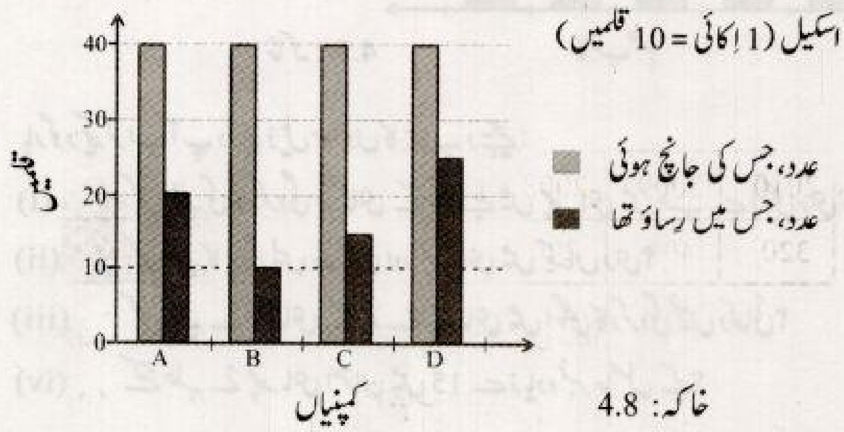
ایک دوہرا بار گراف کھینچیے اور مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دیجیے:

(a) کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ انگریزی کی کتابوں کی مانگ (Demands) میں تیزی سے اضافہ ہو رہا ہے؟ اپنے جواب کی دلیل دیجیے۔

(b) کس سال دونوں زبانوں کی کتابوں کی فروختگی کا فرق کم تھا؟

-2 دیا ہوا بار گراف مختلف کمپنیوں کے ذریعہ بنائی گئی بال پین کی جانچ کے لیے کیے گئے ایک جائزے (Survey) کو دکھاتا ہے۔ ان میں سے ہر ایک کمپنی نے یہ دعویٰ پیش کیا ہے کہ ان کے بال پین (Ball-Pen) رستے نہیں ہیں۔

اسکیل (1 اکائی = 10 قلمیں)



خاکہ: 4.8

(a) ہر ایک کمپنی کے لیے رساؤ والے قلم کی تعداد، کل قلم کی تعداد کا کون سا حصہ تھا؟

(b) کس کمپنی کے قلم بہتر ہیں؟

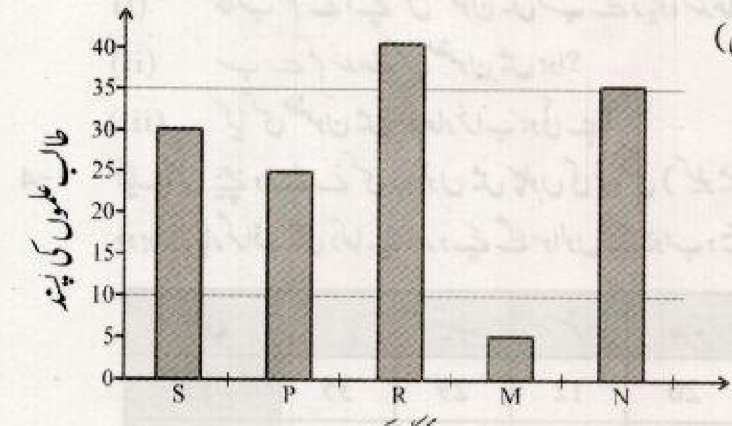
سوالنامہ : 4.3

-1 خاکہ: 4.9 میں دیئے بارگراف کا استعمال کر کے مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دیجئے:

(a) کس کمپنی کی سائیکل زیادہ لوگوں کی پسند ہیں؟

(b) کتنے طلبا کی پسند "P" کمپنی کی سائیکل ہے؟

(c) کس کمپنی کی سائیکل سب سے کم لوگوں کی پسند ہے؟



خاکہ: 4.9

-2 درج ذیل جدول میں ایک اسکول کے 2006 سے 2010 تک ہر سال سالانہ کھیلوں میں حصہ لینے والے کھلاڑیوں کی تعداد دی گئی ہے۔ ان اعداد کو ایک بارگراف کے ذریعہ ظاہر کیجیے:

سال	2006	2007	2008	2009	2010
کھلاڑیوں کی تعداد	160	280	200	400	320

(a) بارگراف بنانے کے لیے آپ کیا پیمانہ لیں گے؟

(b) مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دیجیے:

(i) کس سال میں کھلاڑیوں کی تعداد زیادہ ہے اور کس سال میں کم ہے؟

(ii) سال 2006 کے کھلاڑیوں کی تعداد کا سال 2010 کے کھلاڑیوں کی تعداد کا تناسب معلوم کیجیے۔

2- ایک طالب علم کے پہلے سال اور دوسرے سال کی کارکردگی دی گئی ہے (100 میں سے) ان اعداد کا ایک دوہرا بار گراف کھینچیے اور دیئے گئے سوالوں کا جواب دیجئے:

مضمون	ہندی	انگریزی	حساب	سماج سائنس	سائنس
پہلا سال	60	70	80	84	76
دوسرا سال	80	65	95	85	80

(i) طالب علم نے اپنے کس مضمون میں سب سے زیادہ سدھار کیا ہے؟

(ii) سب سے کم سدھار کس مضمون میں ہوا؟

(iii) کیا کسی مضمون میں سدھار خراب ہوئی ہے؟

4- ایک پھل بیچنے والے نے کسی دو دنوں میں پھلوں کی فروختگی (کیلو میں) کا مقابل گوشوارہ بنایا۔ آپ انھیں دوہرے بار گراف میں دکھایئے اور دیئے گئے سوالوں کے جواب دیجئے:

پھل	آم	سیب	سنترہ	پپیتا	کیلا	تربوز
سوموار	35	29	12	20	18	38
منگل	26	34	8	25	16	35

(i) کون سا پھل عام لوگوں کا زیادہ پسندیدہ ہے؟

(ii) اس بار گراف سے آپ کیا نتیجہ نکالتے ہیں؟

5- ایک کالونی میں لگاتار (دو سالوں میں مختلف مدوں Item) پر خرچ حسب ذیل ہے:

مد (Item)	2008 (ہزار روپے میں)	2009 (ہزار روپے میں)
پانی سپلائی	25	30
علاج	30	35
تحفظ	50	70
سڑک	40	20
بجلی	35	35

ایک مناسب اسکیل چن کر ایک دوہرا بار گراف کھینچئے اور سوالوں کا جواب دیجئے :

(i) کس مَد میں پچھلے سال کے مقابلے سب سے زیادہ خرچ کیا گیا ؟

(ii) کس مَد میں دونوں سالوں میں برابر خرچ ہوئے ؟

(iii) 2008 میں بجلی اور روڈ پر کل کتنا خرچ ہوا ؟

(iv) کس سال کا خرچ زیادہ رہا ؟

6- اس باب کے شروع میں دیئے گئے مختلف شہروں کے سب سے کم اور سب سے زیادہ درجۂ حرارت کے اعداد (جدول 4.1) کو لیجیے۔ ان آنکڑوں کا ایک دوہرا بار گراف کھینچ کر مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دیجیے۔

(i) کس شہر کا سب سے کم اور سب سے زیادہ درجۂ حرارت کا فرق سب سے زیادہ ہے؟

(ii) کون سا شہر سب سے زیادہ گرم ہے اور کون سا شہر سب سے زیادہ ٹھنڈا ہے؟

(iii) ایسے دو شہروں کے نام لکھئے، جس میں سے ایک کا سب سے زیادہ درجۂ حرارت دوسرے سب سے کم درجۂ حرارت سے کم ہے۔

(iv) اُس شہر کا نام لکھئے، جس کا سب سے کم اور سب سے زیادہ درجۂ حرارت کا فرق سب سے کم ہے۔

4.9 - اتفاق اور امکان

4.9 ہمیں اپنے روزمرّہ کی زندگی میں حسب ذیل اقوال سننے کو ملتے رہتے ہیں :

(i) آج بارش ہونے کا امکان نہیں ہے۔

(ii) بھارت ورلڈ کپ جیتے گا۔

(iii) سورج پچھم سے نکلتا ہے۔

(iv) ایک پاسہ کو پھینکنے پر 8 آئے گا۔

(v) ایک کیلوگرام کے مقابلے دو کیلوگرام سبزی زیادہ ہوگی۔

(vi) چھوٹے پتھر کی جگہ بڑا پتھر زیادہ جگہ گھیرے گا۔

(vii) بھارت اگلی ٹیسٹ سیریز جیتے گا۔

(viii) وِبھوتی امتحان میں ٹاپ کرے گا۔

مندرجہ بالا اقوال کے بارے میں آپ کیا کہیں گے؟ یہاں پچھم سے سورج نکلنا ناممکن ہے۔ ایک پاسے کو پھینکنے پر 8 آنا بھی ممکن نہیں ہے۔ اس کے مخالف قول (iii) اور (iv) کا ہونا یقینی (Certain) ہے۔ دوسری طرف قول

(v) اور(vi) ہو بھی سکتا ہے اورنہیں بھی ہو سکتا ہے۔ دونوں ہی ممکن نہیں ہے۔ ہونا اور نہ ہونا اتفاق(Chance) ہے۔

4.9.1- اتفاق

جب آپ ایک سکّے کو اچھالتے ہیں تو کیا آپ ہمیشہ اس کی صحیح پیشین گوئی کر سکتے ہیں کہ چت (Head)ہوگا یا پَٹ(Tail) ؟ آپ دس بار ایک سکّے کو اُچھال کر اس سے حاصل ہونے والے نتیجے اور اپنی پیشین گوئی کو ذیل کے جدول میں لکھیے :

خاکہ : 4.7

اُچھال نمبر	پیشین گوئی	نتیجہ
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

کیا آپ اس میں کوئی پیٹرن(Pattern) دیکھتے ہیں۔ ہر ایک اُچھال کے بعد آپ کو کیا حاصل ہوتا ہے؟ آپ دیکھیں گے کہ یہ مشاہدے کوئی صاف صاف پیٹرن(Pattern) ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ ذیل کے جدول کو دیکھیے :

جدول : 4.8

اُچھال نمبر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
نتیجہ	H	T	H	H	H	T	T	T	T	T	T
اُچھال نمبر	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
نتیجہ	H	H	T	T	H	H	H	H	H	T	H

مندرجہ بالا جدول ناہیدہ اور نیتا کے 22 اُچھالوں سے حاصل مشاہدہ کا ہے۔ یہاں H = Head (چت) T = Tail (پٹ) ہے۔ ظاہر ہے یہاں چت اور پٹ کے آنے کا کوئی طے شدہ Pattern نہیں ہے۔ یہ اتفاق کی بات ہے کہ ایک خاص اُچھال میں چت اور پٹ میں سے کوئی ایک ہوسکتا ہے۔

خود کر کے دیکھئے:

1- ایک سکّے کو 125 بار اُچھالیے اور معلوم کیجیے کہ کتنی بار چت اور کتنی بار پٹ؟

2- ایک پاسے کو 100 بار پھینکئے اور نتائج کو ریکارڈ (Record) کیجیے۔ معلوم کیجیے کہ 1، 2، 3، 4، 5 اور 6 کتنی بار آئے ہیں؟

3- وبھوتی نے ایک پاسے کو 250 بار پھینکا اور حسب ذیل گوشوارہ حاصل کیا:

جدول: 4.9

پاسے کی تعداد	ملان کی علامت	کتنی دفعہ
1	ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ III	33
2	ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ	40
3	ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ II	47
4	ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ II	52
5	ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ	40
6	ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ ⅠⅠⅠⅠ III	38

ان اعداد کے لیے ایک بار گراف کھینچئے۔ ان نتائج سے حاصل نتیجہ کیا ہے؟

4.9.2- امکان وگمان (Probability)

جب ایک سکّے کو اُچھالا جاتا ہے تو آپ کو کیا ممکن نتائج حاصل ہوتے ہیں؟ بغیر شک و شبہ کے چت (Head) یا پٹ (Tail)۔ اس طرح چت اور پٹ سکّے اُچھالنے کے دو نتائج (Outcomes) ہیں اور نتائج کے آنے کا اتفاق (Chance) ایک ہی ہے۔ یعنی دونوں ہی نتائج کے امکان برابر تھے۔ اس لیے یہ امکان وگمان (Equally Likely) یکساں اتفاق ہے۔ ایک چت حاصل کرنے کا امکان دو نتائج میں سے ایک ہے یعنی $\frac{1}{2}$ ہے۔

اب اگر آپ ایک پاسے(Die) کو پھینکیں تو کیا آپ حاصل ہونے والے عدد کی پیشین گوئی کر سکتے ہیں؟ لوڈو(Ludu) یا سانپ اور سیڑھی کا کھیل کھیلتے وقت آپ نے ضرور سوچا ہوگا کہ دل پسند عدد حاصل ہو۔ لیکن کیا ہمیشہ آپ کی خواہش پوری ہوتی ہے؟

اب ایک پاسا لیجیے، اُسے 150 بار پھینکیے اور حاصل نتائج کو ذیل کے جدول میں بھریے :

جدول : 4.10

پاسے پر لکھے اعداد	ملان کی علامت	عدد جتنی بار حاصل ہوئی
1		
2		
3		
4		
5		
6		

پھینک کر ہر ایک نتیجہ کے لیے مناسب خانے میں ملان نشان جیسے 3 آنے پر 3 کے سامنے لگاتے رہیے۔ اس عمل کو 150 بار کیجیے اور ہر ایک نتیجہ کی کثرت(Frequency) (کل تعداد) معلوم کیجیے۔

(i) نتیجہ 1, 2, 3, 4, 5 اور 6 میں سے کون سب سے زیادہ بار ہے؟

(ii) سب سے بڑے نتیجہ اور سب سے چھوٹے نتیجہ کا فرق کیا ہے؟

اب ایک پاسے(Die) کو ایک بار پھینکنے پر 1, 2, 3, 4, 5 یا 6 کا نتیجہ حاصل ہوگا۔ اس طرح چھ یکساں ممکن نتیجے ہیں۔ تو ہم کہتے ہیں کہ 1, 2, 3, 4, 5 اور 6 میں سے ہر ایک کے آنے کا امکان $\frac{1}{6}$ ہے۔

جیسے: (i) 5 آنے کا امکان $\frac{1}{6}$

5 دینے والے نتیجہ کی تعداد ← 1

امکانی نتیجوں کی تعداد ← 6

8 دینے والے نتیجہ کی تعداد

(ii) 8 آنے کا امکان $\frac{0}{6}$

8 دینے والے نتیجہ کی تعداد ← 0

امکانی نتیجوں کی تعداد ← 6

ظاہر ہے کہ کئی ممکنات والے واقعات کا امکان 0 اور 1 کے درمیان ہوتی ہے۔ جس واقعہ کے ہونے کا کوئی اتفاق یا امکان نہیں ہے۔ ان کا امکان 0 ہوتا ہے اور جس واقعہ کو یقینی صورت میں واقع ہونا ہوتا ہے۔ اس کا امکان 1 ہوتا ہے۔

سوالنامہ : 4.4

1- بتائیے کہ مندرجہ ذیل میں سے کس کا ہونا یقینی ہے۔ کس کا ہونا ناممکن ہے۔ اور کون ہو بھی سکتا ہے اور نہیں بھی ہوسکتا ہے۔

(i) مثلث بنانے پر تین راس بنیں گے۔

(ii) ایک سکے کو اُچھالنے پر پٹ آئے گا۔

(iii) ایک سکّے کو اُچھالنے پر چت اور پٹ دونوں آئے گا۔

(iv) ایک پاسے کو پھینکنے پر 7 آئے گا۔

(v) کل بادل گھرے ہوں گے۔

(vi) یہ میچ بھارت جیتے گا۔

2- ایک ایک پرچی پر اسے 8 تک اعداد لکھے ہوئے ہیں۔ انھیں ایک باکس میں لکھ کر اچھی طرح ملا دیا جاتا ہے۔ باکس کے اندر سے بغیر دیکھے ایک پرچی نکالی جاتی ہے تو درج ذیل کا امکانا کیا ہے؟

(i) عدد 5 حاصل کرنا۔

(ii) 1 عدد کی ایک عدد حاصل کرنا۔

(iii) 5 سے چھوٹی ایک عدد حاصل کرنا۔

(iv) 5 سے بڑی ایک عدد حاصل کرنا۔

3- رانی اور ریلا میں کون پہلے گانا گائے گی۔ اس کا فیصلہ کرنے کے لیے ایک سکہ اچھالا جاتا ہے۔ ریلا کے پہلے گانے کا امکان کیا ہے؟

ہم نے سیکھا

1- آنکڑوں (Data) کو اکٹھا کرنے سے پہلے ہمیں یہ جان لینا چاہیے کہ ہم ان کا استعمال کس کام میں کریں گے۔

2- اکٹھا کیے گئے آنکڑوں کو ایک مناسب جدول کی صورت میں منظم کیے جانے کی ضرورت ہوتی ہے تاکہ یہ آسانی سے سمجھنے کے لائق ہو اور ان کی تشریح کی جا سکے۔

3- نمائندہ قیمت ایک ایسا عدد ہے۔ جو دیئے گئے مشاہدے کے مجموعے (آنکڑوں) کی بہت ہی اہم خصوصیت (مرکزی رجحانات) کو ظاہر کرتا ہے۔

4- اوسط ایک ایسا عدد ہے جو مشاہدوں(Observation) یا آنکڑوں(Data) کے ایک مجموعہ کے مرکزی رجحان کو دکھاتا ہے۔ یہ سب سے زیادہ اور سب سے کم قیمت(Value) کے اعداد کے بیچ میں ہوتا ہے۔

5- مشاہدوں کے سب سے زیادہ اور سب سے کم قیمتوں(Value) کے فرق سے، ہمیں مشاہدوں کے حدود (Range) کا ایک اندازہ لگ جاتا ہے۔

6- وسطانیہ بھی ایک طرح کی نمائندہ قیمت (Representative Value) ہے۔ یہ اس قیمت کو ظاہر کرتا ہے جو مشاہدہ کے وسط (بیچ) میں ہوتا ہے۔ (انھیں بڑھتی ترتیب یا گھٹتی ترتیب میں منظم کرنے کے بعد) یعنی آدھے مشاہدے اس کے اوپر ہوتے ہیں اور آدھے مشاہدے اس کے نیچے ہوتے ہیں۔

7- وسطی (Mode) مشاہدوں(Observation) کے ایک مجموعہ میں وہ مشاہدہ ہوتا ہے جو سب سے زیادہ بار آتا ہے۔

8- گراف جمع کیے گئے آنکڑوں کا خطی تصویروں کے ذریعہ پیشکش(Representation) ہے۔ بار گراف (Bar Graph) آنکڑوں کی یکساں چوڑائی والے باروں (مستطیلوں) کے ذریعہ ایک تصویری پیشکش ہے۔

9- دوہرا بار گراف مشاہدوں کے دو مجموعوں کے موازنہ میں معاون ہے۔

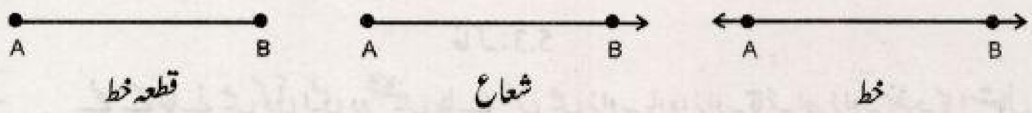
10- ہمیں اپنے روزمرہ کی زندگی میں ایسی حالت پیش آتی ہے(i) جس کا ہونا طے ہے(ii) جس کا ہونا ممکن نہیں ہے(iii) جو ہو بھی سکتا ہے اور نہیں بھی۔ جس کے واقع ہونے کا کوئی اتفاق(Chance) نہیں ہے۔ اس کا امکان 0 ہوتا ہے۔ جس کا واقع ہونا طے ہے، اس کا امکان 1 ہوتا ہے۔ کئی ممکنات والے واقعہ کا امکان 0 اور 1 کے بیچ ہوتا ہے۔

باب-5

اقلیدسی بناوٹوں کی تفہیم

5.1 - تمہید:

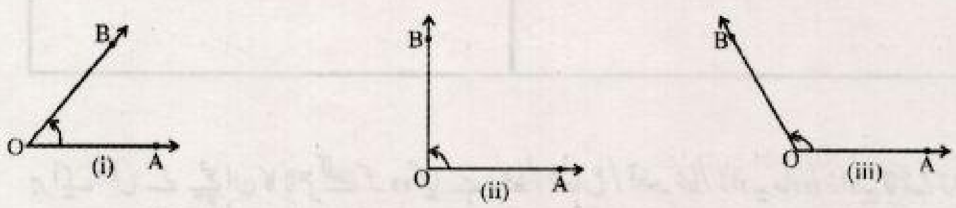
ابھی تک ہم نے سیکھا ہے کہ ایک قطعہ خط کے دو آخری نقطہ ہوتے ہیں۔ اگر ہم ان کے ایک آخری نقطہ کو اسی سمت میں غیر محدو(Infinite) سمت میں بڑھاتے ہیں تو ہمیں شعاع حاصل ہوتی ہے اور اس کے دونوں آخری نقطوں کو اپنے اپنے سمت میں غیر محدود بڑھاتے ہیں تو ہمیں خط حاصل ہوتا ہے۔



خاکہ: 5.1

ان میں $\overline{AB}$ قطعہ خط، $\overline{AB}$ شعاع اور $\overline{AB}$ کو دکھایا گیا ہے۔

ہم یہ بھی سیکھ چکے ہیں کہ جب دو شعاعیں ایک نقطہ پر ملتی ہے تو ان شعاعوں کے بیچ کے گھٹاؤ یا جھکاؤ کو زاویہ کہتے ہیں۔



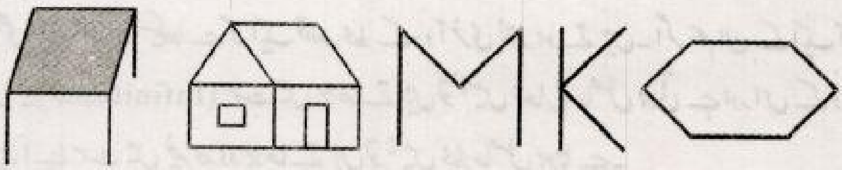
خاکہ: 5.2

اوپر کی شکل میں $\overline{OA}$ اور $\overline{OB}$ ایک نقطہ راس 'O' پر مل کر $< AOB$ بنا رہی ہے۔ تصویر(i) میں زاویہ حادّہ تصویر(ii) میں زاویہ قائمہ اور تصویر(iii) میں زاویہ منفرجہ دکھایا گیا ہے۔ جہاں $\overline{OB}$ کا جھکاؤ $\overline{OA}$ پر اُلٹی سمت یعنی گھڑی کی سوئی کی اُلٹی سمت میں آگے بڑھتا جا رہا ہے۔ زاویوں کے اسی جھکاؤ کی پیائش ہم پروٹیکٹر کی مدد سے کرتے ہیں۔ زاویہ AOB کی پیائش کو ہم $m < AOB$ لکھتے ہیں۔

اس سبق میں ہم مختلف زاویوں کے جوڑا کے بارے میں سیکھیں گے۔

کچھ کریں:

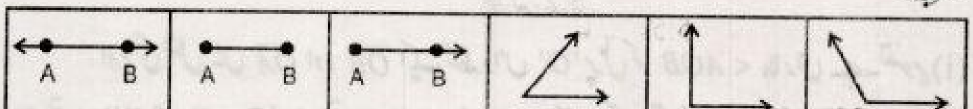
1- تصویروں میں بننے والے مختلف زاویوں کو پہچانئے اور اُن پر گول دائرہ بنائیے۔



خاکہ: 5.3

2- نیچے کے خانے میں کوئی ایسی دو شکلیں بنائیے جس میں زاویہ مادہ، زاویہ قائمہ اور زاویہ منفرجہ کا استعمال ہوا ہو۔

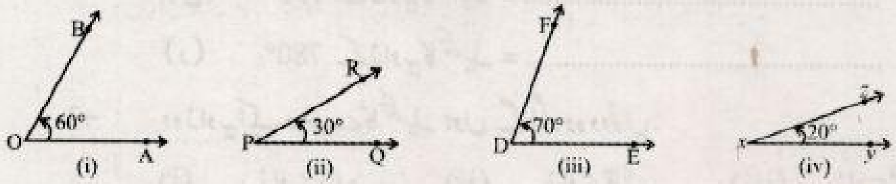
3- ہر ایک شکل کے نیچے ان کا نام لکھئے کہ وہ کیا ہے: خط/ شعاع/ قطعہ خط/ زاویہ حادہ/ زاویہ قائمہ/ زاویہ منفرجہ۔



۱

5.1 - زاویوں کے جوڑے:

5.1.1 زاویہ تکملہ (Complementry Angle)



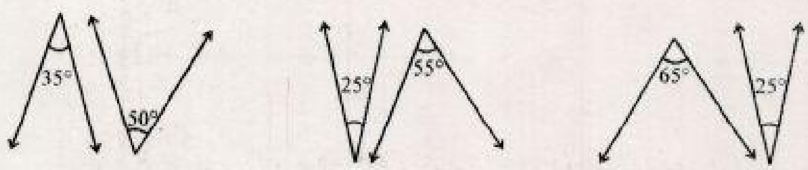
خاکہ : 5.4

کسی دو نقطوں کو ایک ساتھ ملا کر دیکھیں۔ خاکہ 5.4 کے (i) اور (ii) میں بنے زاویوں کی پیائش کا $60° + 30° = 90°$ اور (iii) اور (iv) میں بنے زاویوں کی پیائش $70° + 20° = 90°$

یہاں زاویوں کے جوڑے کی پیائش آپس میں مل کر 90° ہو تو انھیں زاویہ تکملہ کہتے ہیں۔ اور جوڑے کے دونوں زاویہ ایک دوسرے کی تکملہ ہے۔ اسی طرح زاویہ (iii) زاویہ (iv) کا تکملہ ہے۔

خود کر کے دیکھیے:

1- دیے گئے زاویوں کے جوڑوں میں سے کون سا جوڑا تکملہ ہے۔ یعنی ایک دوسرے کو مکمل کرنے والے ہیں؟



(الف) (ب) (ج)

خاکہ: 5.5

$= 35° + 50° = 85°$ ------------ ------------

مکمل کرنے والے زاویہ نہیں ہے۔ ------------ ------------

2- دیے گئے زاویوں کے زاویہ تکملہ کی پیائش بتایئے:

(الف) 40° کے زاویہ کا تکملہ $90° - 40° = 50°$

(ب) 550° کے زاویہ کا تکملہ = ...

(ج) 150° کے زاویہ کا تکملہ = ...

(د) 780° کے زاویہ کا تکملہ = ...

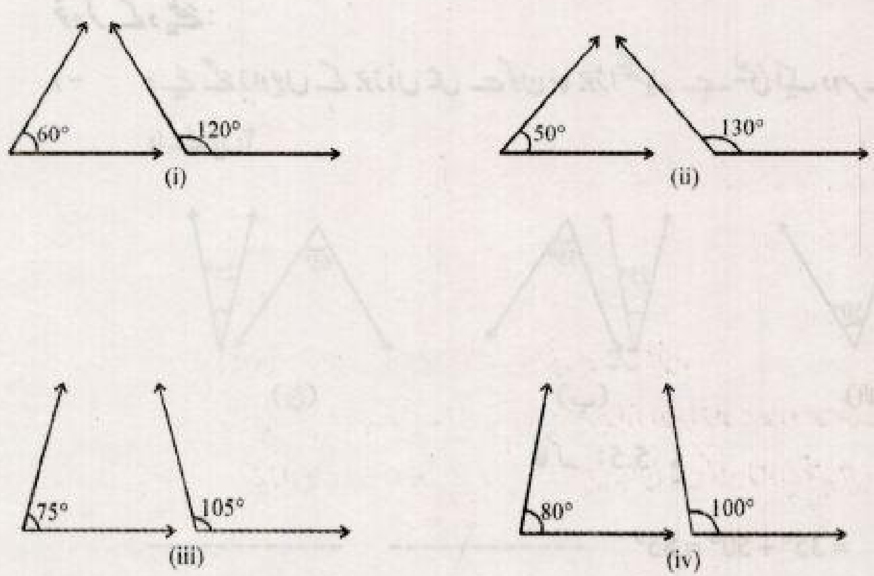
3- دو زاویہ ایک دوسرے کا تکملہ ہوں گے اگر وہ دونوں :

(i) زاویۂ حادہ (ii) زاویۂ قائمہ (iii) زاویۂ منفرجہ

4- دو زاویے ایک دوسرے کے زاویۂ تکملہ ہیں۔ اگر ان کی پیائشوں کا فرق 30° ہو تو دونوں زاویہ کی پیائش بتائیے۔

5.1.2- زاویۂ تتمہ (Supplementary Angle)

نیچے بنائے گئے زاویہ کے جوڑوں پر غور کیجیے اور جدول کو پورا کیجیے۔



خاکہ: 5.6

جدول

زاویوں کا جوڑا	جوڑے کے پہلے زاویہ کی پیمائش	جوڑے کے دوسرے زاویہ کی پیمائش	جوڑے کے دونوں زاویوں کی پیمائش کا جمع
(i)	60°	120°	180°
(ii)			
(iii)			
(iv)			

جدول سے ظاہر ہے کہ زاویوں کے ہر ایک جوڑے کے زاویوں کی پیمائش کا جمع 180° ہے۔ زاویوں کے ایسے جوڑے زاویۂ تتمہ (Supplementary Angle) کہلاتے ہیں۔ جوڑے کے دونوں زاویے ایک دوسرے کے تتمہ کہلاتے ہیں۔ جدول میں جوڑ(i) میں 60° کا زاویہ 120° کے زاویہ کا تتمہ ہے۔ اس لیے 120° کا زاویہ 60° کے زاویہ کا تتمہ ہے۔

سوچیے: کیا 50° کے زاویے کا تتمہ 130° ہے؟

80° کا تتمہ 100° ہی کیوں ہے؟

خود کر کے دیکھیے:

1- اگر زاویوں کے جوڑے زاویۂ تتمہ ہو، تب نیچے کے اقوال میں سے کون صحیح ہے اور کون غلط؟

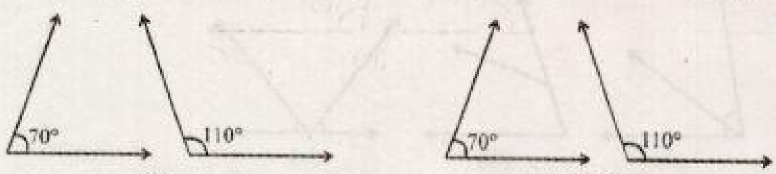
(i) جوڑے کے دونوں زاویے زاویہ حادہ ہو سکتے ہے۔ (غلط)

(ii) جوڑ کے دونوں زاویہ قائمہ ہو سکتے ہیں۔ ( )

(iii) جوڑ کے دونوں زاویہ منفرجہ ہو سکتے ہیں۔ ( )

(iv) جوڑ کے ایک زاویہ، زاویۂ منفرجہ اور دوسرا زاویۂ حادہ ہو سکتا ہے۔ ( )

2- نیچے زاویوں کے دو جوڑے دیے گئے ہیں۔ ان میں کون زاویۂ تتمہ ہیں۔ بتایئے؟



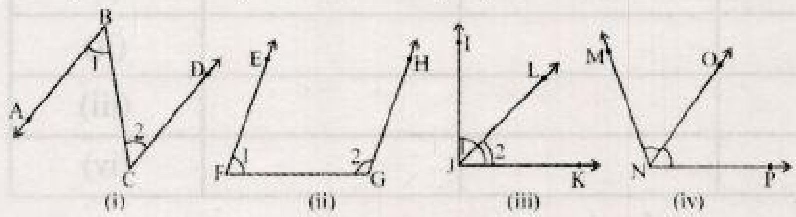
(i) (ii)

خاکہ: 5.7

-3 مندرجہ ذیل زاویوں میں سے ہر ایک کا تتمہ بتائیے:

(i)	75° کا تتمہ =...........	(ii)	125° کا تتمہ = ...
(iii)	80° کا تتمہ =...........	(iv)	90° کا تتمہ = ...

5.1.3- زاویہ متصل (Adjacent Angle): آیئے اب خاکہ 5.5 میں زاویہ خطی کے جوڑوں پر غور کریں:



خاکہ: 5.8

اوپر کے سبھی زاویوں کے جوڑوں میں زاویہ بنانے والے اضلاع میں سے ایک ضلع باہم مشترک ہے۔ خاکہ (i) اور (ii) میں دو راس ہیں جب کہ خاکہ (iii اور (iv) میں ایک ہی راس ہے۔ خاکہ (iii) میں زاویہ بنانے والے دو اضلاع J I اور J L مشترک اضلاع کا ایک ہی طرف ہے۔ جب کہ خاکہ (iv) میں زاویہ بنانے والی اضلاع N M اور N P مشترک ضلع N O کے ایک ایک طرف ہے۔ خاکہ (iv) میں بنا زاویہ، زاویہ متصل (Adjacent Angle) ہے۔ اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ زاویوں کا ایسا جوڑا، جس میں دونوں زاویے اس طرح ملے ہوئے ہیں کہ:

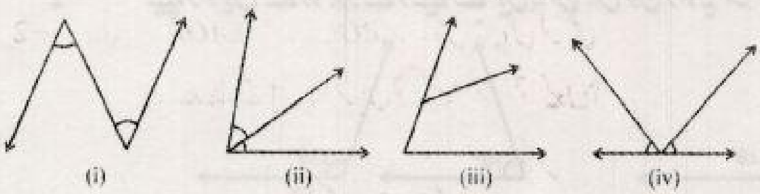
(i) ان کا راس مشترک ہے۔

(ii) زاویہ بنانے والے اضلاع میں سے ایک ضلع مشترک ہے اور

(iii) زاویہ بنانے والے جو اضلاع باہم مشترک نہیں ہیں، وہ ضلع مشترک ضلع کے ایک ایک طرف ہے، زاویہ متصل (Adjacent Angle) کہلاتا ہے۔

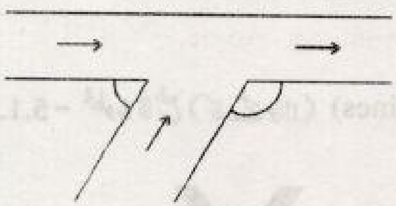
خود کر کے دیکھیے:

ذیل کے خاکوں میں سے کون زاویہ متصلہ کا جوڑا بناتا ہے؟

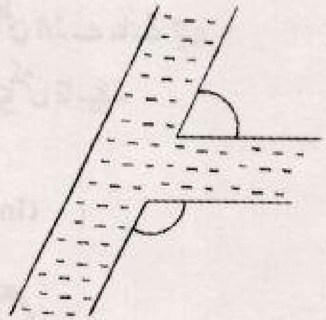


خاکہ: 5.9

5.1.4-خطی جوڑے



سیدھی سڑک میں ملتی ایک دوسری سڑک

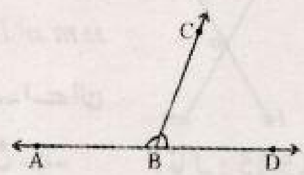


سیدھی نہر سے نکلتی ایک دوسری نہر

(خاکہ: 5.10)

اوپر کے دونوں خاکے متصلہ زاویے (Adjacent Angle) کی مثال ہیں۔ یہاں زاویہ بنانے والے اضلاع میں سے ایک ضلع باہم مشترک ہے اور باقی دونوں اضلاع مشترک ضلع کے ایک ایک طرف اس طرح ہیں کہ وہ ایک دوسرے کے ٹھیک مخالف سمت میں ہیں۔ اور ایک سیدھا خط بنا رہے ہیں۔

ٹھیک اسی طرح خاکہ :5.11 میں $\angle ABC$ اور $\angle CBD$ آپس میں مل کر ایک متصلہ زاویہ بنا رہے ہیں۔ اور AB اور BD ایک خط مستقیم بنا رہے ہیں۔ متصلہ زاویہ کے ایسے جوڑے خطی جوڑے کہلاتے ہیں۔ یعنی آپ کہہ سکتے ہیں کہ جب متصلہ زاویہ کا جمع $180°$ ہو تب وہ خطی جوڑے بناتے ہیں۔ تب $\angle ABC + \angle CBD = 180°$



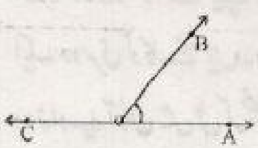
خاکہ :5.11

خود کر کے دیکھئے:

-1 خاکہ :5.12 کو دیکھ کر بتایئے $\angle AOB$ اور $\angle BOC$ ایک خطی جوڑے بناتے ہیں۔

(خاکہ: 5.12)

-2 (a) کیا $\angle AOB$ اور $\angle BOC$ آپس میں مل کر خطی جوڑے بناتے ہیں۔ اگر ہاں تو کیسے؟ نہیں تو کیوں؟

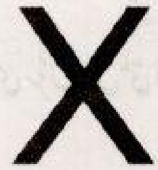


(خاکہ: 5.13)

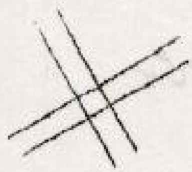
(b) خطی جوڑوں کے زاویے ہوتے ہیں :(i) تکملہ (ii) تتمہ۔

(c) $\angle BOC$ اور $\angle AOB$ آپس میں مل کر خطی جوڑے بناتے ہیں
اگر $\angle AOB 75^\circ$ ہو تو $\angle BOC$ کی پیمائش بتایئے۔

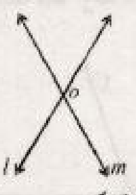
5.1.5 - خطوط قاطع (کاٹنے والا) (Intersecting lines)


انگریزی حروف تہجی کا 24 واں حرف


غلیل

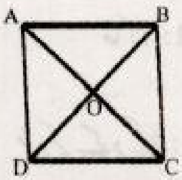

چوراہے پر ایک دوسرے کو کاٹتی سڑک

(خاکہ: 5.14)



(خاکہ: 5.15)

ان تصویروں کو دھیان سے دیکھنے پر آپ ان میں ایک یکسانیت ڈھونڈ سکتے ہیں کہ ان میں خطوط ایک دوسرے کو ایک نقطہ پر کاٹتے ہیں۔ خاکہ: 5.15 میں l اور m دو خطوط ہیں جو ایک دوسرے کو 'O' نقطہ پر کاٹتی ہے۔ 'O' نقطہ انھیں مشترک ہے۔ اسے ان دونوں خطوں کا نقطۂ قاطع (کاٹنے والا نقطہ) کہتے ہیں۔ اور l اور m خطوط قاطع ہے۔



(خاکہ: 5.16)

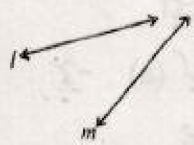
کچھ کریں:

تصویر 5.16 میں بتایئے:

1- نقطۂ قاطع

2- خطوط قاطع

3- خطی جوڑے کے زاویے ہوتے ہیں۔
(i) زاویۂ تکملہ (ii) زاویۂ تتمہ



(خاکہ: 5.16)

4- خط l اور m کو آگے پیچھے بڑھائیں۔ کیا وہ آپس میں ایک دوسری کو کاٹتے ہیں۔ اگر کاٹتے ہیں تو کتنے نقطوں پر کاٹتے ہیں؟

5 - دو زاویے آپس میں مل کر خطی جوڑے بناتے ہیں تو دونوں زاویے ہو سکتے ہیں:

(i) زاویۂ حادہ (ii) زاویۂ قائمہ

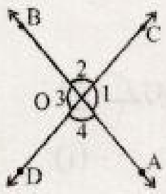
(iii) زاویۂ منفرجہ (iv) ایک زاویہ مادہ ایک زاویہ منفرجہ

5.16- زاویۂ متقابلہ (Vertically Opposite Angle)

قینچی ٹیبل ہینگر

(تصویر: 5.18)

خاکہ: 5.18 میں ایک خط مستقیم ایک دوسرے خط مستقیم کو کاٹ رہا ہے۔ اگر اس یکسانیت کو ہم دو خطوں کے ذریعہ دیکھنا چاہیں تو وہ خاکہ: 5.18 کے جیسا ہی ہوگا، جس میں A B اور C D دو خط ایک دوسرے کو 'O' نقطہ پر کاٹ رہی ہے۔ اس میں چار زاویے بن رہے ہیں۔ ان میں ∠1 اور ∠3 اور ∠2 اور ∠4 متقابلہ زاویوں کے جوڑے ہیں۔ آیئے اب ان زاویوں کی پیائش پر غور کریں۔ ∠1 اور مل کر ∠2 ایک خطی جوڑے بناتے ہیں۔



(خاکہ: 5.19)

تب(i) $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ \quad \therefore \angle 1 = 180^\circ - \angle 2$ ....

اسی طرح ∠2 اور ∠3 مل کر ایک خطی جوڑے بناتے ہیں۔

تب(ii) $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ \quad \therefore = 180^\circ - \angle 2$ ....

مساوات(i) اور(ii) سے ہم پاتے ہیں کہ $\angle 3 = \angle 1$

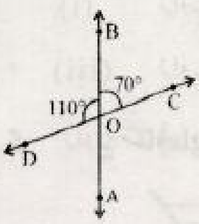
اسی طرح ہم دکھا سکتے ہیں کہ $\angle 4 = \angle 2$

ہم کہہ سکتے ہیں کہ جب دو خط مستقیم ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں متقابلہ زاویوں کے دو جوڑے بنتے ہیں اور ہر ایک جوڑے کے دونوں زاویے برابر پیائش کے ہوتے ہیں۔

خود کر کے دیکھیے:

(1) خاکہ: 5.20 میں A B اور C D ایک دوسرے کو O نقطہ پر کاٹتے

ہیں $\angle BOC = 70^\circ$ اور $\angle BOD = 110^\circ$ ہے تب $\angle AOC$ اور $\angle AOD$ کی پیمائش بتائیے۔



(2) اپنے آس پاس سے متقابلہ زاویوں کے دو مثال پیش کیجیے۔

(خاکہ 5.20)

سوالنامہ : 5.1

1- نیچے دیئے گئے زاویوں کا زاویہ تکمیلہ چاند کی مدد سے بنائیے :

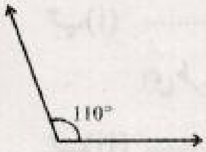
....

....

2- ذیل کے زاویوں کا زاویہ تکملہ معلوم کیجیے:

(i) 35° (ii) 54° (iii) 45° (iv) 78°

3- ذیل کے زاویوں کا زاویہ تتمہ معلوم کیجیے:



(i)

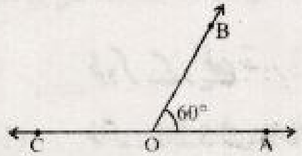
(ii)

(iii)

4- ایک زاویہ اور اس کے زاویہ تکمیلہ کی پیمائش برابر ہیں۔ دونوں کی پیمائش بنائیے۔

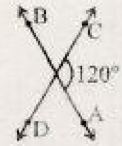
5- زاویۂ تتمہ کے جوڑے میں اگر ایک زاویہ، زاویۂ حادہ ہے تو اس کا تتمہ زاویہ منفرجہ ہوگا یا زاویۂ حادہ؟ وجہ کے ساتھ بتائیے۔

6- متصل شکل میں $\angle AOB$ اور $\angle BOC$ ایک خطی جوڑے بنا رہے ہیں۔ $\angle AOB = 60^\circ$ ہو تب $\angle BOC$ کی پیمائش کیا ہوگی؟



(تصویر: 5.21)

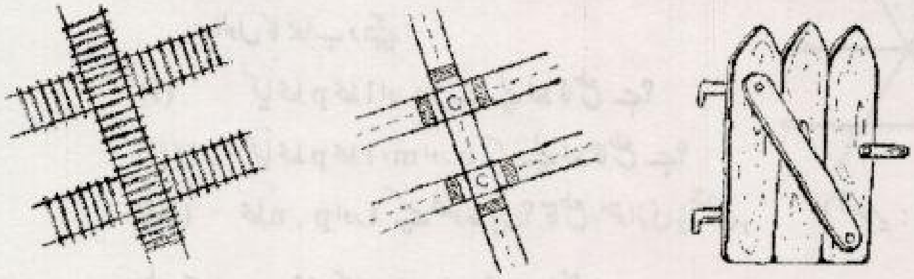
-7 دی گئی تصویر میں $\angle AOC = 120°$ تب $\angle BOC$ ، $\angle BOD$ اور $\angle AOD$ کی قیمت معلوم کیجیے۔



(تصویر: 5.22)

-5.2 خط تقاطع (Transversal) کی خاصیت

-5.2.1 ترچھا کاٹنے والا یا خط تقاطع



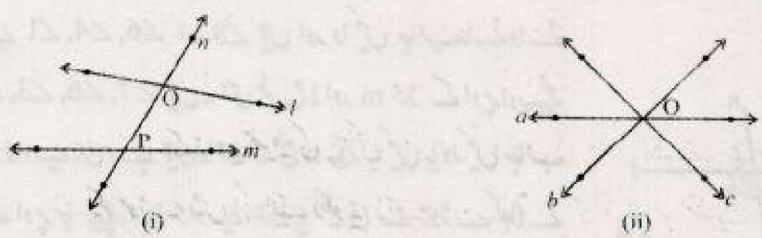
دروازے کی تین پٹریوں کو جوڑتی خط تقاطع پٹری

دو سڑکوں کو کاٹتی ایک سڑک

دو ریلوے لائنوں کو پار کرتی ایک دوسری ریلوے لائن

(تصویر: 5.23)

مندرجہ بالا تصویروں کو دھیان سے دیکھنے پر آپ پاتے ہیں کہ یہاں ایک خط دو یا دو سے زیادہ خطوں کو الگ الگ نقطوں پر کاٹتی ہے۔ ایسے خطوط، خطوط تقاطع کہلاتے ہیں۔



(تصویر: 5.24)

یہاں تصویر: 5.24 کے (i) میں l اور m دو خطوط ہیں، جنھیں ایک خط n نقطہ o اور p پر کاٹ رہی ہے۔ یہاں n خط تقاطع ہے۔(ii) میں a اور b دو خطوط ہیں، جنھیں ایک خط c ایک ہی نقطہ 'o' پر کاٹتی ہے۔ اس لیے یہ خط تقاطع نہیں ہے۔ یہاں تینوں خطوط a ، b اور c ایک ہی نقطہ 'o' سے گزر رہے

ہیں۔ ایک نقطہ پر گزرنے والے سبھی خطوط ...... خطوط کہلاتے ہیں۔

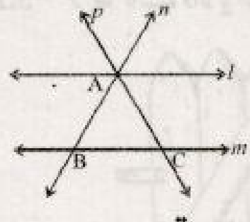
خود کر کے دیکھئے :

1- l اور m دو خطوط کے لیے کتنی خطوط تقاطع کھینچے جا سکتے ہیں؟

2- m، l اور n تین خطوط کے لیے خط 'p' ایک خط تقاطع ہے۔ بتایئے یہاں کتنے نقطۂ قاطع ہیں؟

3- اپنے آس پاس سے ایسی کچھ مثال دیجیے، جن میں آپ خط قاطع دیکھ پائیں۔

4- سامنے درج تصویر کو دھیان سے دیکھئے اور ذیل کے سوالوں کا جواب دیجیے :



(i) کیا خط p خط l اور m کے لیے خط قاطع ہے؟

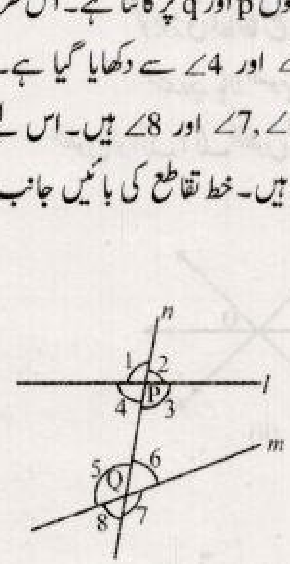
(ii) کیا خط p خط l، m اور n کے لیے خط قاطع ہے؟

(iii) خط n , p اور l کیسے خطوط ہیں؟ قاطع، متوازی یا متفق۔

(تصویر : 5.25)

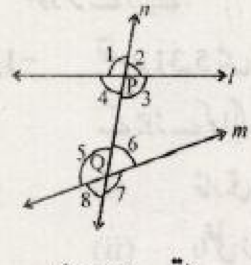
5.2.2- خط قاطع کے ذریعہ دو خطوط کو کاٹنے سے بننے والے نظیری زاویے (Corresponding Angle)

تصویر 5.26 میں n ایک خط قاطع ہے جو l اور n دو خط کو دو مختلف نقطوں p اور q پر کاٹتا ہے۔ اس طرح n اور l خطوط قاطع ہیں۔ اس طرح بننے والے چار زاویوں کو $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ اور $\angle 4$ سے دکھایا گیا ہے۔ اُسی طرح n اور m خط قاطع ہیں۔ ان نقطہ قاطع پر بننے والے چار زاویے $\angle 5, \angle 6, \angle 7$ اور $\angle 8$ ہیں۔ اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ n خط تقاطع دو خط l اور m کو کاٹنے سے کل 8 زاویے بنتے ہیں۔ خط تقاطع کی بائیں جانب بننے والے زاویے $\angle 1, \angle 4, \angle 6$ اور $\angle 8$ ہیں اور دائیں جانب بنانے والے زاویے $\angle 2, \angle 3, \angle 6, \angle 7$ ہیں۔ اسی طرح l اور m خط کے اوپر اور نیچے بھی چار چار زاویے بن رہے ہیں۔ خط تقاطع n کے بائیں یا دائیں جانب l اور m کے اوپر یا نیچے بنے زاویے، زاویہ نظیری کے جوڑے کہلاتے ہیں۔ اوپر کی تصویر میں $\angle 1$ اور $\angle 5$، $\angle 2$ اور $\angle 6$، $\angle 4$ اور $\angle 8$ اور $\angle 3$ اور $\angle 7$ زاویہ نظیری کے جوڑے ہیں۔



(تصویر : 5.26)

خود کر کے دیکھیے:



(تصویر 5.27)

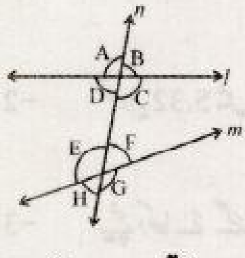
1- تصویر 5.27 میں دیکھ کر زاویہ نظیری کے چاروں جوڑے کو لکھیے:

(i) .... اور ....

(ii) .... اور ....

(iii) .... اور ....

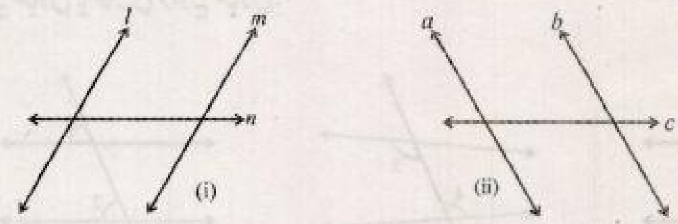
(iv) .... اور ....



(تصویر 5.28)

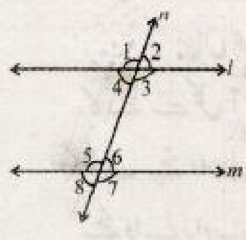
2- تصویر 5.28 میں خط E F کے بائیں جانب بنے زاویہ نظیری کے جوڑوں کے نام لکھیے:

3- تصویر 5.29 میں زاویوں کو نامزد کر کے جدول میں زاویہ نظیری کے جوڑوں کو لکھیے:



(تصویر 5.29)

5.2.3- زاویہ متبادل (Alternate Angle)

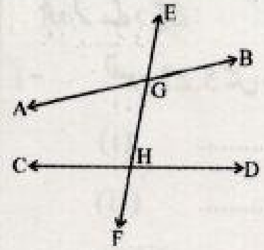


(تصویر 5.30)

خط l اور m کو خط قاطع n دو مختلف جگہوں پر کاٹتی ہے۔ کاٹنے والے نقطہ پر بنے زاویوں کو تصویر 5.30 میں دکھایا گیا ہے۔ 3∠، 4∠، 5∠ اور 6∠ خط تقاطع کی دونوں طرف کے داخلہ زاویوں کے جوڑے ہیں، جو آپس میں منسلک نہیں ہے۔ یہ مختصر طور پر داخلہ متبادل زاویوں کے جوڑے ہیں۔

اسی طرح 2∠، 8∠ اور 1∠، 7∠ خارجی متبادل زاویہ ہیں۔

خود کر کے دیکھئے:

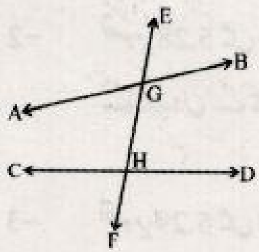


(تصویر 5.27)

1- تصویر 5.31 میں خارجی زاویۂ متبادل اور داخلی زاویۂ متبادل کے جوڑے کو الگ کر کے لکھئے:

(i) خارجی زاویۂ متبادل

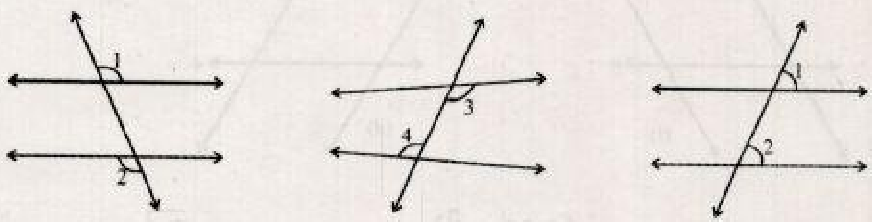
(ii) داخلی زاویۂ متبادل



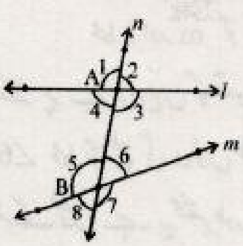
(تصویر 5.27)

2- تصویر 5.32 میں زاویۂ نظیری اور زاویۂ متبادل کے جوڑے بتائیے۔

3- نیچے دکھائے گئے زاویے کے جوڑوں کو پہچانئے اور بتائیے کہ کہ وہ کون سے زاویوں کے جوڑے ہیں۔ زاویۂ نظیری، داخلی زاویۂ متبادل یا خارجی زاویۂ متبادل؟



5.2.4- زاویۂ خارجی اور زاویۂ داخلی (Exterior & Interior angle):



(تصویر 5.33)

یہاں خط قاطع n کے ذریعہ l اور m دو خط کو نقطہ A اور B پر کاٹنے سے کل آٹھ زاویے بنے ہیں۔ یہاں خط l اور m کے باہر کی طرف بننے والے زاویے زاویۂ خارجہ اور خط l اور m کے اندر کی جانب بننے والے زاویے زاویۂ داخلہ کہلاتے ہیں۔

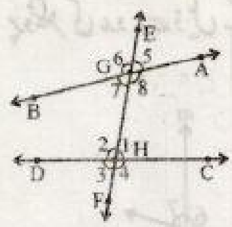
زاویۂ خارجہ $= \angle 1, \angle 2, \angle 7$ اور $\angle 8$

زاویۂ داخلہ $= \angle 3, \angle 4, \angle 5$ اور $\angle 6$

خود کر کے دیکھیے :

(i) زاویۂ خارجہ کے نام لکھیے :

(ii) زاویۂ داخلہ کے نام لکھیے :

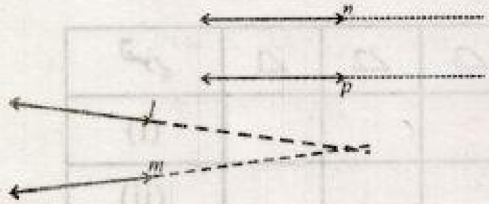


(تصویر 5.34)

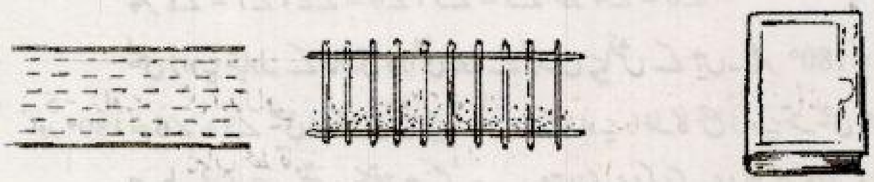
5.3 - متوازی خطوں کی خاصیت

5.3.1- متوازی خطوط (Paralle LLines):

کسی سطح پر کھینچے گئے دو خطوں پر غور کیجیے۔ اگر دونوں جانب ان خطوں کو غیر محدود طور پر بڑھایا جائے تو ہم پاتے ہیں کہ یا تو خط ایک دوسرے سے ایک نقطہ پر ملتے ہیں یا پھر کبھی اور کہیں نہیں ملتے۔ جو خطوط آپس میں کبھی نہیں ملتے وہ متوازی خطوط کہلاتے ہیں۔ اگر n اور p متوازی خط ہیں تو اسے $n \parallel p$ کے ذریعہ ظاہر کرتے ہیں۔



(تصویر 5.35)



کتاب کے آمنے سامنے کے دو کنارے — ریلوے لائن کے دو کنارے — ندی یا نہر کے دو کنارے

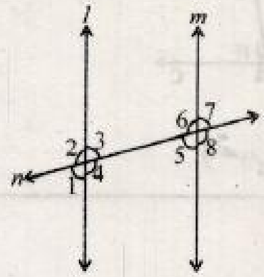
(تصویر 5.36)

5.3.2- متوازی خطوط کا خط تقاطع

l اور m دو متوازی خط ہیں، جن کو n ایک خط تقاطع کاٹتا ہے۔ اس طرح بنے 8 زاویوں کی پیمائش کو

پروٹیکٹر کی مدد سے ذیل کے جدول کو بھریئے :

(i)



(ii)

(تصویر 5.37)

$\angle 8$	$\angle 7$	$\angle 6$	$\angle 5$	$\angle 4$	$\angle 3$	$\angle 2$	$\angle 1$	تصویر
								(i)
								(ii)

یہاں ہم پاتے ہیں کہ $\angle 1 = \angle 5$ ، $\angle 2 = \angle 6$ ، $\angle 3 = \angle 7$ اور $\angle 4 = \angle 8$ یعنی زاویہ نظیری کا جوڑا برابر پیائش کا ہے۔

پھر $\angle 1 = \angle 7$ ، $\angle 2 = \angle 8$ ، $\angle 3 = \angle 5$ اور $\angle 4 = \angle 6$

یعنی زاویہ متبادلہ کے خارجی و داخلی جوڑے یکساں پیائش کے ہیں۔ پھر $\angle 4 + \angle 5 = 180°$ اور $\angle 3 + \angle 6 = 180°$ یعنی خط تقاطع کی ایک جانب کے زاویہ داخلہ کا جمع زاویہ تتمہ یعنی $180°$ ہے۔

اس طرح ہم اس نتیجے پر پہنچتے ہیں کہ جب دو متوازی خط کو ایک خط تقاطع کاٹتا ہے، تب:

(i) زاویہ نظیری کے ہر ایک جوڑے میں زاویوں کی پیائش برابر ہوتے ہیں۔

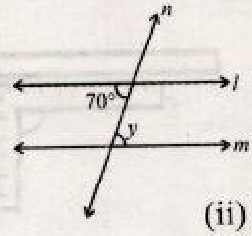
(ii) زاویہ متبادل کے ہر ایک جوڑے میں زاویوں کی پیائش برابر ہوتے ہیں۔

(iii) خط تقاطع کی ایک ہی جانب کے داخلہ زاویوں کا جمع $180°$ یعنی زاویہ تتمہ ہوتا ہے۔

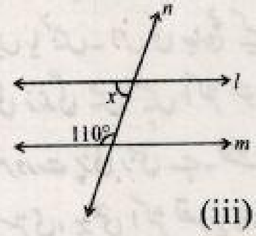
خود کر کے دیکھیے:

1- نیچے دی گئی تصویروں میں l □ m ہو تو نامعلوم زاویوں کی پیمائش معلوم کیجیے۔

(i)

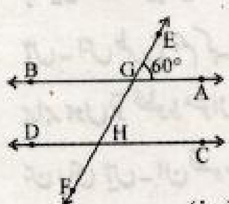


(ii)



(iii)

□ n = ... $\angle y$ = ... □ n = ...



(iv)

$\angle BGH$ = ...

$\angle DHF$ = ...

$\angle GHC$ = ...

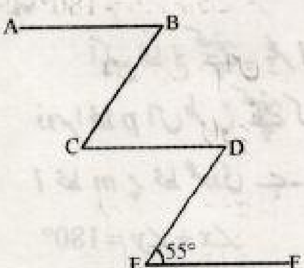
a = ...

b = ...

c = ...

d = ...

(v)



(vi)

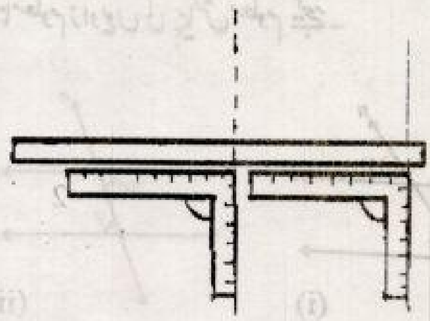
$\angle B$ = ...

$\angle C$ = ...

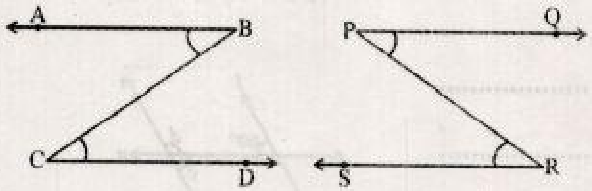
$\angle D$ = ...

5.3.3- متوازی خطوط کی جانچ

آیئے اب ہم غور کریں کہ جب دو خطوط کھینچے ہوئے ہوں تب وہ متوازی خط ہیں یا نہیں۔ اس کی جانچ کیسے ہو۔ روزمرہ کی زندگی میں ہمیں اکثر متوازی خطوط کی ضرورت پڑتی رہتی ہے۔ نقشہ بنانے والے، مستری، بڑھئی اکثر تصویر 5.38 دکھائی گئی چیزوں کا استعمال کرتے آپ کو دکھائی پڑ جائیں گے۔ یہاں وہ خطوط کو متوازی کرنے کے لیے دو L کو اسکیل پر رکھ کر زاویۂ نظیری کو برابر کرتے ہیں۔ اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ جب دو خطوط کو خط تقاطع اس طرح کاٹے کہ زاویۂ نظیری کے جوڑے برابر ہوں تو خطوط متوازی ہوتے ہیں۔ اب تصویر 5.39 پر غور کیجئے۔ اس میں z کی سیدھی اور اُلٹی تصویریں بن رہی ہیں۔ ان تصویروں میں AB II CD اور PQ II SR دکھائی پڑ رہا ہے۔ ایسا داخلی زاویۂ متبادل کے برابر ہونے کی وجہ سے ہو رہا ہے۔ اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر دو خط کو ایک خط تقاطع کاٹتا ہے اور متبادل زاویوں کے جوڑے یکساں ہیں۔ تب خطوط متوازی ہوتے ہیں۔



(تصویر 5.38)



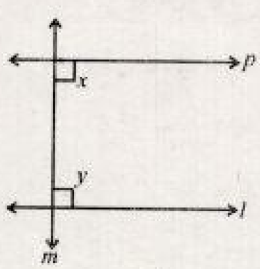
(تصویر 5.39)

کچھ کریں:

ایک خط l کھینچئے۔ پھر l پر ایک خط عمودی m کھینچئے۔ اب ایک دوسرا خط p اس طرح کھینچئے کہ وہ m پر خط عمودی ہو۔ یہاں خط p اور l خط m پر خط عمودی ہے۔ یہ دونوں خط متوازی ہیں۔ کیوں کہ

$$\angle x + \angle y = 180°$$

اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ جب دو خط کو کوئی خط تقاطع اس طرح کاٹے کہ خط تقاطع کی ایک ہی جانب بنے۔ زاویۂ داخلہ کا جوڑ



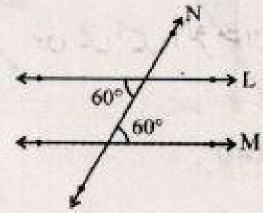
(تصویر 5.40)

180° ہو تب دونوں خطوط متوازی ہوں گے۔

خود کر کے دیکھئے :

نیچے دی گئی تصویروں میں بتایئے کہ خط l اور m متوازی ہیں یا نہیں۔ ساتھ میں وجوہات بھی بتایئے :

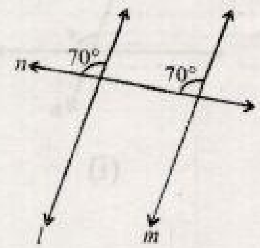
-1



ہاں / نہیں

وجوہات :

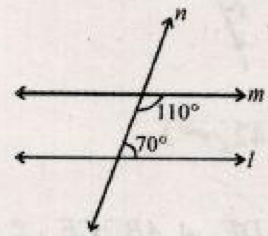
-2



ہاں / نہیں

وجوہات :

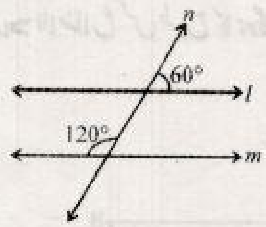
-3



ہاں / نہیں

وجوہات :

-4

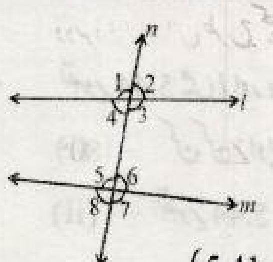


ہاں / نہیں

وجوہات :

سوالنامہ : 5.2

تصویر میں بتایئے :



(تصویر 5.41)

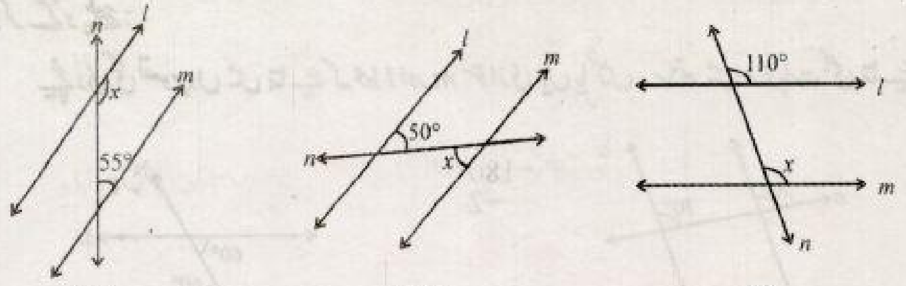
-1 زاویہ نظیری کے جوڑوں کے نام۔

-2 داخلی زاویہ متبادل کے جوڑوں کے نام۔

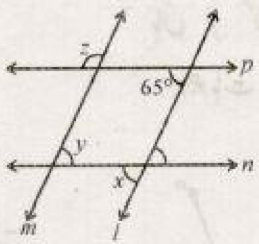
-3 خارجی زاویہ متبادل کے جوڑوں کے نام۔

-4 خط تقاطع کی ایک ہی جانب کے داخلی زاویوں کے نام۔

5- l□m، تب x کی پیمائش بتائیے:



(iii) (ii) (i)

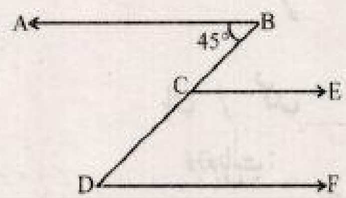


(تصویر 5.42)

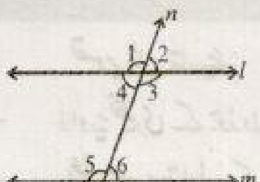
6- تصویر 5.42 میں m□l اور n□p، تب $\angle n$ اور $\angle y$ کی قیمت معلوم کیجیے:

7- تصویر 5.42 میں z □ کی قیمت کیا ہوگا؟ اور اس میں بننے والا مربع ذو اربعۃ الاضلاع کس طرح کا ہوگا؟ وجہ بتائیے۔

8- تصویر 5.43 میں AB□CE اور CE□DF، تب $\angle B = 45°$ تب $\angle C$ اور $\angle D$ کی قیمت معلوم کیجیے۔ کیا AB □ DF، اگر ہاں تو کیسے؟



(تصویر 5.43)



(تصویر 5.44)

9- تصویر 5.44 میں l اور m دو خطوط کو ایک خط قاطع کاٹتا ہے، تب:

(i) کن کن زاویوں کے برابر ہونے پر l□m ہوگا؟

(ii) تصویر 5.44 میں $\angle 4 + \angle 5 = 180°$ ہے۔ تب کیا l□m ہوگا؟

ہم نے سیکھا

1- دو زاویوں کی پیمائش $90°$ ہو تو وہ دونوں مل کر زاویۂ تکملہ کے جوڑے اور الگ الگ آپس میں ایک دوسرے کے تکمیلی کہلاتے ہیں۔

2- زاویوں کا ایسا جوڑا، جن کی پیمائش کا جمع $180°$ ہو تو زاویہ تتمہ کہلاتے ہیں۔ جوڑے کے دونوں زاویے ایک دوسرے کے تتمہ کہلاتے ہیں۔

3- زاویوں کا ایسا جوڑا، جس میں دونوں زاویۂ اس طرح منسلک ہیں کہ راس مشترک ہو، زاویہ بنانے والے اضلاع میں سے ایک ضلع مشترک ہو اور زاویہ بنانے والے جو اضلاع مشترک نہیں ہیں، وہ مشترک ضلع کے مخالف جانب ہوں، متصلہ زاویہ کہلاتا ہے۔

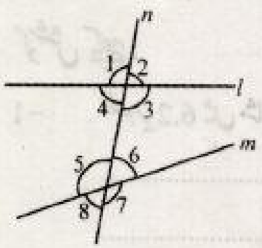
4- جن متصلہ زاویوں کا جمع $180°$ ہو وہ خطی جوڑا بناتے ہیں۔

5- جب دو خط مستقیم ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں تو زاویۂ متقابل (Vertically Opposite Angle) کے دو جوڑے بنتے ہیں۔ اور ہر ایک جوڑے کے دونوں زاویے یکساں پیمائش کے ہوتے ہیں۔

6- ایک خط دو یا دو سے زائد خطوں کو مختلف نقطوں پر کاٹتا ہے تو خط تقاطع کہلاتا ہے۔

7- ایک نقطہ سے ہو کر گزرنے والے سبھی خط خطوط متفقہ کہلاتے ہیں۔

8- خط تقاطع کے ذریعہ دو خطوں کو کاٹنے سے:



(i) زاویۂ نظیری کے چار جوڑے $\angle 2$ اور $\angle 6$، $\angle 1$ اور $\angle 5$، $\angle 4$ اور $\angle 8$، $\angle 3$ اور $\angle 7$ بنتے ہیں۔

(ii) داخلی زاویۂ متبادل کے دو جوڑے $\angle 3$ اور $\angle 5$، $\angle 4$ اور $\angle 6$ بنتے ہیں۔

(iii) خارجی زاویۂ متبادل کے دو جوڑے $\angle 1$ اور $\angle 7$، $\angle 2$ اور $\angle 8$ بنتے ہیں۔

9- جب دو متوازی خطوط کو ایک خط تقاطع کاٹتا ہے تب:

(i) زاویۂ نظیری کے ہر ایک جوڑوں میں زاویوں کی پیمائش برابر ہوتے ہیں۔

(ii) زاویۂ متبادلہ کے ہر ایک جوڑے میں زاویوں کی پیمائش برابر ہوتے ہیں۔

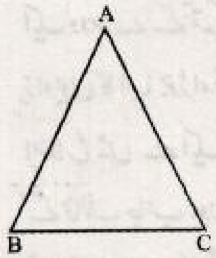
(iii) خط تقاطع کی ایک ہی جانب کے زاویۂ داخلہ کا جمع $180°$ ہوتا ہے۔

باب: 6

مثلث اور اس کی خاصیت

تمہید:

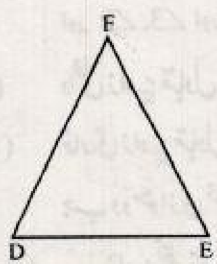
پچھلی جماعت میں ہم نے مثلث کے بارے میں پڑھا ہے۔ تین قطعہ خط سے گھری شکل مستوی مثلث ہے۔ مثلث میں تین راس تین ضلعے اور تین زاویے ہوتے ہیں۔ تصویر 6.1 میں ABC ایک مثلث ہے اور A ، B اور C راس ہیں۔ AB ، BC اور CA ضلعے ہیں۔ اور $\angle ABC$ ، $\angle BCA$ اور $\angle CAB$ تین زاویے ہیں۔ راس A کے سامنے کا ضلع BC اور BC کے سامنے کا زاویہ $\angle BAC$ ہے۔



(تصویر 6.1)

ہم مثلثوں کو ان کی ضلع اور زاویہ کے مطابق درجہ بندی کرنے کا بھی مطالعہ کر چکے ہیں۔ ضلع کے مطابق مثلث کی تین قسمیں ہوتی ہیں۔ مثلث متساوی الساقین (Isosceles Triangle)، مثلث متساوی الاضلاع (Equilateral Triangle) اور مثلث مختلف الاضلاع (Scalen Triangle)۔ اسی طرح زاویہ کے مطابق مثلث تین قسم کے ہوتے ہیں۔ مثلث حادّۃ الزاویہ (Acute Triangle) مثلث قائم الزاویہ (Right Triangle) اور مثلث منفرج الزاویہ (Obtuse Triangle)۔

کوشش کیجیے:



(تصویر 6.2)

1- تصویر 6.2 میں مثلث DEF کے راس، ضلع اور زاویہ کے نام لکھیے:

....

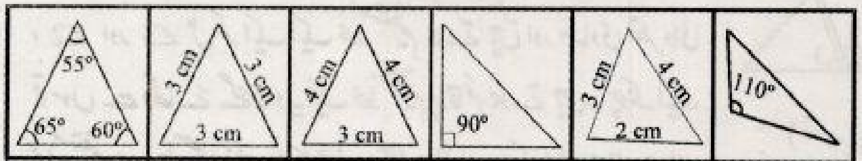
....

....

2- $\angle DEF$ کے سامنے والے ضلع کے نام بتائیے:

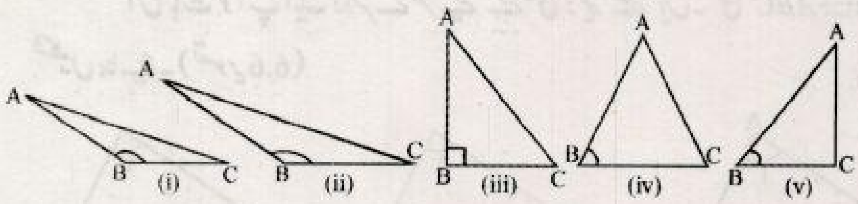
....

3- نیچے دیئے گئے مثلث کے نیچے لکھئے کہ وہ کون سا مثلث ہے؟ مثلث مساوی الاضلاع، مثلث مساوی الاساقین، مثلث قائمۃ الزاویہ، مثلث حادۃ الزاویہ اور مثلث منفرج الزاویہ یا مختلف الاضلاع۔



6.1- مثلث کے زاویوں کے جوڑ کا اصول

نیچے بنے مثلثوں کے زاویہ B کو دھیان سے دیکھئے:

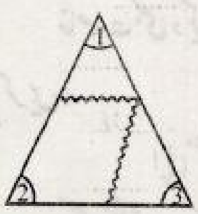


(تصویر 6.3)

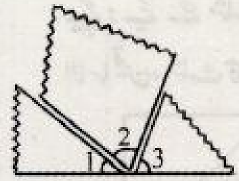
اوپر کی تصویر میں مثلث ABC میں $\angle B$ کی ناپ کو گھٹتے ہوئے دکھایا گیا ہے۔ ہم پاتے ہیں کہ جیسے جیسے $\angle B$ کی قیمت گھٹ رہی ہے ویسے ویسے $\angle A$ اور $\angle C$ کی قیمت بڑھ رہی ہے۔ یعنی مثلث میں تینوں زاویوں کا گھٹنا یا بڑھنا کسی ایک مقررہ اصول کے تحت ہوتا ہے۔ اور مثلث کے زاویوں کا جوڑ بھی کسی اصول سے بندھا ہوتا ہے۔ آیئے اس کو سیکھنے کی کوشش کیجئے۔

کچھ کریں:

اپنے نوٹ بک پر ایک مثلث بنایئے۔ اب پرکار کی مدد سے مثلث کے تینوں زاویوں کو مساوی نصف قطر والی قوسوں سے ظاہر کیجئے اور ان پر تصویر کے مطابق 1، 2 اور 3 درج کیجئے۔ اب مثلث کو تین ٹکڑوں میں اس طرح کاٹئے کہ ہر ایک ٹکڑے میں مثلث کا ایک ایک زاویہ ہو۔



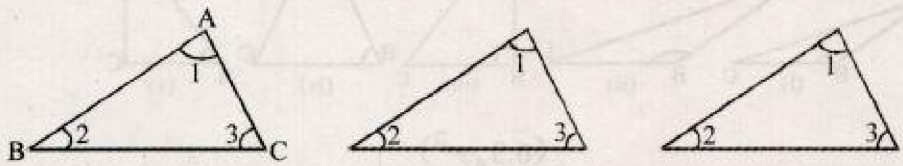
(تصویر 6.4)



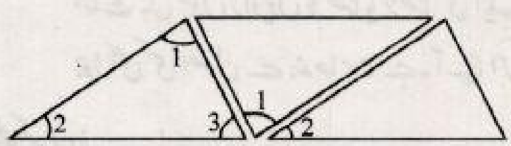
(تصویر 6.4)

اب تینوں ٹکڑوں میں بنے زاویوں کو اس طرح سے قائم کیجئے کہ ان کے راس ایک ساتھ ایک نقطہ پر رہیں۔ (تصویر 6.5) یہاں $\angle 1$، $\angle 2$ اور $\angle 3$ مل کر ایک ایک خط مستقیم بناتے ہیں اور مساوی قطر والی قوسوں سے دکھائے گئے زاویہ ایک خط مستقیم پر قائم ہوتے ہیں۔ چونکہ ایک خط مستقیم پر بنے سبھی زاویے کا جوڑ دو قائمۃ الزاویہ کے برابر ہوتا ہے اور چونکہ ایک قائمۃ الزاویہ $90°$ اس لیے دو قائمۃ الزاویہ $= 180°$۔ اس لیے $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$۔ اس طرح ہم نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ مثلث کے تینوں زاویوں کا جوڑ $180°$ ہوتا ہے۔ آیئے اس نتیجہ کو ہم ایک دوسرے طریقے سے جاننے کی کوشش کریں۔

اس بات کو آپ ایک دوسرے طریقے سے بھی دیکھ سکتے ہیں۔ کسی $\triangle ABC$ کے تین یکساں شکلیں بنائیے۔ (تصویر 6.6)



(تصویر 6.6)



(تصویر 6.7)

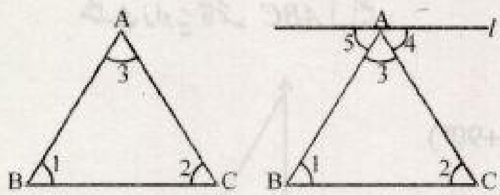
ان تینوں کو تصویر 6.7 کی طرح ملا کر ٹھیک سے رکھئے۔ $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ کے بارے میں آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں؟ (کیا آپ یہاں زاویۂ خارجہ سے متعلق خاصیت بھی دیکھ پاتے ہیں؟)

کچھ کریں:

اپنی مشقی کتاب میں کوئی تین مثلث جیسے $\triangle PQR$، $\triangle ABC$ اور $\triangle XYZ$ کھینچئے۔ ان سبھی مثلثوں کے ہر ایک زاویے کی ناپ چاند(Project) کے ذریعہ ناپ کر معلوم کیجئے۔ ان ناپوں کو جدول کی صورت میں اس طرح کھینچئے۔

تینوں زاویوں کی ناپوں کا جوڑ	زاویوں کی ناپ	⊔ کا نام
$m\angle A + m\angle B + m\angle C$ =	$m\angle A = m\angle B = m\angle C$ =	⊔ ABC
$m\angle P + m\angle Q + m\angle R$ =	$m\angle P = m\angle Q = m\angle R$ =	⊔ PQR
$m\angle X + m\angle Y + m\angle Z$ =	$m\angle X = m\angle Y = m\angle Z$ =	⊔ XYZ

قول: مثلث کے تینوں زاویوں کی ناپوں کا جوڑ 180° ہوتا ہے۔ اس حقیقت کو ثابت کرنے کے لیے ہم متوازی خطوط کی خاصیتوں کا استعمال کریں۔



(تصویر 6.8)

دیا ہے: ABC ⊔ کے تین زاویہ $\angle 1$ ، $\angle 2$ اور $\angle 3$ ہیں۔ (تصویر 6.8) دکھاتا ہے کہ:

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ راس A سے ضلع BC کی متوازی خط l کھینچا۔

حل مرحلہ وجہ

(i) $\angle 1 = \angle 5$ $l \parallel \overline{BC}$ اور AB ایک خط تقاطع ہے۔ اس لیے زاویۂ متبادلہ برابر ہونا چاہیے۔

(ii) $\angle 2 = \angle 4$ $l \parallel \overline{BC}$ اور AC ایک خط تقاطع ہے۔ اس کے زاویۂ متبادلہ برابر ہونا چاہیے۔

i + ii

$\angle 1 + \angle 2 = \angle 5 + \angle 4$ $\Rightarrow$ دونوں جانب میں $\angle 3$ جوڑنے پر

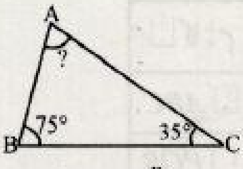
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 5 + \angle 4 + \angle 3$

$= 180°$ $\angle 3$ ، $\angle 4$ ، $\angle 5$ ایک خط پر بنے زاویے ہیں

اور ایک خط پر بنے زاویوں کا جوڑ 180° ہوتا ہے۔

اس لیے مثلث کے تینوں زاویوں کا جوڑ 180° یعنی دو زاویۂ قائمہ کے برابر ہوتا ہے۔

مثال(1): دیئے گئے مثلث میں $\angle B = 75°, \angle C = 35°$ تب $\angle A$ کی ناپ معلوم کیجئے۔



(تصویر 6.9)

ہم جانتے ہیں کہ مثلث کے تینوں زاویوں کا جوڑ 180° ہوتا ہے

اس لیے $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ یا $\angle A + 75^\circ + 35^\circ = 180^\circ$ یا

$\angle A + 110^\circ = 180^\circ$ یا $\angle A = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

مثال (2): دی گئی تصویر میں $\triangle ABC$ ایک مثلث قائمہ زاویہ ہے، جس میں زاویہ $\angle B$ قائمہ زاویہ ہے اور زاویہ C کی ناپ 60° ہے۔ زاویہ A کی ناپ معلوم کیجئے۔

مثلث زاویہ قائمہ $\triangle ABC$ میں

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \angle A + 90^\circ + 60^\circ = 180^\circ \quad (\because \angle B = +90^\circ)$$

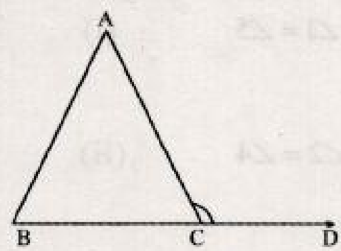
$$\Rightarrow \quad \angle A + 150^\circ = 180^\circ$$

$$= \angle A = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

اس لیے $\angle A = 30^\circ$

(تصویر 6.10)

6.2- زاویۂ خارجہ، متقابل زاویۂ داخلہ (Interior Angle and Opposite Interior Angle)



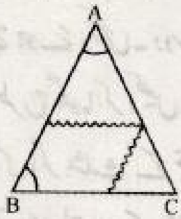
(تصویر 6.10)

تصویر 6.11 میں مثلث ABC میں BC ضلع کو C کی سمت میں D نقطہ تک بڑھایا گیا ہے۔ اس C نقطہ پر بنا زاویہ $\angle ACD$ مثلث کے خارجہ حصہ میں بنا زاویہ ہے۔ ایسا زاویے خارجہ دوسرے ضلعوں کو بڑھا کر بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔

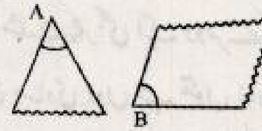
اس لیے $\angle ACD$ $\triangle ABC$ کے راس C پر بنا ایک زاویۂ خارجہ (Interior Angle) کہلاتا ہے۔ یہاں $\triangle ABC$ کے تینوں زاویوں میں $\angle C$ زاویۂ خارجہ ACD کے ساتھ منسلک زاویہ ہے اور $\angle A$ اور $\angle B$ زاویۂ خارجہ سے دور واقع زاویے ہیں، جو مثلث کے اندرونی حصہ میں ہے۔ اس C پر واقع زاویۂ خارجہ کے لیے $\angle C$ متصلہ ہے۔ زاویۂ داخلہ اور $\angle A$ اور $\angle B$ متقابل زاویۂ داخلہ ہے۔

آیئے اب زاویۂ خارجہ اور زاویۂ داخلہ میں رشتوں کو دیکھیں۔ ایک ٹریسنگ پیپر (Tracing Paper) پر $\triangle ABC$ کو ٹریس کریں۔ (تصویر 6.12) اب ٹریسنگ پیپر کو اس طرح دو حصوں میں بانٹئے

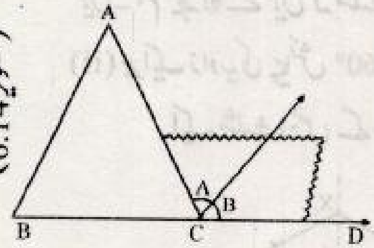
کہ $\angle A$ ایک حصے پر اور $\angle B$ دوسرے حصے پر ہو۔ (تصویر 6.13)



(تصویر 6.12)



(تصویر 6.13)



(تصویر 6.14)

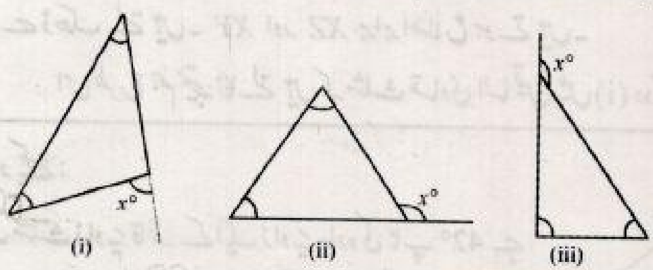
اب $\angle A$ اور $\angle B$ کو ملا کر $\angle ACD$ پر رکھیے۔ کیا یہ دونوں زاویے $\angle ACD$ کو پوری طرح ڈھک لیتے ہیں؟

تصویر 6.14 کو دیکھنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ $\angle A$ اور $\angle B$ ایک ساتھ مل کر $\angle ACD$ کو پوری طرح ڈھک لیتے ہیں۔

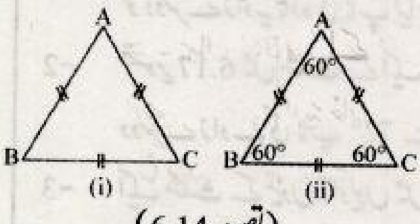
تب $m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$ یعنی کسی مثلث کا زاویۂ خارجہ اپنے دونوں متقابل زاویۂ داخلہ کے جوڑ کے برابر ہوتا ہے؟

خود کر کے دیکھیے:

1- نیچے دیئے گئے مثلثوں میں دیئے گئے زاویۂ خارجہ اور اُس سے متعلق متقابل زاویۂ داخلہ کو ناپئے اور اس اصول کی جانچ کیجئے اور x کی قیمت معلوم کیجئے۔



مثلث کے زاویہ اور ضلع میں رشتہ



(تصویر 6.14)

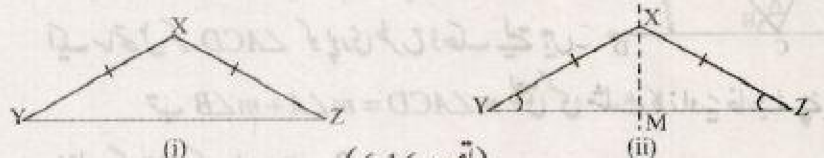
دو خاص مثلث: مثلث متساوی الاضلاع اور متساوی الساقین

ایک مثلث، جس کے تینوں ضلع کی ناپ برابر ہو، مثلث متساوی الاضلاع کہلاتا ہے۔

ایک مثلث متساوی الاضلاع ABC (تصویر 6.15) بنائیے۔ اس کا متبادل یعنی اسی ناپ کا

ایک اور مثلث متساوی الاضلاع کاغذ سے کاٹیے۔ پہلے مثلث کو غیر متحرک رکھتے ہوئے اس پر دوسرا مثلث اسے ڈھکتے ہوئے رکھیں۔ دوسرا مثلث پہلے کو پوری طرح ڈھک لیتا ہے۔ دوسرے مثلث کو پہلے مثلث پر کسی بھی طرح گھوما کر رکھیں۔ وہ دونوں مثلث پھر بھی ایک دوسرے کو ڈھک لیتے ہیں۔ کیا آپ دیکھ پاتے ہیں کہ اگر مثلث کے تینوں اضلاع مساوی ہوں تب تینوں زاویے بھی مساوی ناپ کے ہوتے ہیں۔ ہم نتیجہ نکالتے ہیں کہ مثلث متساوی الاضلاع میں (i) تینوں اضلاع مساوی ناپ کے ہوتے ہیں۔ (ii) ہر ایک زاویہ کی پیائش 60° ہوتی ہے۔

ایک مثلث، جس کے دو اضلاع کی ناپ مساوی ہو ایک مثلث متساوی الساقین کہلاتا ہے۔

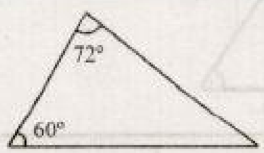


(تصویر 6.16)

کاغذ کے ٹکڑے سے ایک مثلث متساوی الاضلاع XYZ تراشیے، جس میں ضلع XY = ضلع XZ ہو (تصویر 6.16)۔ اسے اس طرح موڑیے جس سے راس Z راس Y پر منطبق ہو۔ اب X سے گزرنے والا خط XM اس مثلث کا متشاکل محور ہے۔ آپ دیکھتے ہیں کہ $\angle Y$ اور $\angle Z$ ایک دوسرے کو پورے طور سے ڈھک لیتے ہیں۔ XY اور XZ برابر اضلاع ہوتے ہیں۔

اس طرح ہم نتیجہ نکالتے ہیں کہ مثلث متساوی الساقین میں (i) دو ضلع برابر لمبائی کی ہوتی ہے۔

خود کر کے دیکھیے:



(تصویر 6.17)

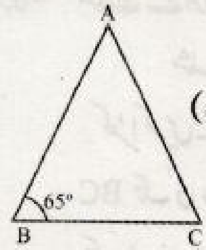
1- ایک مثلث زاویہ قائمہ کے ایک زاویۂ حادہ کی ناپ 42° ہے تو دوسرے زاویہ مادہ کی ناپ کیا ہوگی؟

2- تصویر 6.17 میں مثلث کے ایک زاویہ کی ناپ 60° اور دوسرے زاویے کی ناپ 72° ہے تب تیسرے زاویہ کی ناپ معلوم کیجیے۔

3- ایک مثلث کے تینوں زاویوں میں نسبت $3:4:5$ ہے۔ زاویوں کی ناپ معلوم کیجیے۔

4- ایک مثلث زاویۂ قائمہ کے دونوں زاویۂ حادہ مساوی ہیں۔ دونوں زاویۂ حادہ کی ناپ معلوم کیجیے۔

(ii) مساوی ضلعوں کے سامنے کا زاویہ مساوی ہوتا ہے۔

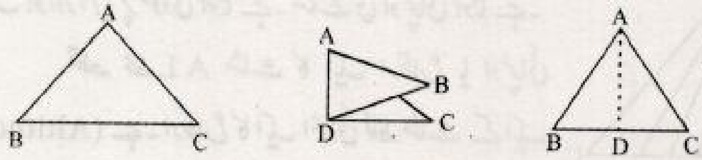


(تصویر 6.17)

5- تصویر 6.18 میں $AB = AC$ اور $\angle ABC = 65°$ تب
مثلث کے باقی دونوں زاویوں کی ناپ معلوم کیجئے۔

6.3- مثلث کا وسطانیہ (Median of a Triangle)

کاغذ کے ٹکڑے سے ایک مثلث ABC تراشیے۔



(تصویر 6.19)

اس کے راس B کو راس C پر رکھ کر موڑیئے۔ جس سے BC ضلع کو دو برابر حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ اور D نقطہ کو ضلع BC کے وسط پر دکھایا گیا ہے۔ اب راس A سے D کو ملایا گیا ہے۔ یہی مثلث کا خط وسطانیہ ہے۔ کیا آپ A B اور A C ضلع پر بھی خط وسطانیہ کھینچ سکتے ہیں؟ ہاں کھینچ سکتے ہیں۔ مثلث میں کل 3 خط وسطانیہ ہوتے ہیں، جو مثلث کے تینوں راسوں سے سامنے والے ضلعوں پر کھینچے جا سکتے ہیں۔

مثلث میں کسی ضلع کے نقطہ وسط کو مخالف راس سے ملانے والا خط ہی مثلث کا خط وسطانیہ ہے۔ تینوں خط وسطانیہ ایک دوسرے کو جس نقطہ پر کاٹتے ہیں وہ نقطہ مثلث کا مرکز ثقل (Centroid) کہلاتا ہے۔

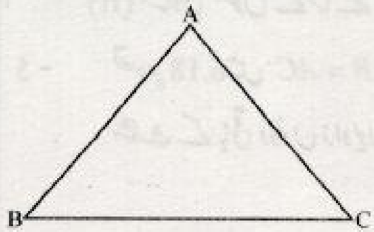
کچھ کریں:

ایک مثلث میں تینوں خط وسطانیہ کھینچئے اور بتایئے:

(i) کیا تینوں خط وسطانیہ ہم نقطہ ہوتے ہیں یعنی ایک ہی نقطہ سے گزرتے ہیں؟

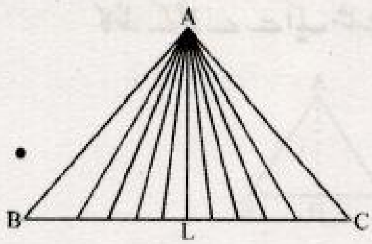
(ii) کیا ایک خط وسطانیہ پورے طور سے مثلث کے اندر ہوتا ہے؟ اگر آپ کے مطابق یہ سچ نہیں ہو تو اس حالت کو دکھانے کے ایک خاکہ کھینچئے۔

6.4- مثلث کے ارتفاع (Altitude of a Triangle)



(تصویر 6.20)

مثلث کی ساخت والے گتے کو ہموار زمین پر سیدھا کھڑا کریں۔ اس کی اونچائی کتنی ہے؟ یہ اونچائی راس A سے ضلع BC تک کی دوری ہے (تصویر 6.20)۔ راس A سے ضلع BC تک بہت سارے قطعہ خط کھینچے جا سکتے ہیں (تصویر 6.21)۔ ان میں سے مثلث کی اونچائی کون سا قطعہ خط ظاہر کرتی ہے؟



(تصویر 6.21)

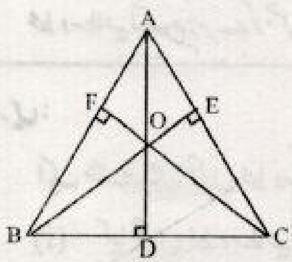
وہ قطعہ خط جو راس A سے سیدھا کھڑا نیچے BC تک ہو اور اس پر عمودی ہوتا ہے۔ مثلث کی اونچائی ہوتا ہے۔

قطعہ خط A L مثلث کا ایک ارتفاع یا اونچائی (Altitude) ہے۔ ارتفاع کا ایک انتہائی نقطہ مثلث کے ایک راس پر اور دوسرا انتہائی نقطہ ضلع اس راس کے مقابل پر واقع ہوتا ہے۔ ہر ایک راس سے ایک خط ارتفاع کھینچا جا سکتا ہے۔

تصویر 6.21 کو دیکھئے مثلث ABC میں راس A سے ضلع BC پر بہت سارے قطعہ خط کھینچے گئے ہیں۔ غور کیجئے سب سے چھوٹی لمبائی کا قطعہ خط کون ہوگا؟

AL راسؔ سے ضلع BC پر کھینچے گئے مختلف لمبائی کے قطعہ خطوط میں سؔب سے چھوٹا قطعہ خط ہے۔ AL راس A سے ضلع BC پر ڈالا گیا عمود ہے۔

ایک مثلث میں تین خط ارتفاع ہوتے ہیں۔ ہر ایک راس سے سامنے کے ضلع پر ایک ایک خط عمود کھینچا جاسکتا ہے، جو خطوط ارتفاع ہیں۔



(تصویر 6.22)

تصویر 6.22 میں BE، AD اور CF مثلث ABC کے تین خطوط ارتفاع ہیں۔ تینوں خطوط ارتفاع ایک نقطہ پر مل رہے ہیں۔ یہ نقطہ ہی مثلث کا ارتفاعی مرکز (Ortho Centre) ہے۔

خود کر کے دیکھئے:

1- ایک مثلث میں کتنے ارتفاع ہوتے ہیں؟

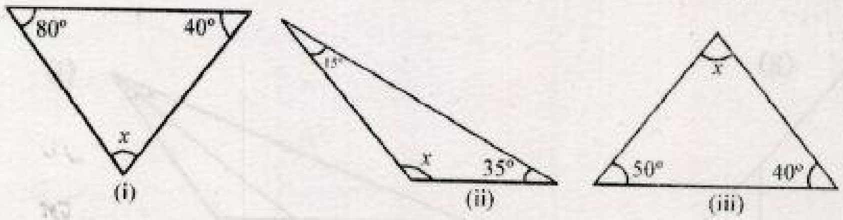
2- کیا کسی مثلث میں خط وسطانیہ اور مثلث کا خط ارتفاع ایک قطعہ خط ہو سکتا ہے؟

3- مثلث کے خط ارتفاع کا ایک انتہائی نقطہ مثلث کے راس پر ہوتا ہے۔ بتایئے دوسرا انتہائی نقطہ کہاں ہوگا؟

4- کیا کسی مثلث کے دو اضلاع اور اس کے خطوط ارتفاع ہو سکتے ہیں؟ اگر ہاں تو وہ مثلث کیسا ہوگا؟

سوالنامہ : 6.1

1- x کی قیمت معلوم کیجئے۔



2- ایک مثلث زاویۂ قائمہ کا ایک زاویۂ حادہ 35° کا ہے تو دوسرے زاویۂ حادہ کی قیمت معلوم کیجئے۔

3- ایک مثلث متساوی الاضلاع کے تینوں زاویہ کی ناپ کیا ہوگی؟

4- تصویر 6.23 کے مطابق ذیل کے سوالوں کے جواب دیجئے:

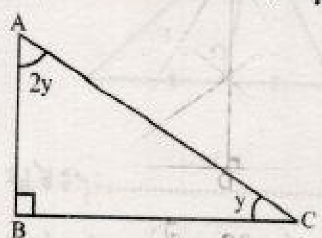
(i) y کی قیمت بتایئے۔ (ii) مثلث کی قسم بتایئے۔

(تصویر 6.23)

5- ایک مثلث کا پہلا زاویہ دوسرے اور تیسرے زاویہ کی ناپ کے جوڑ کے برابر ہے اور دوسرے زاویہ اور تیسرے زاویہ کی ناپ برابر ہے۔ اس مثلث کو آپ کیا نام دیں گے؟

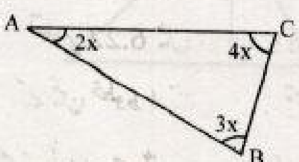
نیچے دیئے گئے مثلثوں میں نامعلوم زاویوں کی ناپ معلوم کیجئے:

6-



$\angle C =$ ....

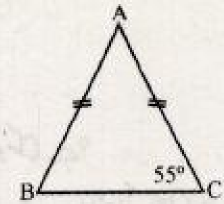
8-



$\angle B =$ ....

$\angle C =$ ....

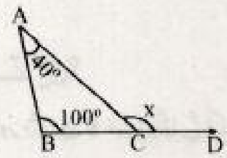
-8



$\angle A =$ ....

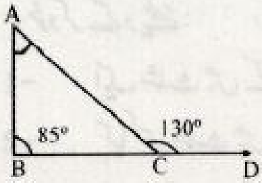
$\angle B =$ ....

-9



$x =$ ....

-10



$\angle A =$ ....

-11 نیچے دیئے گئے مثلثوں کے اندر دکھائی گئی ٹوٹی لائن (Dotted Lines) کے نام لکھئے۔ ساتھ میں وجوہات بھی لکھئے۔

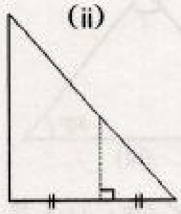
(i)

خط کا نام : زاویہ ناصف (Angle bisector)

وجوہات : ....

....

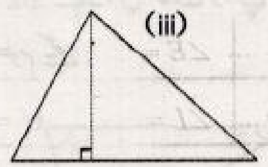
(ii)



خط کا نام : قاعدہ کا عمودی ناصف
(Perpendicular bisector)

وجوہات : کیوں کہ یہ قاعدہ دو برابر حصوں میں بانٹتا ہے اور قاعدہ پر عمود ہے۔

(iii)

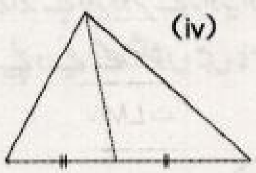


خط کا نام : ....

وجوہات : ....

....

(iv)



خط کا نام : ....

وجوہات : ....

....

12- ایک ایسا مثلث (کچی تصویر) بنائیے۔ جس کے ایک راس سے کھینچا گیا عمود مثلث کے باہر واقع ہو۔
آپ نے کیسا مثلث بنایا؟ مثلث زاویہ حادہ، مثلث زاویہ قائمہ، مثلث زاویہ منفرجہ یا دوسرا؟

13- نیچے ایک مثلث متساوی الاساقین ABC بنائیے، جس میں $AB = AC$ ہو۔ اس مثلث میں درج ذیل خط بنائیے:

(i) زاویہ A کے لیے ناصف (Bisector)

(ii) راس A کے سامنے والے ضلع پر عمود

(iii) راس A کے سامنے والے ضلع پر خط وسطانیہ

اب بتائیے:

(i) کیا یہ سبھی خطوط الگ الگ ہیں یا نہیں؟

(ii) ان خطوط کی کیا خصوصیات ہیں؟

14- ایک مثلث میں کسی ایک زاویہ کا خط ناصف (Bisector) اس کی ایک ارتفاعی خط بھی ہے۔ بتاؤ، مثلث کس طرح کا ہوگا؟ کیسے معلوم کیا؟

15- نیچے دی گئی جدول میں خالی جگہوں کو بھریں:

شمار	△ کا نام	ضلع کی ناپ	زاویہ کی ناپ	باقی زاویوں کی ناپ
-1	△ ABC	$AB = AC = 4cm., BC = 5cm$	$\angle B = 50°$	$\angle C = ...,\angle A = ...$
-2	△ PQR	$PQ = PR = 5cm., QR = 7cm$	$\angle R = ...$	$\angle P = ...,\angle Q = 45°$
-3	△ DEF	$DE = DF = 6cm., FE = 8cm$	$\angle E = ...$	$\angle D = 84°, \angle F = ...$
-4	△ LMN	$LM = MN = NL = 5cm.$	$\angle L = ...$	$\angle M = ...,\angle N = ...$

6.5- مثلث کا غیر مساواتی خاصیت

تصویر 6.24 میں ایک مثلث نما کھیت کے باہر کی طرف سے راستہ ہے۔ اس راستے سے متعلق کچھ سوالوں کے جواب جدول (Table) میں دیجئے۔

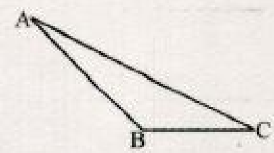
آپ کھڑے ہیں	آپ کو جانا ہے	جانے کے راستے		چھوٹا راستہ
		پہلا راستہ	دوسرا راستہ	
نقطہ A پر	نقطہ B پر	AB	AC+CB	AB
نقطہ B پر	نقطہ C پر			
نقطہ C پر	نقطہ A پر			

یہاں مثلث نما کھیت کے باہر کی طرف کے راستے کے بارے میں آپ نے دیکھا کہ:

$AC + CB > AB$

$BA + AC > BC$

$CB + BA > CA$



یہاں BC، AB اور CA اس مثلث نما کھیت کے ضلع ہیں۔

کچھ کریں:

1cm. سے لے کر 10cm. لمبائی کی بانس کی دس کچیاں لیجئے۔ اب ان کچیوں میں کوئی تین کچیاں ملا کر مثلث بنانے کی کوشش کیجئے اور جدول کو پورا کیجئے۔

کوشش کی گنتی	پہلے کماچی کی لمبائی	دوسری کماچی کی لمبائی	پہلی اور دوسری کماچی کی لمبائی کا جوڑ	تیسرے کماچی کی لمبائی	کیا مثلث بن رہا ہے؟
(i)					
(ii)					
(iii)					
(iv)					

ان کوششوں میں آپ نے دیکھا کہ آپ انھیں تین کچیوں سے مثلث بنا پا رہے ہیں۔ جن میں کسی دو کی لمبائی کا جوڑ تیسری کچی سے زیادہ ہے۔

مثال: تین ضلعوں کی ناپ بالترتیب لگ بھگ 2cm.، 3cm. اور 6cm. ہے۔ کیا ان تین ضلعوں سے مثلث بنانا

ممکن ہے؟

یہاں 2cm.+2cm< 6cm.

یعنی دو ضلعوں کا جوڑ تیسری سے کم ہے۔ اس لیے ان تین ضلعوں سے مثلث بنانا ممکن نہیں ہے۔

خود کر کے دیکھیے:

1- بتائیے، نیچے دیئے گئے ضلعوں کی ناپ سے کون کون سے مثلث بنانا ممکن ہے؟

(i)	1cm.,3cm.,6cm	(i)	4cm.,8cm.,9cm
(iii)	3cm.,5cm.,8cm	(iv)	3cm.,4cm.,5cm

6.6- پائتھاگورس مسئلہ

پائتھاگورس ایک یونانی فلسفی تھے۔ ان کی پیدائش چھٹی صدی قبل مسیح ہوئی تھی۔ انھوں نے مثلث زاویۂ قائمہ کے ضلعوں کی لمبائیوں کے بیچ رشتہ قائم کرنے کے لیے ایک مسئلہ کو ثابت کیا، جسے پائتھاگورس مسئلہ کے نام سے جانا جاتا ہے۔ اس مسئلہ کے برابر ایک دوسرے مسئلہ کے بارے میں ہندوستان کے ماہر ریاضیات بودھاین نے سنہ ۱۰۰۰ قبل مسیح میں معلومات فراہم کی۔ ایسا سمجھا جاتا ہے کہ سنہ ۲۰۰۰ قبل مسیح مصر اور بیلون کے باشندوں کو مثلث زاویۂ قائمہ کے ضلعوں کے درمیان رشتہ کے بارے میں معلومات تھی۔ یوکلیڈ (Euclid) نے ۳۰۰ قبل مسیح اپنی شہرت یافتہ کتاب "The Elements" میں اس مسئلہ کو اُجاگر کیا۔ آگے ہم پائتھاگورس مسئلہ کے بارے میں تفصیل سے جانیں گے۔

زاویۂ قائمہ مثلث

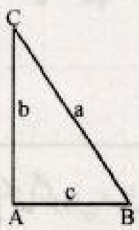
زاویہ کی بنیاد پر مثلثوں کی درجہ بندی کرتے وقت ہم نے دیکھا ہے کہ جس مثلث کا ایک زاویہ 90° ہو وہ مثلث زاویۂ قائمہ کہلاتا ہے۔ مثلث زاویۂ قائمہ کے ضلعوں کو خاص نام دیا جاتا ہے۔ زاویۂ قائمہ کے سامنے والے ضلع کو وتر (Hypotenuse) کہتے ہیں، جو کہ تین ضلعوں میں سے سب سے بڑا ضلع ہوتا ہے۔ دوسرے دو ضلعوں کو مثلث کے پاؤں (Legs) کی صورت میں جانتے ہیں۔ ان میں سے ایک قاعدہ (Base)، دوسرا ارتفاع یا اونچائی

(تصویر 6.25)

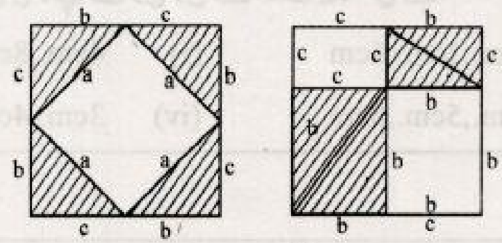
(Perpendicular) کہا جاتا ہے۔

کچھ کریں:

کسی بھی ناپ کا ایک مثلث زاویۂ قائمہ بنائیے۔ ساتھ ہی اس کے اور 7 متبادل لیجئے۔ اس طرح اب آپ کے پاس ایک ہی ناپ کے 8 مثلث ہیں۔ ان سبھی ضلعوں میں وتر کو a اور دوسرے پاؤں (Legs) کو b اور c مانیں۔



(تصویر 6.27)



(تصویر 6.27)

اب ایک جیسے ناپ کے دو مربع بنائیے، جن کے ضلعوں کی ناپ b+c کے برابر ہو۔ اب 4 مثلث کو پہلے مربع میں اور 4 مثلث کو دوسرے مربع میں تصویر 6.35 کے مطابق قائم کیجئے۔ اب آپ کو معلوم ہے کہ دونوں مربع برابر رقبہ کے ہیں۔ پہلے مربع کا ڈھکا ہوا رقبہ= دوسرے مربع کا ڈھکا ہوا رقبہ۔

$$a^2 = b^2 + c^2$$

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ مثلث زاویۂ قائمہ میں وتر پر بنا مربع دوسرے دو ضلعوں پر بنے مربعوں کے جوڑ کے برابر ہوتا ہے۔ یہی پائتھا گورس مسئلہ ہے۔

خود کر کے دیکھیے:

مختلف ناپوں کے تین مثلث زاویۂ قائمہ بنائیے اور ان کے ضلعوں کی ناپ ذیل جدول کو پورا کیجئے۔

مثلث (i) مثلث (ii) مثلث(iii)

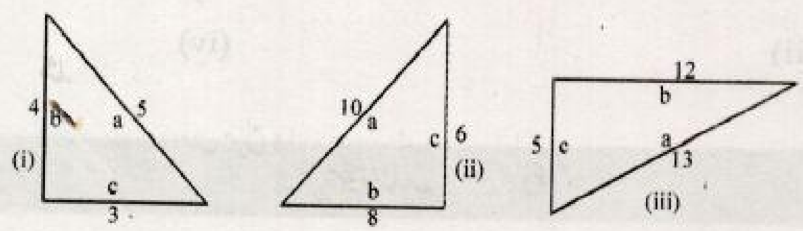
جدول

مثلث کا نام	وتر کی ناپ	پہلا پاؤں ضلع کی ناپ	دوسرے پاؤں ضلع کی ناپ	a^2	b^2	c^2	b^2+c^2	کیا $a^2=b^2+c^2$
1-								
2-								
3-								

یہاں جدول میں ہم نے دیکھا کہ مثلث زاویۂ قائمہ میں $a^2=b^2+c^2$

یعنی زاویۂ مثلث میں وتر کا مربع دوسرے دوضلعوں کے مربعوں کے جوڑ کے برابر ہوتے ہیں۔

2- آیئے اب ذیل کے مثلثوں پر غور کریں:



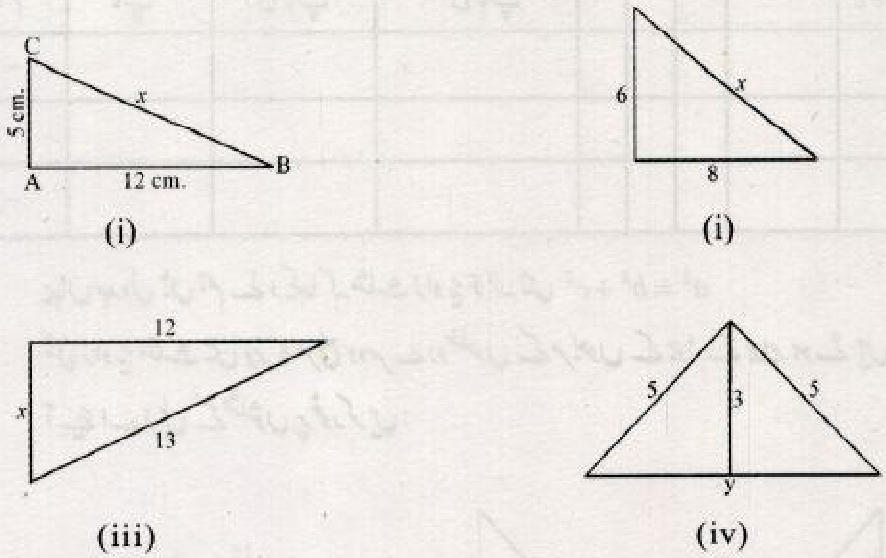
(تصویر 6.28)

تصویر 6.28 میں بنے تین مثلثوں کے ضلعوں کی ناپ کے مطابق ذیل کے جدول کو پورا کیجئے۔

مثلث کا نام	a^2	b^2	c^2	b^2+c^2	کیا $a^2=b^2+c^2$	ضلع a کے سامنے کے زاویہ کی ناپ	مثلث کی قسمیں
(i)							
(ii)							
(iii)							

3- ایک مثلث کے ضلعوں 6cm. ، 8cm. اور 10cm. لمبی ہے۔ ثابت کیجئے کہ کیا وہ زاویۂ قائمہ مثلث ہے۔

4- ذیل کے مثلثوں میں نامعلوم ضلعوں کی ناپ معلوم کیجئے:



سوالنامہ : 6.2

1- نیچے تین اعداد کا مجموعہ دیا گیا ہے۔ بتایئے کہ کون سا مجموعہ مثلث کے ضلعوں کو ظاہر کرتی ہیں۔

(i) (3, 4, 5) (ii) (2, 3, 4)

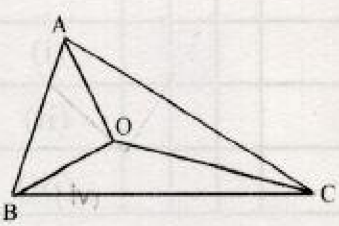
(iii) (1, 2, 3) (iv) (1,3, 5)

2- تصویر 6.29 میں O نقطہ مثلث ABC کے اندر واقع ہے۔ بتایئے کہ نیچے دیے گئے اقوال میں کون صحیح ہے اور کون غلط؟

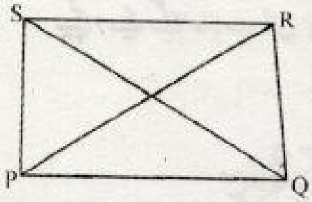
(i) $AO+OB<AB$

(ii) $AO+OC>AC$

(iii) $BO+OC=BC$



(تصویر 6.29)



(تصویر 6.30)

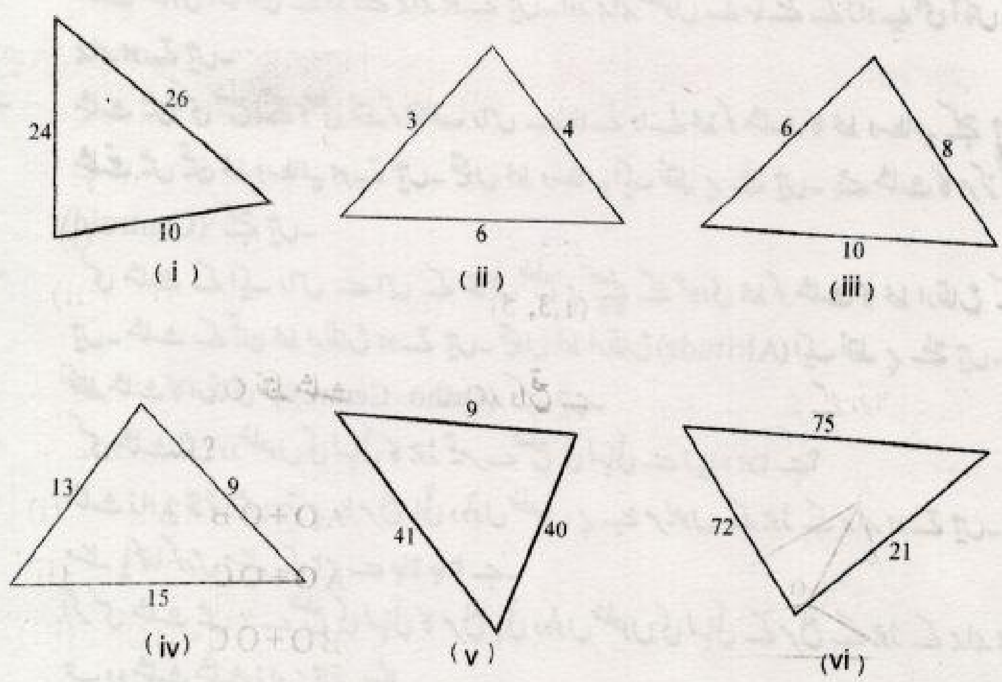
3- تصویر 6.30 میں PQRS ایک ذو اربعۃ الاضلاع ہے۔
تب دکھایئے کہ

$$PQ+QR+RS+SP>PR+SQ$$

4- ایک مثلث کے دو ضلعوں کی ناپ 10 سینی میٹر اور 14 سینٹی میٹر ہے۔ اس مثلث کے تیسرے ضلع کی سب سے کم اور سب سے زیادہ ناپ کی حد فاصل کیا ہوگی؟

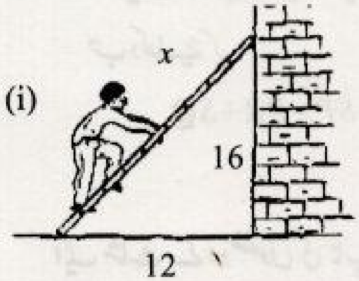
5- ABC ایک مثلث ہے جس کا $\angle A$ زاویۂ قائمہ ہے۔ اگر $AB = 10$ سینٹی میٹر $AC = 24$ سینٹی میٹر، تب وتر BC کی قیمت کیا ہوگی؟

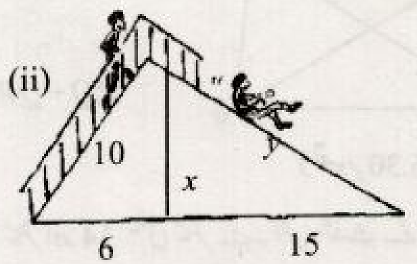
6- نیچے دیئے گئے مثلثوں میں سے کون کون سے مثلث ،مثلث قائم الزاویہ ہیں؟ ان کے نیچے صحیح کا نشان (✓) لگایئے۔ ساتھ ہی مثلث کا جو زاویہ قائمہ ہے اسے °90 لکھ کر نشاندہی کیجئے۔



☆ تصویر (i)، (iii)، (iv) اور (vi) کو ضلع کے ناپ کے مطابق مثلث قائم الزاویہ ہیں۔

7- نیچے دیئے گئے حالات میں 'x' اور 'y' کا قیمت نکالیے۔





$x =$ ______ $x =$ ______ $y =$ ______

ہم نے سیکھا

1- مثلث میں تین ضلع، تین زاویہ اور تین راس ہوتے ہیں۔
2- مثلث کے تینوں زاویوں کا جوڑ دو زاویہ قائمہ یعنی 180° ہوتا ہے۔
3- مثلث متساوی الاضلاع کے تینوں ضلعے آپس میں برابر ہوتے ہیں۔
4- مثلث متساوی الساقین کے دو ضلعے برابر ہوتے ہیں۔ اور برابر ضلعوں کے سامنے کے زاویے بھی آپس میں برابر ہوتے ہیں۔
5- مثلث میں کسی ضلع کے وسطی نقطہ کو مخالف راس سے ملانے والے خط کو مثلث کا خط وسطانیہ کہتے ہیں؟ مثلث میں تین خط وسطانیہ ہوتے ہیں۔ تینوں خط وسطانیہ ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ جسے مثلث کا مرکز ثقل (Centroid) کہتے ہیں۔
6- کسی مثلث کے ایک راس سے اس کے مقابل ضلع پر کھینچے گئے عمودی خط کو مثلث کا خط ارتفاع کہتے ہیں۔ مثلث کے تین خط ارتفاع ہوتے ہیں۔ تینوں خط ارتفاع (Altitude) ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ وہ نقطہ مثلث کا ارتفاعی مرکز (Ortho Centre) کہتے ہیں۔
7- کسی مثلث میں دو ضلعوں کی لمبائی کا جوڑ تیسرے ضلع کی لمبائی سے زیادہ ہوتا ہے؟
8- مثلث زاویہ قائمہ میں وتر پر بنا مربع باقی دونوں ضلعوں پر بنے مربعوں کے جوڑ کے برابر ہوتے ہیں۔ یہ مسئلہ پائتھاگورس مسئلہ کے نام سے جانا جاتا ہے۔
9- اگر کسی مثلث میں بڑے ضلع کی لمبائی کا مربع باقی دونوں ضلعوں کی لمبائی کے مربع کے جوڑ کے برابر ہو، تب وہ مثلث مثلث زاویہ قائمہ ہوگا۔

☆ کسی بھی مثلث میں ایک سے زیادہ زاویہ قائمہ یا زاویہ منفرجہ نہیں ہوسکتا۔

باب: 7

مماثلت (Congruency)

تمہید:

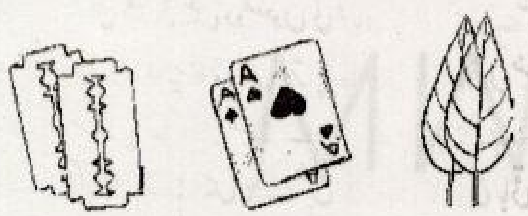
(تصویر 7.1)

پایل اپنی تجوری میں رکھے سکّوں کی گنتی کر رہی تھی۔ تبھی اس کا چھوٹا بھائی پلّو وہاں پہنچا اور اس کو گننے میں مدد کرنے لگا۔ پایل نے اسے سکّوں کو چھانٹنے کو کہا۔ اسی درمیان پایل کو اس کی ماں نے کسی کام سے اپنے پاس بلا لیا۔ کام ختم کر جب پایل واپس اپنے بھائی کے پاس لوٹی تو وہ یہ دیکھ کر حیرت زدہ ہوگئی کہ پلّو نے سکّوں کو صحیح ڈھنگ سے چھانٹ کر رکھا تھا۔ اس نے پلّو سے چھانٹنے کا طریقہ پوچھا۔ پلّو نے بتایا کہ میں نے سکّوں کو ایک کے اوپر ایک رکھ کر دیکھا جو سکّے آپس میں ایک دوسرے کو پوری طرح ڈھک رہے تھے، انھیں ایک ساتھ رکھا۔

آپ بھی اپنے آس پاس میں اسی طرح پورے طور سے ایک دوسرے کو ڈھکنے والی چیزوں کو تلاش کیجئے۔

7.1- متماثل شکل اور مماثلت (Congruent Figure and Congruency)

ایک طرح کے دو بلیڈ لیجئے۔ دونوں کو ایک دوسرے پر رکھ کر دیکھئے۔ کیا وہ دونوں ایک دوسرے کو ڈھک لیتے ہیں۔ ایک ہی ساخت کی تاش کے دو پتے لیجئے۔ ایک پتے کو دوسرے کے اوپر رکھئے۔ آپ پائیں گے کہ دونوں بلیڈ اور تاش کے پتے ایک دوسرے کو پوری طرح سے ڈھک لیتے ہیں۔ اس کا مطلب ہے کہ دونوں پتے یا بلیڈ ایک ہی ساخت اور پیمائش کے ہیں۔ ایسی چیزیں متماثل (Congruent) کہلاتی ہیں۔ اور دو چیزوں کی متماثل ہونے کا تعلق مماثلت (Congruency) کہلاتا ہے۔



(تصویر 7.2)

دو شکلوں کی مماثلت کو ہم نشان $\cong$ سے دکھاتے ہیں۔ اگر A اور B دو شکلیں متماثل ہیں۔ تب ہم $A \cong B$ لکھتے ہیں۔

کچھ کریں:

کسی دو چیزوں کے نام لکھیے ، جو

(الف) ایک دوسرے کو پورا پورا ڈھکتی ہوں ....

....

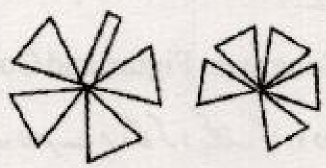
(ب) ایک دوسرے کو پورا پورا نہیں ڈھکتی ہوں ....

....

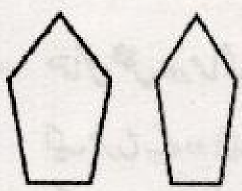
-2 اپنی کاپی کے صفحہ کے نیچے کاربن لگایئے اور جس صفحہ کے نیچے آپ نے کاربن لگایا ہے اس صفحہ پر کوئی شکل بنایئے۔ اب بتایئے کاربن کے نیچے والے صفحہ پر بنی ساخت اوپر صفحہ پر بنی ساخت یا شکل کی متماثل ہیں یا نہیں؟

-3 نیچے کچھ شکلوں کے جوڑے دیئے گئے ہیں۔ بتایئے کہ یہ متماثل(Congruent) ہیں یا نہیں؟

(i)

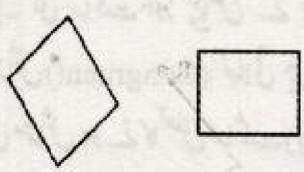


(ii)



(iii)

(iv)



....

7.2 - اقلیدسی شکلوں کی مماثلت

جس طرح ایک تصویر کو اس کی ساخت اور پیمائش میں تبدیل کئے بغیر ایک جگہ سے اٹھا کر دوسری جگہ رکھ کر ہم نے مماثلت کی جانچ کی، اُسی طرح اقلیدسی شکلوں کو بھی ایک کے اوپر دوسری رکھ کر جانچ کر سکتے ہیں۔ لیکن دھیان رہے کہ ان کی ساخت (پیمائش) اور بناوٹوں میں تبدیلی نہیں کر سکتے ہیں۔ آیئے اب کچھ اقلیدسی شکلوں کی مماثلت کے بارے میں غور کریں۔

7.2.1 - قطعہ خطوط کی مماثلت

نیچے دیئے گئے قطعہ خطوط کے دو جوڑے کو دیکھئے:

(تصویر 7.3)

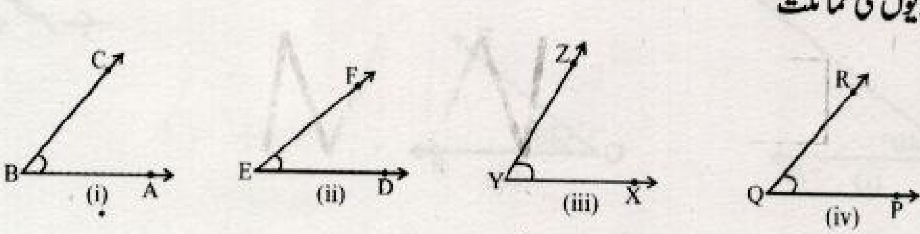
دونوں جوڑوں میں ایک قطعہ خطوط کو ٹریسنگ پیپر پر ٹریس کر لیجئے اور دوسرے پر رکھ کر دیکھئے کہ کون سے جوڑے متماثل ہیں؟

آپ دیکھیں گے کہ پہلا جوڑا متماثل ہے، جب کہ دوسرا نہیں۔ ان کی لمبائی کی پیمائش کیجئے کہ کس جوڑے کی لمبائی یکساں ہے؟ یہی عمل کچھ اور قطعہ خطوط کے جوڑے کے ساتھ کر کے دیکھئے۔

اگر دو قطعہ خطوط کی لمبائی برابر ہے تو وہ متماثل ہوں گے۔ اسی طرح اگر دو قطعہ خطوط متماثل ہیں تو ان کی لمبائیاں بھی برابر ہوں گی۔

اوپر تصویر 7.3 میں $\overline{AB} = \overline{CD}$ اور $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

7.2.2 - زاویوں کی مماثلت



(تصویر 7.4)

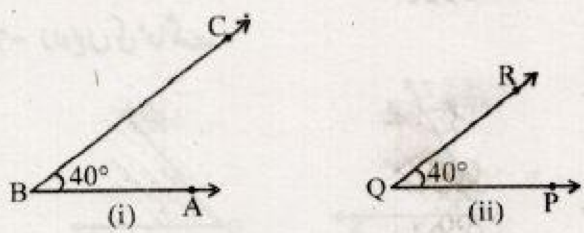
اوپر تصویر 7.4 میں چاروں زاویوں کو دیکھئے۔ یہ مختلف پیمائشوں کے ہیں۔ (i) میں بنے زاویے کو ٹریسنگ پیپر (Tracing Paper) پر ٹریس کیجئے اور پھر انطباق کے قاعدہ سے اس ٹریس کئے گئے زاویوں سے باری باری (i)، (iii) اور (iv) میں بنے زاویوں کو ڈھکنے کی کوشش کیجئے۔ مثال کے طور پر دوسرے نمبر کے زاویہ کو ڈھکنے کے لیے سب سے پہلے نقطہ A کو D پر اور $\overline{BA}$ کو $\overline{ED}$ پر رکھئے اور بتایئے، کیا $\overline{BC}$ ، $\overline{EF}$ پر آیا؟ اسی طرح دوسرے دو زاویوں (iii) اور (iv) پر بھی ڈھکنے کی کوشش کیجئے۔ $\angle ABC$ نے $\angle PQR$ کو پوری طرح سے ڈھک لیا۔ یعنی $\angle ABC$ اور $\angle PQR$ متماثل ہیں۔ یہاں ہم نے دیکھا کہ $\angle ABC$ ، $\angle DEF$ اور $\angle XYZ$ کو نہیں ڈھک پایا۔ یعنی $\angle ABC$ ، $\angle DEF$ اور $\angle XYZ$ کے متماثل نہیں ہیں۔ اسے ہم اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں۔ $\angle ABC \cong \angle PQR$ اور

$$m\angle ABC = m\angle PQR$$

ہم کہہ سکتے ہیں کہ دو زاویوں کی پیمائش اگر برابر ہوں تو وہ آپس میں متماثل ہوتے ہیں اگر دو زاویے متماثل ہوں تو ان کی پیمائش برابر ہوتی ہیں۔

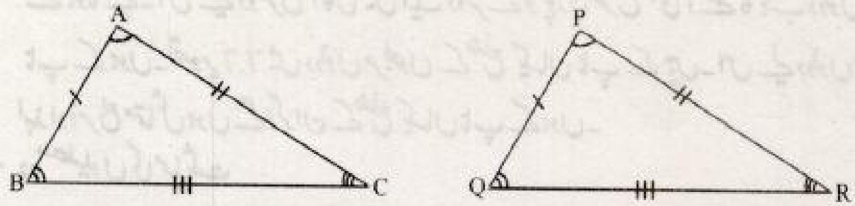
کیا آپ ایسے زاویوں کا جوڑا بنا سکتے ہیں، جن کے ضلع کی پیمائش برابر نہیں ہو پھر بھی وہ متماثل ہوں۔ آیئے اب تصویر 7.5 میں بنے زاویوں پر غور کریں۔

$\angle PQR$ کو جب $\angle ABC$ پر منطبق کرتے ہیں تب شعاع $\overline{QP}$ شعاع $\overline{BA}$ پر اور شعاع $\overline{QR}$ شعاع $\overline{BC}$ پر پڑتی ہے لیکن شعاع $\overline{QR}$ شعاع $\overline{BC}$ کو پوری طرح نہیں ڈھک پاتی ہے اور شعاع $\overline{BC}$ زیادہ لمبی معلوم ہوتی ہے۔ اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\angle ABC$ ، $\angle PQR$ سے بڑا ہے۔ لیکن $\overline{BC}$ صرف زاویہ کی سمت کو بتلاتا ہے، لمبائی کو نہیں۔ یہاں زاویوں کی پیمائش یکساں ہے۔ اس لیے $\angle PQR$ ، $\angle ABC$ کے متماثل ہیں یعنی $\angle PQR \cong \angle ABC$ ۔ اس لیے زاویوں کی مماثلت صرف ان کی پیمائشوں کی برابر پر منحصر ہے۔



(تصویر 7.5)

7.2.3- مثلثوں کی مماثلت



(تصویر 7.6)

تصویر 7.6 میں بنے دونوں مثلث کو غور سے دیکھئے۔ یہ دونوں مثلث برابر ساخت اور یکساں شکل کے ہیں۔ $\angle ABC$ کو ٹریسنگ پیپر پر ٹریس کر $\angle PQR$ پر منطبق کیجئے۔ کیا $\angle ABC$ اور $\angle PQR$ ایک دوسرے کو آپس میں پوری طرح ڈھک لیتے ہیں۔ اگر ہاں تو دونوں مثلث متماثل ہیں۔ اسے اس طرح لکھیں گے:

$$\angle ABC \cong \angle PQR$$

یہاں $\angle ABC$ کو $\angle PQR$ پر بالمقام کرتے وقت آپ نے راس P کے اوپر راس A، راس Q کے اوپر راس B اور راس R کے اوپر راس C کو رکھا تھا، جس سے $\angle P$ پر $\angle A$، $\angle Q$ پر $\angle B$، $\angle R$ پر $\angle C$ بالمقام ہوئے اور ضلع $\overline{PQ}$ پر ضلع $\overline{AB}$، ضلع $\overline{QR}$ پر ضلع $\overline{BC}$ اور ضلع $\overline{RP}$ پر ضلع $\overline{CA}$ بالمقام ہوگی۔ یہ سبھی راس، زاویہ اور اضلاع دونوں مثلثوں کے نظیری حصے ہیں۔ اسے ہم اس طرح ظاہر کرتے ہیں:

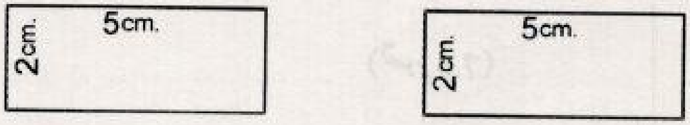
نظیری راس	A اور P، B اور Q، C اور R
نظیری مثلث	$\angle A$ اور $\angle P$، $\angle B$ اور $\angle Q$، $\angle C$ اور $\angle R$
نظیری اضلاع	$\overline{AB}$ اور $\overline{PQ}$، $\overline{BC}$ اور $\overline{QR}$، $\overline{CA}$ اور $\overline{RP}$

7.2.4- دو مربعوں کی مماثلت

(تصویر 7.7)

سبھی مربع کی ساخت ایک ہی طرح کے ہوتے ہیں۔ مربعوں کی ناپ کا تعین ان کی ضلع کی لمبائی سے ہوتا ہے۔ اس لیے دو مربع آپس میں ایک دوسرے کو پوری طرح تبھی ڈھکے گا جب دونوں کے ضلع برابر ناپ کے ہوں۔ تصویر 7.7 میں دونوں مربعوں کے ضلع یکساں ناپ کے ہیں۔ اس لیے دونوں متماثل ہیں۔
لہٰذا دو مربع متماثل ہوں گے اگر ان کے ضلع یکساں ناپ کے ہوں۔

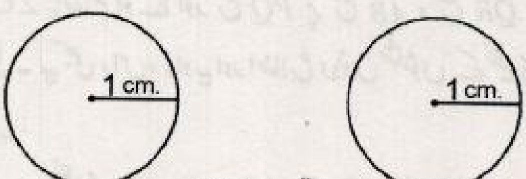
7.2.5 - دو مستطیلوں کی مماثلت



(تصویر 7.8)

مستطیل کی ساخت اور ناپ کا تعین اس کی لمبائی اور چوڑائی سے ہوتا ہے۔ اگر دو مستطیلوں کی لمبائی اور چوڑائی برابر ہوں تو وہ ایک دوسرے کو پوری طرح سے ڈھک لیں گے۔ یعنی وہ ساخت اور ناپ میں بھی برابر ہوں گے۔ تصویر 7.8 میں دونوں مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی برابر ہیں۔ وہ ساخت اور ناپ میں بھی برابر ہیں۔ اس لیے یہ ایک دوسرے کو پوری طرح سے ڈھک لیتے ہیں۔ اس لیے دونوں مستطیل متماثل ہیں۔ اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ دو مستطیل تبھی متماثل ہوں گے، جب ان کی لمبائی اور چوڑائی برابر ناپ کے ہوں۔
لہٰذا دو مستطیل متماثل ہوں گے اگر ان کی لمبائی اور چوڑائی یکساں ناپ کے ہوں۔

7.2.6 - دائروں کی مماثلت



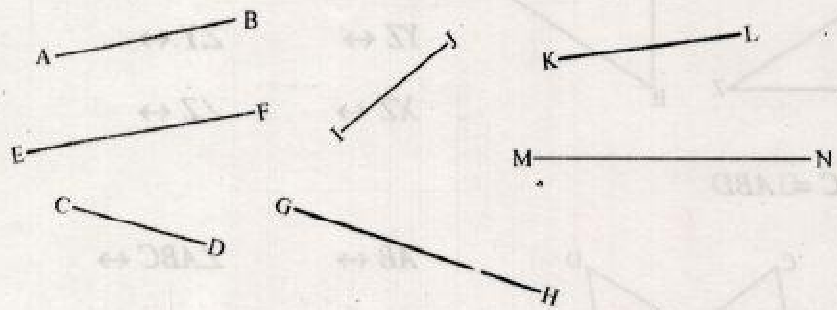
(تصویر 7.8)

سبھی دائرے ساخت میں یکساں ہوتے ہیں۔ ان کی پیائش کا تعین نصف قطر (Radius) سے ہوتا ہے۔ جس دائرہ کا نصف قطر جتنا زیادہ ہوگا اس کی پیائش بھی اتنی ہی زیادہ ہوگی۔ یہاں تصویر 7.9 میں دو یکساں نصف قطر والے دائرے ہیں۔ اگر پہلے دائرہ کو ٹریس کر دوسرے پر منطبق کیا جائے تو دونوں ایک دوسرے کو پوری طرح سے ڈھک لیں گے۔ اس لیے دونوں دائرے متماثل ہیں۔

دو دائرہ متماثل ہوں گے، اگر ان کا نصف قطر برابر ہو۔

سوالنامہ : 7.1

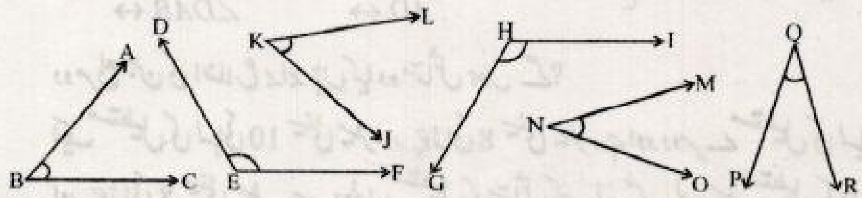
1- (i) تصویر 7.10 میں متماثل قطعہ خط کو الگ کیجئے۔ (آپ ٹریس کر کے دیکھئے)



(تصویر 7.10)

(ii) متماثل قطعہ خطوط کو ناپئے۔ ان کی ناپ کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟

2- (i) نیچے دی گئی تصویر میں متماثل زاویوں کو الگ کیجئے۔ (زاویوں کو ٹریس کر کے معلوم کیجئے)



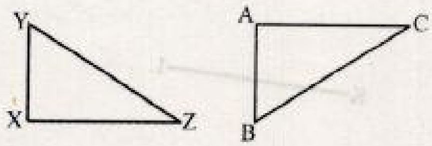
(تصویر 7.11)

(ii) ان میں سے متماثل زاویوں کو ناپئے۔ آپ ان کی ناپ کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟

3- $\angle ABC$ اور $\angle DEF$ متماثل ہیں۔ اگر $\angle ABC$ کی ناپ $70°$ ہو تو $\angle DEF$ کی ناپ کیا ہوگی؟

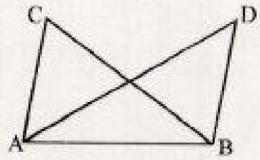
4- نیچے دیئے گئے متماثل مثلثوں کے ہر ایک جوڑے میں نظیری اضلاع اور نظیری زاویے بتایئے :

(i) $\triangle XYZ \cong \triangle ABC$



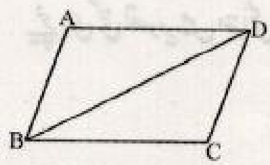
ضلع	زاویہ
$XY \leftrightarrow$	$\angle X \leftrightarrow$
$YZ \leftrightarrow$	$\angle Y \leftrightarrow$
$XZ \leftrightarrow$	$\angle Z \leftrightarrow$

(ii) $\triangle ABC \cong \triangle ABD$



$AB \leftrightarrow$	$\angle ABC \leftrightarrow$
$BC \leftrightarrow$	$\angle BCA \leftrightarrow$
$AC \leftrightarrow$	$\angle BAC \leftrightarrow$

(iii) $\triangle ABD \cong \triangle CBD$



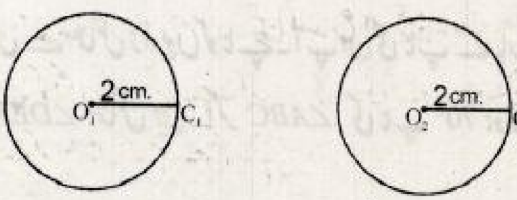
$AB \leftrightarrow$	$\angle ABD \leftrightarrow$
$BD \leftrightarrow$	$\angle BDA \leftrightarrow$
$AD \leftrightarrow$	$\angle DAB \leftrightarrow$

5- دو مربع جن کی اضلاع برابر ہیں کیا وہ متماثل ہوں گے؟

6- ایک مستطیل کی لمبائی 10 سینٹی میٹر اور چوڑائی 8 سینٹی میٹر ہے اور دوسرے مستطیل کی لمبائی 12 سینٹی میٹر اور چوڑائی 8 سینٹی میٹر ہے۔ دونوں مستطیل کو متماثل کرنے کے لیے پہلے مستطیل کی لمبائی کو کتنا بڑھانا پڑے گا؟

7- تصویر 7.12 میں بنے دو دائرے کیا متماثل ہوں گے۔ اگر ہاں تو کیوں؟

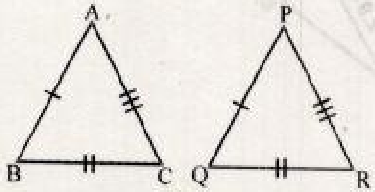
(تصویر 7.12)



7.3- دو مثلثوں کے متماثل ہونے کی شرط

جب دو مثلث متماثل ہوتے ہیں تو ان کے نظیری اضلاع اور نظیری زاویے آپس میں برابر ہوتے ہیں۔ اُسی طرح دو مثلثوں کے نظیری اضلاع اور نظیری زاویے آپس میں برابر ہوں تو دونوں مثلثوں متماثل ہوتے ہیں۔

تصویر 7.13 میں دو مثلث ABC اور PQR دیئے گئے ہیں جو متماثل ہیں۔



تب $\overline{AB} = \overline{PQ}, \overline{BC} = \overline{QR}, \overline{AC} = \overline{PR}$

اور $\angle ABC = \angle PQR, \angle BCA = \angle QRP$

اور $\angle CAB = \angle RPQ$ ہوگا۔

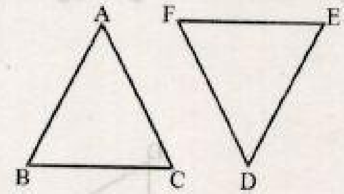
اسی طرح تصویر 7.14 میں

$\overline{AB} = \overline{DE}, \overline{BC} = \overline{EF}, \overline{CA} = \overline{FD}$

$\angle ABC = \angle DEF, \angle BCA = \angle EFD$

اور $\angle EAB = \angle FDE$ ہے

تب $\triangle ABC = \triangle DEF$

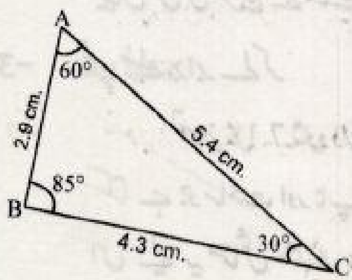


(تصویر 7.14)

اسی طرح دو مثلثوں میں مماثلت کے لیے ضروری حصوں میں دونوں مثلثوں کے تینوں زاویے اور تینوں اضلاع شامل ہوتے ہیں۔

غور کیجئے قطعہ خط، زاویے، مربع، مستطیل اور دائرہ کی طرح دو مثلث کی مماثلت ظاہر کرنے کے لیے یا دکھانے کے لیے مثلث کے سبھی 6 حصوں میں برابری دکھانی ہوگی یا کچھ حصہ سے کام چل جائے گا۔ آیئے اسے کر کے دیکھیں۔

کچھ کریں:

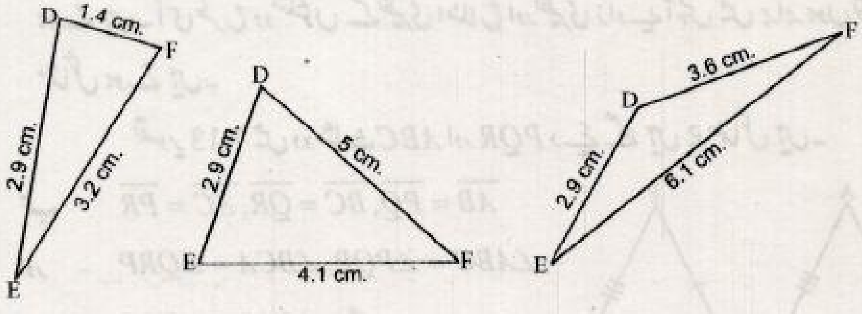


(تصویر 7.15)

یہاں تصویر 7.15 میں ایک مثلث (Triangle) بنایا گیا ہے اور اس کے سبھی 6 حصوں (تین اضلاع اور تین زاویے) کی ناپ کو بھی دکھایا گیا ہے۔ آپ باری باری سے ان کی ناپ کو لے کر دیکھیں کہ کم سے کم کتنے حصوں کی برابری

کے بعد اس کے متماثل ایک مثلث بنایا جا سکتا ہے؟

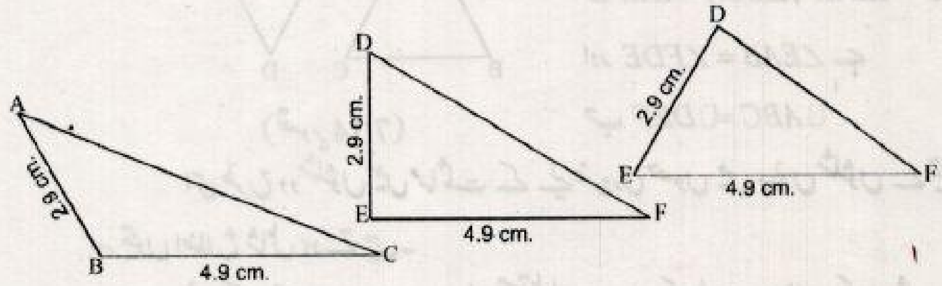
1- ایک ضلع کی ناپ برابر لے کر



(تصویر 7.16)

تصویر 7.16 کی طرح کئی قسم کے مثلث بنائے جا سکتے ہیں۔ لیکن وہ △ABC کے متماثل ہوں ضروری نہیں۔

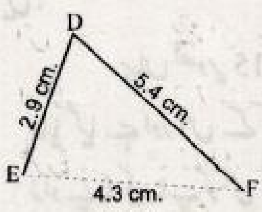
2- دو ضلعوں کی برابر ناپ لے کر



(تصویر 7.17)

یہاں بھی کئی طرح کے مثلث بنائے جا سکتے ہیں۔ لیکن وہ △ABC کے متماثل ہوں، ضروری نہیں ہے۔

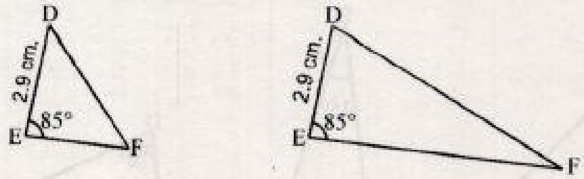
3- تین ضلعے برابر لے کر



(تصویر 7.18)

تصویر 7.18 میں اس طرح کا ایک ہی مثلث بنایا جا سکتا ہے جو ساخت اور ناپ میں △ABC کے برابر ہوگا۔ اس لیے یہ متماثل مثلث ہوگا۔ یہ ضلع ضلع ضلع (SSS) مماثلت کی شرط کہلاتا ہے۔

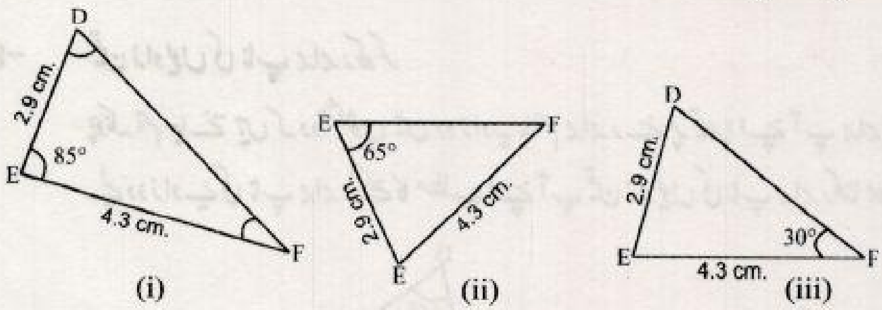
4- ایک ضلع اور ایک زاویہ کی ناپ برابر لے کر



(تصویر 7.19)

اس حالت میں بھی کئی مثلث بنائے جا سکتے ہیں، جو ABC کے متماثل ہوں۔ یہ ضروری نہیں۔

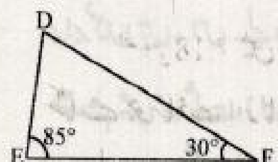
5- دو ضلع اور ایک زاویہ برابر لے کر



(تصویر 7.20)

اگر دو ضلع اور کوئی ایک زاویہ برابر لیتے ہیں، تب ضروری نہیں ہیں کہ بننے والے مثلث متماثل ہی ہو۔ لیکن جب دو ضلع اور ان کے بیچ بننے والا زاویہ برابر لیتے ہیں، تب بننے والا مثلث متماثل ہوتا ہے۔ جیسا تصویر 7.20 کے (i) میں بنایا گیا ہے۔ یہ ضلع - زاویہ - ضلع (SAS) مماثلت شرط کہلاتا ہے۔

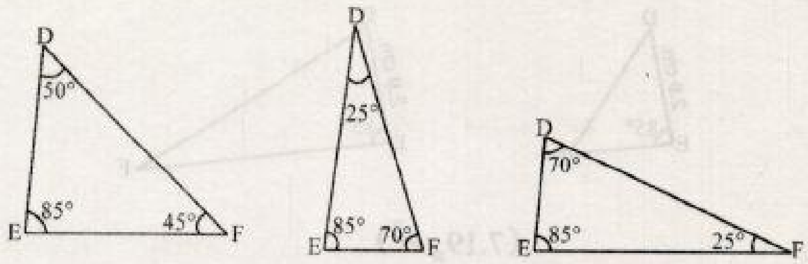
6- ایک ضلع اور دو زاویے برابر ہوں



(تصویر 7.21)

اس کے مطابق جتنے بھی مثلث بنیں گے ان سب کی ساخت اور ناپ تصویر 7.21 میں بنے مثلث کی طرح ہی ہوگا اور اس طرح بنا مثلث ABC کا متماثل ہوگا۔ یہ زاویہ - ضلع - زاویہ (ASA) مماثلت شرط کہلاتا ہے۔

7- ایک زاویہ کی ناپ برابر رکھ کر

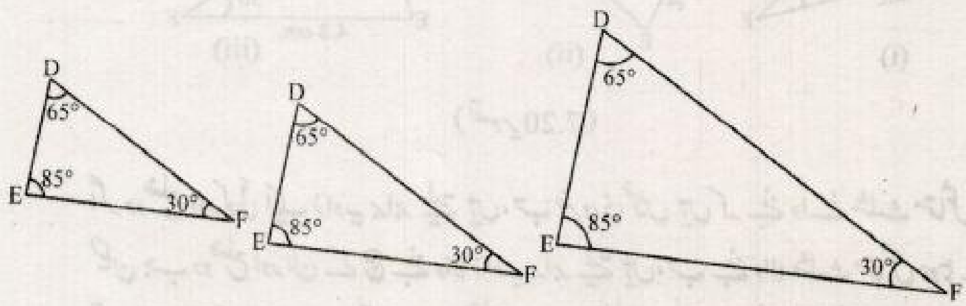


(تصویر 7.22)

یہاں بھی کئی طرح کے مثلث بنائے جا سکتے ہیں۔ جو $\triangle ABC$ کے متماثل نہیں ہیں۔

8- تین زاویوں کی ناپ برابر رکھ کر

چونکہ ہم جانتے ہیں کہ دو مثلثوں میں دو زاویہ باہم برابر رہنے پر تیسرا اپنے آپ برابر ہو جاتا ہے۔ اس لیے دو زاویے کی ناپ برابر رکھنے کا مطلب اپنے آپ تین زاویوں کی ناپ برابر رکھنا ہوتا ہے۔



(تصویر 7.23)

یہاں بھی کئی طرح کے زاویے بنائے جا سکتے ہیں، جو شکل میں تو $\triangle ABC$ کے برابر ہیں لیکن ساخت میں برابر نہیں ہیں۔ اس لیے وہ متماثل نہیں ہیں۔

9- مثلث میں مماثلت زاویۂ قائمہ

دو مثلث زاویۂ قائمہ کی حالت میں مماثلت کو مناسب طور پر خاص دھیان دینا ہوتا ہے۔ ایسے مثلثوں میں زاویۂ قائمہ پہلے سے ہی برابر ہوتے ہیں۔ اس لیے مماثلت کی شرط آسان ہو جاتی ہے۔

کیا آپ ایک $\triangle ABC$ بنا سکتے ہیں، جس میں $\angle B = 90°$ ہو (تصویر 7.24) میں دکھایا گیا ہے۔ اگر


(تصویر 7.24)

(i) صرف ضلع BC معلوم ہو۔

(ii) صرف $\angle C$ معلوم ہو۔

(iii) صرف $\angle A$ اور $\angle C$ معلوم ہو۔

(iv) ضلع AB اور BC معلوم ہو۔

(v) وتر AC اور AB یا BC میں سے ایک ضلع معلوم ہو۔

ان کے خاکے بنانے کی کوشش کیجئے۔ آپ دیکھیں گے کہ (iv) اور (v) مثلث بنانے میں آپ کی مدد کرتے ہیں۔ لیکن حالت (iv) عام طور سے SAS مماثلت شرط ہی ہے۔ حالت (v) میں کچھ نئی صورت حال ہے۔ یہ درج ذیل مماثلت شرط کی جانب پیش قدمی کرتا ہے۔

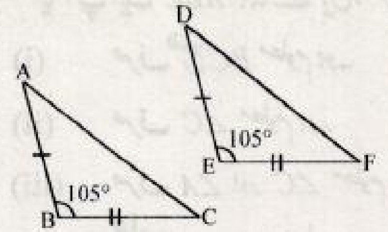
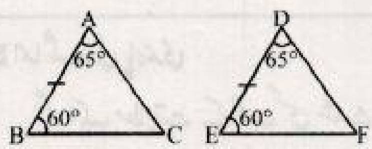
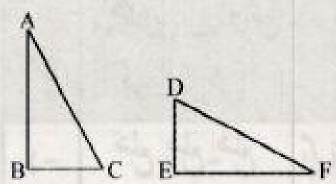
RHS مماثلت کی پابندی

اگر ایک مطابقت کے تحت کسی مثلث زاویۂ قائمہ کا وتر اور ایک ضلع سلسلہ وار کسی دوسرے مثلث زاویۂ قائمہ کے وتر اور ایک ضلع کے برابر ہو، تو وہ مثلث متماثل ہوتے ہیں۔

ہم اسے RHS مماثلت کیوں کہتے ہیں؟ اس کے بارے میں غور وفکر کیجئے۔

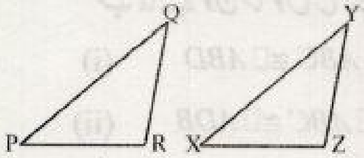
اوپر کی نوعملیات کے تحت ہم دو مثلثوں کے متماثل ہونے کی شرطوں کو ہم درج ذیل طریقوں سے جدول میں رکھ سکتے ہیں۔

نمبر شمار	دو مثلثوں کے متماثل ہونے کی شرط	شرط کی وضاحت	شرط کی مثال
-1	ضلع-ضلع-ضلع شرط(SSS)	اگر ایک مثلث کی تینوں اضلاع دوسرے مثلث کی تینوں اضلاع کی ناپ کے برابر ہو، تب دونوں مثلث متماثل ہوں گے	$\overline{AB} = \overline{DE}, \overline{BC} = \overline{EF}, \overline{AC} = \overline{DF}$ تب $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

-2	ضلع-زاویہ-ضلع شرط(SAS)	اگر ایک مثلث کے دو ضلعے اور ان سے بنے زاویے، دوسرے مثلث کی دو ضلعے اور ان سے بنے زاویے کے برابر ہوں تو دونوں مثلث متماثل ہوں گے۔	 $\overline{AB} = \overline{DE}, \overline{BC} = \overline{EF}$ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ تب $\angle B = \angle E$
-3	زاویہ-ضلع-زاویہ شرط(ASA)	اگر ایک مثلث کے دو زاویے اور ان کے مشترک دوسرے مثلث کے دو زاویے اور ان کے مشترک کے برابر ہوں تو دونوں مثلث متماثل ہوں گے۔	 $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \overline{AB} = \overline{DE}$ $\triangle ABC \triangle DEF$ تب
-4	زاویۂ قائمہ-دوہندسہ-ضلع شرط(RHS)	دو زاویۂ قائمہ مثلثوں میں سے ایک مثلث کا دو وتر اور ایک ضلع، دوسرے مثلث کے وتر اور کوئی ایک دوسرے ضلع کے برابر ہوتو دونوں مثلث متماثل ہوں گے۔	 $\angle B = \angle E = 90°$ $\overline{AC} = \overline{DF}, \overline{BC} = \overline{EF}$ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

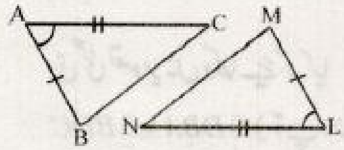
سوالنامہ : 7.2

-1 ذیل میں آپ کون سی مماثلت کی شرائط کا استعمال کریں گے؟



(i) دیا ہے: $PQ = XY, QR = YZ, PR = XZ$

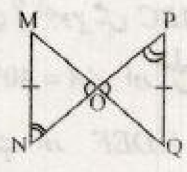
اس لیے $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



(ii) دیا ہے: $AB = LM, AC = NL$

$\angle BAC = \angle MLN$

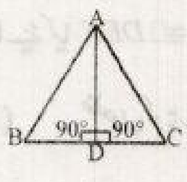
اس لیے $\triangle ABC \cong \triangle LMN$



(iii) دیا ہے: $MN = PQ$

$\angle MON = \angle POQ$

اس لیے $\angle ONM = \angle OPQ$



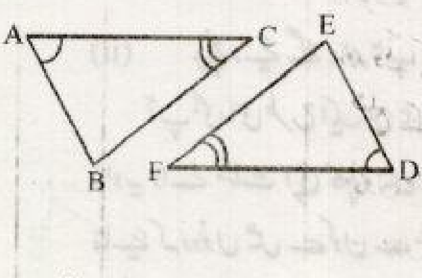
(iv) دیا ہے: $\angle ADB = \angle ADC = 90°$

$AD = AD$

$AB = AC$

اس لیے $\triangle ABD \cong \triangle ACD$

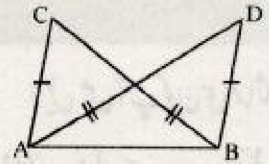
-2 تصویر میں بنے دو مثلث $\triangle ABC$ اور $\triangle DEF$ آپس میں مماثلت دکھاتے ہیں؟ تو درج ذیل مرحلوں کے لیے خالی جگہوں میں وجہ لکھئے:



	ترتیب	وجوہات
(i)	$AC = FD$	
(ii)	$\angle BAC = \angle FDE$	
(iii)	$\angle ACB = \angle EFD$	

-3 دی گئی تصویر میں ایک قاعدہ AB پر بنے دو مثلث ABC اور ADB میں ضلع $BC=AD$، $AC=BD$

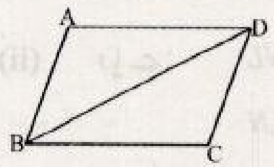
تب بتایئے کون سا قول صحیح ہے؟



(i) $\triangle ABC \cong \triangle ABD$

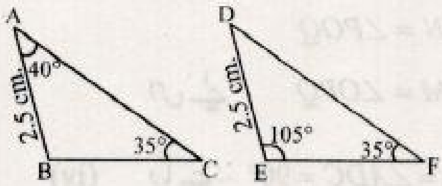
(ii) $\triangle ABC \cong \triangle ADB$

(iii) $\triangle ABC \cong \triangle BAD$



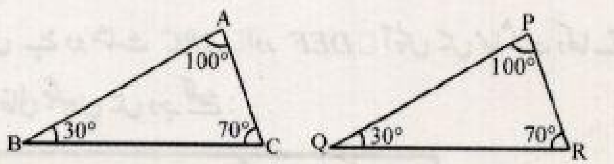
-4 دی گئی تصویر میں دکھایئے کہ کیا

$\triangle DBA \cong \triangle BDC$ (آپ اضلاع کو ناپ سکتے ہیں)

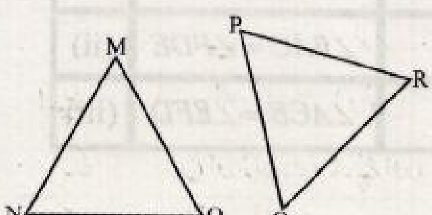


-5 دی گئی تصویر میں $\triangle ABC$ میں $\angle C = 35°$، $\angle A = 40°$ اور ضلع $AB = 2.5$ سینٹی میٹر ہے اور $\triangle DEF$ میں $\angle E = 105°$، $\angle F = 35°$ اور ضلع $DE = 2.5$ سینٹی میٹر تو بتایئے کیا $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

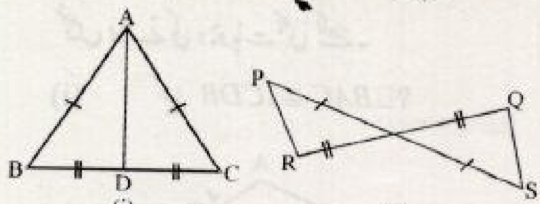
-6 (i) ضلعوں کو ناپ کر ناپ لکھئے:



(ii) نیچے دیئے گئے برابر ناپ کے ضلعوں والے مثلثوں کے زاویوں کی پیمائش کیجئے۔ آپ بھی اسی طرح ایک ہی ناپ اور نظیری زاویہ والے مثلث اپنی کاپی میں بنایئے اور بتایئے کہ دونوں میں سے کون سے مثلث ہمیشہ مماثلت ہوتے ہیں۔



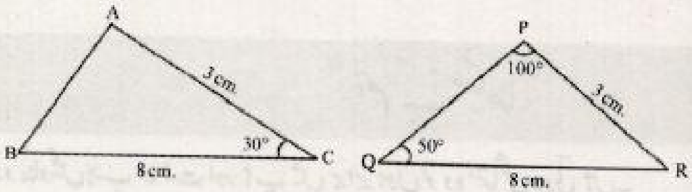
7- نیچے دی گئی تصویروں میں متماثل مثلثوں کے جوڑے پہچان کر لکھئے۔ اس میں سے ایک مثلث کے اضلاع، زاویے، ان کے نظیری اضلاع اور زاویے متماثل مثلث میں سے الگ کر کے لکھئے۔



(i) (ii)

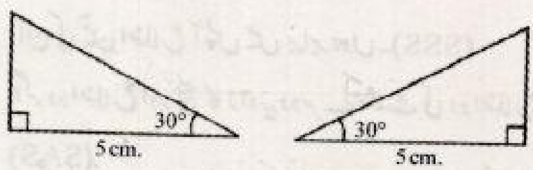
8- نیچے کچھ متماثل مثلثوں کے جوڑے دیئے گئے ہیں۔ یہ کس قاعدے کے مطابق متماثل ہیں، لکھئے۔

(i)

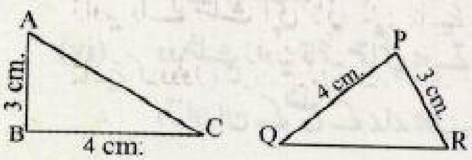


(ii)

(iii)



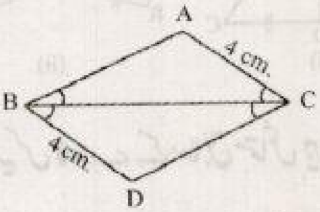
9- نیچے دو مثلث دیئے گئے ہیں، دیکھ کر بتاؤ کیا یہ متماثل ہیں؟ ہاں یا نہیں۔

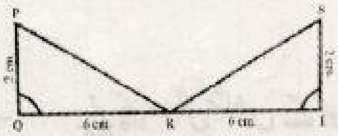


اپنے جواب کی وجہ بھی بتائیے۔ (دونوں مثلثوں کے بھی اضلاع اور زاویے کو ناپیے اور دیکھئے کہ آپ کس نتیجے پر پہنچے؟)

-10 نیچے دی گئی ہر تصویر میں دیئے گئے مثلثوں کے مماثلت ہونے کی جانچ کیجئے اور ان کے مماثلت ہونے یا نہیں ہونے کی وجوہات بھی لکھیے۔

(i) کیا $□BAC \cong □CDB$؟ (ii) $□RPQ \cong □RST$؟





ہم نے سیکھا

-1 دو بناوٹیں جب ساخت اور ناپ میں برابر ہوں تو وہ متماثل ہوتی ہیں۔

-2 دو برابر لمبائی کے قطعہ خط آپس میں متماثل ہوں گے۔

-3 دو زاویہ متماثل ہوں گے اگر وہ برابر کے ناپ کے ہوں۔

-4 دو مربع متماثل ہوتے ہیں۔ اگر ان کے اضلاع برابر لمبائی کے ہوں۔

-5 دو مستطیل متماثل ہوتے ہیں اگر لمبائی اور چوڑائی آپس میں برابر ہوں۔

-6 دو دائرے متماثل ہوتے ہیں اگر ان کے نصف قطر برابر ناپ کے ہوں۔

-7 دو مثلث مماثلت ہوتے ہیں۔ اگر

(i) اُن کی تین اضلاع آپس میں برابر ہوں۔(SSS)

(ii) اگر دو اضلاع اور بیچ کا زاویہ دوسرے مثلث کی دو اضلاع اور ان کے بیچ زاویہ کے برابر ہوں۔ (SAS)

(iii) اگر دو زاویہ اور ان کے بیچ کا ضلع دوسرے مثلث کے دو زاویے اور ان کے بیچ کے ضلع کے برابر ہوں۔ (ASA)

(iv) دو مثلث زاویۂ قائمہ متماثل ہوتے ہیں اگر ایک مثلث کا وتر اور ایک ضلع دوسرے مثلث کے وتر اور ان کے ضلع کے برابر ہوں۔ (RHS)

باب: 8

قوت نما (Power)

8.1: تمہید

آپ سبھی جانتے ہیں کہ شطرنج کے کھیل کی ایجاد ہندوستان میں ہوئی تھی۔ اس سے جڑی ایک دلچسپ کہانی اس طرح ہے۔ جب یہاں کے راجا کو معلوم ہوا کہ اس دانشمندانہ کھیل کا موجد انھیں کی ریاست کا ایک دانشور ہے۔ تو موجد کو بلا کر راجا نے کہا۔ میں تمھارے اس انوکھے ایجاد کے لیے تمھیں انعام دینا چاہتا ہوں۔ اسے سن کر اس دانشور نے اپنا سر جھکا دیا۔

راجا نے کہا۔ میرے پاس بے پناہ دولت ہے۔ میں تمھاری کوئی بھی خواہش پوری کر سکتا ہوں۔ مانگو جو تمھاری خواہش ہو۔ ڈرو مت۔

دانشور نے کہا۔ بادشاہ سلامت آپ کی فیاضی عظیم ہے۔ آپ مجھے شطرنج کے پہلے خانہ کے لیے گیہوں کا ایک دانہ دینے کا حکم صادر کیجیے۔ دوسرے خانہ کے لیے دو دانہ دینے، تیسرے خانہ کے لیے 4، چوتھے خانہ کے لیے 8، پانچویں خانہ کے لیے 16، آٹھویں گھر کے لیے 32 ..... بس کرو ..... راجا نے غصہ ہو کر اسے بیچ میں روک دیا۔

تمھیں شطرنج کے پورے 64 خانے کے لیے دانہ مل جائیں گے۔ ہر گھر میں دانے کی تعداد پچھلے گھر سے دوگنی ہونی چاہیے۔ یہی تمھاری شرط ہے نا۔ پھر بھی یہ جان لو کہ اتنا چھوٹا انعام مانگ کر تم ہماری فیاضی و سخاوت کی توہین کر رہے ہو۔

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ 64 ویں خانے میں راجا کے کتنے دانے دینے پڑیں گے؟

گنتی بہت بڑی ہوتی جا رہی ہے۔ لیکن دلچسپ بات یہ ہے کہ یہاں 2 کا 2 کے ساتھ بار بار ضرب کرنا پڑ رہا ہے۔ جیسے:

پہلے خانہ میں دانہ	:	1
دوسرے خانہ میں دانہ	:	2
تیسرے خانہ میں دانہ	:	2×2

چوتھے خانہ میں دانہ : $2\times2\times2$

پانچویں خانہ میں دانہ : $2\times2\times2\times2$

چھٹے خانہ میں دانہ : $2\times2\times$ ...... 5 بار

.... : ....

.... : ....

اسی طرح

چوسٹھویں خانہ میں دانہ : $2\times2\times$ ...... 63 بار

یقیناً یہ عدد بہت بڑا ہوگا۔ لیکن کیا آپ کہانی کا اختتام جاننا نہیں چاہیں گے؟ کیا راجا موجد کو یہ انعام و اکرام دے سکا؟ موجد کو 9223372036854775808 دانے گیہوں کے دینے پڑیں گے اور پوری زمین پر اگر گیہوں کی کھیتی کی جائے تب بھی اتنا گیہوں نہیں ملے گا۔ اب آپ ہی سوچئے کہ یہ ہے نا ایک بہت بڑا عدد۔

$2\times2\times$ .... 63 بار کرنے پر کتنا بڑا عدد حاصل ہوگا؟ تو کیا کسی عدد میں اُسی عدد سے بار بار ضرب کرنے کے عمل کو لکھنے کا کوئی اور طریقہ نہیں ہے؟

8.2 - قوت نما یا قوت (Exponent or Power)

جماعت کے سبھی طلبا یہی سوچ رہے تھے کہ کسی عدد کا اس عدد کے ساتھ ضرب کرنے کے عمل کا استعمال ریاضی میں اور کہاں کیا گیا ہے؟

تبھی رسیدہ نے ہمانشو سے کہا۔ ''ہم رقبہ نکالنے میں اکائی کو سیمی × سیمی = سیمی^2 لکھتے ہیں۔ اسی طرح حجم نکالتے وقت بھی اکائی کو سیمی × سیمی × سیمی = سیمی^3 لکھتے ہیں۔ کیا اسی طرح $2\times2\times2$ کو 2^3 نہیں لکھا جا سکتا ؟

رسیدہ نے کسی عدد کو اُسی عدد سے بار بار ضرب کرنے کو مختصر صورت میں لکھنے کا ٹھیک طریقہ بتایا۔ کیا آپ $5\times5\times5\times5\times5\times5$ کو اختصار میں لکھ سکتے ہیں؟

جس طرح $5^6 = 5\times5\times5\times5\times5\times5$ ہے۔

اسی طرح $a = a\times a\times a\times a\times a\times a$

اور $x^4 = x\times x\times x\times x$ ہوتا ہے۔

آپ بھی کسی عدد کا اُسی عدد کے ساتھ بار بار ضرب کو اختصار میں لکھئے :

(i) $x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x$ = ...

(ii) $r \times r \times r \times r \times r$ = ...

(iii) $17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17$ = ...

(iv) $101 \times 101 \times 101 \times 101 \times 101$ = ...

کسی عدد کا اُسی عدد کے ساتھ بار بار ضرب کرنے کو آپ اختصار میں لکھنا سیکھ چکے ہیں۔ اس مختصر صورت کو ہم قوت نمائی علامت بھی کہتے ہیں۔ آیئے دیکھیں کہ انھیں کس طرح سے پڑھا جاتا ہے۔

یہاں 10^3 میں 10 قاعدہ Base اور '3' قوت نما (Exponent Index) کہلاتا ہے

10^3 اسے 10 کے اوپر قوت نما 3 پڑھا جاتا ہے۔ ساتھ ہی "10 کی تیسری قوت نما" بھی کہتے ہیں۔

10^3 کو 1000 کا قوت نمائی صورت (Exponential Form) کہا جاتا ہے۔ یعنی 1000 کو قوت نما کا استعمال کر کے مختصر شکل (10^3) میں لکھ سکتے ہیں۔

کچھ قوت نما کے خاص نام بھی ہیں :

جیسے : 5^2 جو 5 کے اوپر قوت نما ہے، اسے 5 کا مربع (5 Squared) بھی پڑھا جاتا ہے۔

5^3 جو 5 کے اوپر قوت نما ہے، اسے 5 کا مکعب (5 Cubed) بھی پڑھا جاتا ہے۔

خود کر کے دیکھئے :

نیچے لکھے عبارتوں کی بنیاد اور قوت نما کو ان کے سامنے دیئے گئے جگہوں میں لکھئے :

3^5 میں قاعدہ = 3 اور قوت نما = ۵

7^{19} میں قاعدہ = ... اور قوت نما = ...

x^a میں قاعدہ = ... اور قوت نما = ...

p^q میں قاعدہ = ... اور قوت نما = ...

x^y میں قاعدہ = ... اور قوت نما = ...

اب آپ سمجھ چکے ہوں گے کہ قوت نمائی صورت میں لکھنے کا خاص طور سے مقصد کسی بہت بڑے عدد کو مختصر صورت میں لکھنا ہے۔

جیسے سورج سے زمین کی دوری 150000000 کیلو میٹر ہے جو ایک بہت بڑا عدد ہے۔ اسے ذیل کے طریقوں سے لکھ سکتے ہیں:

150000000 کیلو میٹر = $15\times10^7 = 15\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10$ کیلومیٹر

بڑی شکل کو چھوٹی شکل یعنی اختصار میں لکھنا تو آپ سیکھ چکے ہیں۔ اب کچھ قوت نمائی صورت کو پہلی شکل طویل شکل میں لکھیے:

1. $a^5 \quad = \quad a\times a\times a\times a\times a$
2. $3^6 \quad =$
3. $5^5 \quad =$
4. $r^7 \quad =$
5. $2^m \quad =$

رحیم کو یہ سمجھ میں نہیں آ رہا تھا کہ وہ 2^m کو طویل شکل میں کیسے لکھیں؟ کیوں کہ m کی کوئی طے شدہ قیمت نہیں ہے۔ کیا آپ کے پاس رحیم کے مسئلہ کا جواب ہے؟

پہلے بھی آپ نے دیکھا ہے کہ شطرنج کے 64 ویں خانہ میں راجا کو ......$2\times2\times2\times$، 63 بار یعنی 2^{63} دانے گیہوں کے دانے دینے تھے۔

$2^m = 2\times2\times2\times.....m$ بار لکھ سکتے ہیں۔

اسی طرح ہم x^m اور y^n کو درج ذیل طریقوں سے لکھ سکتے ہیں۔

$y^m = x\times x\times x\times.....m$ بار اور

$y^n = y\times y\times.....n$ بار لکھ سکتے ہیں۔

کسی عدد کی قوت نمائی صورت اس کے غیر منقسم اجزائے ضربی کی قوت نما کے حاصل ضرب کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر $1000 = 2\times2\times2\times5\times5\times5$...... (غیر منقسم اجزائے ضربی) $= 2^3\times5^3$ (غیر مقسوم اجزائے ضربی کی قوت نما کے حاصل ضرب والی شکل)

مثال: -1 64 کو 2 کی قوت نما کی شکل میں لکھیے۔

حل: $64 = 2\times2\times2\times2\times2\times2$

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $64 = 2^6$

مثال:2- 8^2 اور 2^8 میں کون بڑا ہے؟

حل: $8^2 = 8\times8 = 64$

$2^8 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2 = 256$ ہے۔ ظاہراً $2^8 > 8^2$

مثال:3- (1^6) کی قیمت معلوم کیجئے۔

$(1^6) = 1\times1\times1\times1\times1\times1 = 1$ (حقیقت میں 1 کا کوئی بھی قوت نما 1 کے برابر ہوتا ہے)

مثال:4- مندرجہ ذیل اعداد کو غیر مقسوم اجزائے ضربی کی قوت نما کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھئے:

(i) 144 (ii) 216

(i) $144 = 72\times2$
$= 36\times2\times2$
$= 18\times2\times2\times2$
$= 9\times2\times2\times2\times2$
$= 3\times2\times2\times2\times2\times2$
$= 3^2\times2^4$ (مطلوب شکل)

(.i) $216 = 108\times2$
$= 54\times2\times2$
$= 27\times2\times2\times2$
$= 9\times3\times2\times2\times2$
$= 3\times3\times3\times2\times2\times2$
$= 3^3\times2^3$ (مطلوب شکل)

بنیاد منفی عدد صحیح بھی ہو سکتا ہے۔

جیسے: $-8 = (-2)\times(-2)\times(-2) = (-2)^3$ ہے۔

$16 = (-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2) = (-2)^4$ ہے۔

ظاہر ہے کہ قاعدہ منفی عدد صحیح ہونے پر جب قوت نما طاق عدد ہو تو قیمت منفی عدد صحیح حاصل ہوتا ہے اور جب قوت نما جفت عدد ہو تو قیمت مثبت عدد صحیح حاصل عدد ہوتا ہے۔

مثال:5- مندرجہ ذیل کی قیمت (Value) معلوم کیجئے۔

(i) $(-1)^5$ (ii) $(-1)^4$ (iii) $(-10)^4$ (iv) $(-5)^3$

حل: (i) $(-1)^5 = (-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1) = -1$

(ii) $(-1)^4 = (-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1) = +1$

$(-10)^4 = (-10)\times(-10)\times(-10)\times(-10) = 100\times(-10)\times(-10)$ (iii)

$= 100\times100 = 10000$

$(-5)^3 = (-5)\times(-5)\times(-5) = 25\times(-5) - 125$ (iv)

سوالنامہ : 8.1

1- مندرجہ ذیل کو قوت نمائی شکل میں لکھیے:

(i) $5\times5\times5\times5$ (ii) $c\times c\times c$ (iii) $2\times2\times3\times3\times3$

(iv) $6\times6\times b\times b$ (v) $a\times a\times b\times b\times b\times b\times b\times d$

2- مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے:

(i) 3^3 (ii) 6^4 (iii) 9^3 (iv) 5^4 (v) 4^4

3- مندرجہ ذیل اعداد میں سے ہر ایک کو قوت نمائی علامتوں میں لکھیے:

(i) 343 (ii) 512 (iii) 729 (iv) 3125

4- مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک میں کون بڑا ہے؟

(i) 4^3 یا 3^4 (ii) 2^5 یا 5^2 (iii) 2^8 یا 8^2 (iv) 100^2 یا 2^{100}

5- مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کو ان غیر منقسم اجزائے ضربی کی قوت نمائی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھیے:

(i) 1200 (ii) 720 (iii) 1080

(iv) 2250 (v) 3600

6- سہل کیجیے:

(i) 3×10^2 (ii) $7^2\times3^2$ (iii) $(-1)^5\times7^3$

(iv) 0×10^2 (v) $3^4\times2^3$ (vi) $3^2\times10^4$

7- سہل کیجیے:

(i) $(-3)^3$ (ii) $(-1)\times(-2)^3$ (iii) $(-4)^2\times(-3)^2$

(iv) $(-2)^3\times(-10)^4$ (v) $(-5)^2\times(-2)^4$

8- درج ذیل اعداد کا موازنہ کیجئے :

(i) $5\times10^{14};4\times10^{7}$ (ii) 2.6×10^{12} 1.6×10^{8}

(iii) $2.7\times10^{11};3.0\times10^{15}$ (iv) 1.008×10^{15} 2.009×10^{20}

9- مندرجہ ذیل کو قوت نمائی شکل میں لکھئے :

(i) $\frac{8}{729}$ (ii) $\frac{81}{343}$ (iii) $\frac{243}{1024}$

8.3- قوت نما کے اصول

8.3.1- ایک ہی قاعدہ والے قوت نما

آپ جانتے ہیں کہ $2\times2\times2\times2\times2 = 2^5$ ہوتا ہے۔ اس میں 2 کے مضروبوں کا الگ الگ مجموعہ بنا کر کئی طرح سے لکھ سکتے ہیں۔ جیسے :

$$2^5 = (2\times2\times2\times2) = 2^1\times2^4$$

$$2^5 = (2\times2)(2\times2\times2) = 2^2\times2^3$$

$$2^5 = (2\times2\times2)\times(2\times2) = 2^3\times2^2$$

$$2^5 = (2\times2\times2\times2)\times(\times2) = 2^4\times2^1$$

یہاں 2^5 کو 2 کے قاعدہ والی عبارتوں میں کئی طرح سے لکھا گیا ہے۔ آپ بھی نیچے دیئے گئے قوت نما عبارتوں کو یکساں بنیاد والے دو عبارتوں کے مضروبوں کی شکل میں لکھئے اور قوت نما کا حاصل جمع حاصل کیجئے :

نمبر شمار	قوت نما عبارت	طویل شکل میں لکھ کر دو مجموعوں میں بانٹنا (مجموعہ اپنی خواہش کے مطابق بنایئے)	ہر مجموعہ کو قوت نما عبارت کی شکل میں لکھئے	قوت نما کا حاصل جمع
-1	a^7	$\underline{a\times a\times a\times a}\times\underline{a\times a\times a}$	$a^4\times a^3$	4+3=7
-2	x^5			
-3	y^{10}			
-4	27^7			
-5	7^{12}			

اوپر قوت نما عبارتوں کی طویل ہوئی شکل کو دیکھئے اور نیچے دی ہوئی خالی جگہوں کو بھریئے :

$a^7 = a^5 \times \boxed{a^2}$ $\quad x^5 = x^3 \times \square$ $\quad y^{10} = y^7 \times \square$

$27^7 = 27^4 \times \square$ $\quad 7^{12} = 7^8 \times \square$

کیا دو یکساں قاعدہ والے اعداد کا ضرب کرنے پر ان اعداد کے قوت نما کا حاصل ضرب والے عدد کے قوت نما سے کوئی تعلق ہے؟

آیئے دیکھیں کہ یکساں قاعدہ والے قوت نمائی عبارتوں کا ضرب کیسے ہوتا ہے؟

$x^3 \times x^4 = \quad x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \quad = x^7 \quad = x^{(3+4)}$

$x^5 \times x^3 = \quad x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x = x^8 \quad = x^{(5+3)}$

$y^{19} \times y^{21} =$ $(y \times y \times \ldots$ 19 بار$) \times (y \times y \times \ldots$ 21 بار$)$

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ اوپر y کا y کے ساتھ کتنی بار ضرب ہوگا؟ حاصل ضرب میں y بنیاد لیں اس کی قوت نما کیا ہوگی؟

y کا y کے ساتھ $19+21=40$ بار ضرب ہو رہا ہے۔

اس لیے حاصل ضرب y^{40} ہوگا۔

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ جب دو یکساں بنیاد والے قوت نمائی اعداد کا ضرب ہوتا ہے تو حاصل ضرب میں بنیاد وہی رہتا ہے۔ اور قوت نما آپس میں جڑ جاتے ہیں۔

جیسے : $3^{99} \times 3^{13} = 3^{(99+13)} = 3^{112}$

کیا آپ $x^m \times x^n$ کا حاصل ضرب بتا سکتے ہیں؟

$x^m \times x^n = x \times x \ldots\ldots m$ بار اور n بار یعنی $(m+n)$ بار ضرب ہو رہا ہے۔

اس لیے $x^m \times x^n = x^{m+n}$ (اصول 1:)

خود کر کے دیکھئے :

(i)	$3^3 \times 3^4 = \quad 3^{\square}$	(ii)	$(-12)^2 \times (-12)^6 = \quad -12^{\square}$
(iii)	$b^2 \times b^3 = \quad b^{\square}$	(iv)	$c^{10} \times c^{20} = \quad c^{\square}$
(v)	$p^3 \times p^2 = \quad p^{\square}$	(vi)	$a^3 \times a^2 \times a^7 = \quad a^{\square}$

8.3.2- ایک ہی قاعدہ والے قوت نما اعداد کی تقسیم

فاطمہ نے سونو سے پوچھا، یکساں قاعدہ والے قوت نما اعداد کو ضرب کرنا تو ہم نے سیکھ لیا، یکساں قاعدہ والے قوت نما اعداد کی تقسیم کیسے کریں گے؟

سونو نے کہا، چلو کر کے دیکھتے ہیں:

$$\frac{2^7}{2^5} = \frac{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times2\times2}{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}} = 2\times2 = 2^2$$

رینا اور جمال نے بھی اسی طرح کے سوال حل کیے۔

(i) $$\frac{3^5}{3^2} = \frac{\cancel{3}\times\cancel{3}\times3\times3\times3}{\cancel{3}\times\cancel{3}} = 3\times3\times3 = 3^3$$

(ii) $$\frac{7^9}{7^6} = \frac{\cancel{7}\times\cancel{7}\times\cancel{7}\times\cancel{7}\times\cancel{7}\times\cancel{7}\times7\times7\times7}{\cancel{7}\times\cancel{7}\times\cancel{7}\times\cancel{7}\times\cancel{7}\times\cancel{7}} = 7\times7\times7 = 7^3$$

فاطمہ نے سبھی حلوں کو دیکھ کر ساتھیوں سے کہا کہ جس طرح دو یکساں قاعدہ والے قوت نما اعداد کا ضرب کرنے پر قوت نما جڑتے ہیں۔ اُسی طرح دو یکساں قاعدہ والے قوت نما اعداد میں تقسیمی عمل کرنے پر شمار کنندہ کے قوت نما میں سے نسب نما کا قوت نما گھٹا دیتے ہیں۔

جیسے:

$2^5 \div 2^7$ کے حاصل تقسیم کا قوت نما $2 = 5 - 7$ ہوتا ہے، $3^2 \div 3^5$ کے حاصل تقسیم کا قوت نما $3 = 2 - 5$ اور $7^6 \div 7^9$ کے حاصل تقسیم کا قوت نما $3 = 6 - 9$ ہے۔ یعنی

$a^m \div a^n$ کے حاصل تقسیم کا قوت نما $m - n$ ہوگا۔

یعنی $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (اصول 2:)

تبھی مونو نے کہا، یہ تو ٹھیک ہے لیکن اگر مقسوم اور مقسوم علیہ (تقسیم کرنے والا عدد) کے قوت نما اعداد یکساں ہو تو کیا ہوگا؟ چلو حل کر کے دیکھیں۔

جیسے:

$\frac{7^5}{7^5} = 7^{5-5} = 7^0$ لیکن $\frac{7^5}{7^5} = \frac{7\times7\times7\times7\times7}{7\times7\times7\times7\times7} = 1$ $\therefore = 7^0 = 1$

جیسے:

$\frac{p^n}{p^n}=1$ ہوگا لیکن فارمولے کے مطابق

$$\frac{p^n}{p^n}=p^{n-n}=p^0$$

$p^0=1$ (اصول:3)

اب ذرا ذیل کے اعداد پر غور کریں:

$\frac{1}{5^2}=\frac{5^0}{5^2}=5^{0-2}=5^{-2}$ ($5^0=1$ سے)

$\frac{1}{6^{35}}=\frac{6^0}{6^{35}}=6^{0-35}=6^{-35}$ ($6^0=1$ سے)

$\frac{1}{4^{90}}=\frac{4^0}{4^{90}}=4^{0-90}=4^{-90}$ ($4^0=1$ سے)

ان سوالوں کو دیکھتے ہوئے فاطمہ نے غور کیا کہ اگر قوت نما اعداد میں مقسوم علیہ میں مقسوم کی جگہ پر لے جائیں تو ان کی قوت نما کی علامت منفی ہو جاتا ہے۔ یعنی اگر ہمارے پاس

$\frac{1}{a^4}$ ہوتب $\frac{1}{a^4}=\frac{a^0}{a^4}=a^{0-4}=a^{-4}$

اگر $\frac{1}{a^m}$ ہوتب $\frac{1}{a^m}=\frac{a^0}{a^m}=a^{0-m}=a^{-m}$

اس لیے $\frac{1}{a^{-m}}=a^m$

لیکن اگر مقسوم کو مقسوم علیہ میں لے جائیں تو کیا ہوگا؟ جیسا ہم نے اوپر مثالوں میں دیکھا ہے۔

$\frac{1}{7^{-3}}=7^3$ یا $\frac{1}{a^{-4}}=a^4$ یا $\frac{1}{a^{-m}}=a^m$ اس کا مطلب یہ ہے کہ جب قوت نما میں مقسوم کو مقسوم علیہ میں لے جائیں گے تب بھی قوت نما کی علامت بدل جائے گی۔

خود کر کے دیکھیے:

(i)	$10^8 \div 10^3$	=	$10^{\square}$	(ii)	$9^8 \div 9^7$	=	$9^{\square}$
(iii)	$21^{15} \div 21^{13}$	=	$21^{\square}$	(iv)	$b^{10} \div b^8$	=	$b^{\square}$
(v)	$d^{100} \div d^{80}$	=	$d^{\square}$	(vi)			

8.3.3- ایک قوت نما عدد پر قوت نما لینا

ذیل کی مثالوں پر دھیان دیجئے:

(i) $(2^3)^2$ کو سہل کیجئے۔

حل: $(2^3)^2 = 2^3 \times 2^3$

$= 2^{3+3}$ (چونکہ $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ہے)

$= 2^6$

$= 2^{3\times 2}$

(ii) $(3^4)^2$ کو سہل کیجئے۔

$(3^4)^2 = 3^4 \times 3^4$

$= 3^{4+4}$

$= 3^8$

$= 3^{4\times 2}$

(iii) $(3^m)^3 = \ = a^m \times a^m \times a^m$

$= a^{m+m+m}$

$= a^{3m}$

$= 3^{3\times m}$

مندرجہ بالا سے ہم وسیع صورت سے کہہ سکتے ہیں کہ کسی غیر صفر عدد صحیح 'a' کے لیے $(a^m)^n = a^{m\times n}$ ہوتا ہے جہاں m اور n مکمل اعداد ہیں۔

خود کر کے دیکھیے:

سہل کر کے جواب کو قوت نمائی شکل میں لکھیے:

(i) $(7^2)^3$ (ii) $(2^2)^{50}$ (iii) $(7^{50})^3$

(iv) $(a^3)^2$ (v) (4^3) (vi) $(d^4)^8$

8.3.4- یکساں قوت نما والی قوت نما اعداد کا ضرب

ذیل کی مثالوں کو دیکھیے:

(i) $2^4 \times 3^4$ کو سہل کیجئے۔

$$2^4 \times 3^4 = (2\times2\times2\times2)\times(3\times3\times3\times3)$$
$$= (2\times3)\times(2\times3)\times(2\times3)\times(2\times3)$$
$$= 6\times6\times6\times6$$
$$= 6^4$$

یہاں قاعدہ 6 قاعدہ 2 اور 3 کا حاصل ضرب ہے۔

(ii) $4^3 \times 3^3$ کو سہل کیجیے۔

$$4^3 \times 3^3 = (4\times4\times4)\times(3\times3\times3)$$
$$= (4\times3)\times(4\times3)\times(4\times3)$$
$$= 12\times12\times12$$
$$= 12^3$$
یہاں 12 قاعدہ 4 اور 3 کا حاصل ضرب ہے۔

(iii) $3^3 \times a^3$ کو سہل کیجیے۔

$$3^3 \times a^3 = (3\times3\times3)\times(a\times a\times a)$$
$$= (3\times a)\times(3\times a)\times(3\times a)$$
$$= (3a)^3$$

یہاں $(3\times a = (3a)^3)$

(iv) $(a^3 \times b^3)$ کو سہل کیجیے۔

$$a^3\times b^3 = (a\times a\times a)\times(b\times b\times b)$$
$$= (a\times b)\times(a\times b)\times(a\times b)$$
$$= (a\times b)^3$$
$$= (ab)^3$$
(یہاں $a\times b = ab$ ہے)۔

وسیع حالت میں کسی غیر صفر (Non-Zero) عدد صحیح کے لیے $a^m \times b^m = (ab)^m$ ہوتا ہے۔ جہاں m ایک عدد صحیح ہے۔

مثال: 6 ۔ ذیل کے ارکان کو قوت نمائی شکل میں لکھیے:

(i) $(5\times4)^3$ (ii) $(4a)^5$ (iii) $(-3n)^3$

حل:

(i) $(5\times4)^3 = (5\times4)\times(5\times4)\times(5\times4)$
$$= (5\times5\times5)\times(4\times4\times4)$$
$$= 5^3\times4^3$$

(ii) $(4a)^5 = 4a\times4a\times4a\times4a\times4a$
$$= (4\times4\times4\times4\times4)\times(a\times a\times a\times a\times a) \qquad = 4^5\times4^5$$

(iii) $(-3n)^3 = (-3\times n)^3$

$= (-3\times n)(-3\times n)(-3\times n)$

$= (-3\times -3\times -3)\times(n\times n\times n)$

$= -3^3\times n^3$

خود کر کے دیکھیے:

$a^m\times b^m = (ab)^m$ کا استعمال کر کے شکل بدلیے۔

(i)	$5^3\times 2^3$	(ii)	$3^2\times b^2$	(iii)	$a^2\times c^2$
(iv)	$4^6\times(-2)^6$	(v)	$(-2^4)\times(-3)^4$	(vi)	$(ab)^3$
(vii)	$(-2p)^3$	(viii)	$(2c)^4$	(ix)	$(2\times 3)^5$

8.3.5- قابل پیمائش اعداد کے قوت نما

قابل پیمائش اعداد کے کچھ قوت نما پر غور کیجیے:

$$\left(\frac{5}{7}\right)^4 = \frac{5}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}$$

$$= \frac{5}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{5}{7} = \frac{5^4}{7^7}$$

$$\left(-\frac{3}{11}\right)^5 = (-1)^5\times\left(\frac{3}{11}\right)^5$$

$$= -1\times\frac{3}{11}\times\frac{3}{11}\times\frac{3}{11}\times\frac{3}{11}\times\frac{3}{11} = -1\times\frac{3\times3\times3\times3\times3}{11\times11\times11\times11\times11}$$

$$= -1\times\frac{3^5}{11^5} \qquad = -\frac{3^5}{11^5}$$

8.3.6- یکساں قوت نما والے قوت نما اعداد کی تقسیم

ذیل کی مثالوں پر غور کیجیے:

(i) $\frac{3^4}{5^4} = \frac{3\times3\times3\times3}{5\times5\times5\times5} = \frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^4$

(ii) $\frac{a^5}{b^5} = \frac{a\times a\times a\times a\times a}{b\times b\times b\times b\times b} = \frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^5$

وسیع شکل میں $a^m \div b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ جہاں a اور b کوئی دو غیر صفر (Non-Zero) عدد صحیح ہیں۔

اور m اور n ایک مکمل عدد ہے۔

مثال: 7 درج ذیل کو وسیع شکل میں لکھیے :

(i) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ (ii) $\left(\frac{-2}{5}\right)^4$ (iii) $\left(\frac{p}{q}\right)^5$

حل:

(i) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{2\times2\times2}{3\times3\times3}$

(ii) $\left(\frac{-2}{5}\right)^4 = \frac{(-2)^4}{5^4} = \frac{(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)}{5\times5\times5\times5}$

(iii) $\left(\frac{p}{q}\right)^5 = \frac{p^5}{q^5} = \frac{p\times p\times p\times p\times p}{q\times q\times q\times q\times q}$

8.4- مثال......

مثال: 8 $3\times(5^2)$ اور $(5^2)^3$ میں بڑا کون ہے؟

حل: (5^2 کو 3 سے ضرب) $(5^2)\times3 = 5\times5\times3$

$=75$

(5^2 کو خود سے 3 بار ضرب) $(5^2)^3 = 5^2\times5^2\times5^2$

$=15625$

اس لیے $(5^2)^3 > (5^2)\times3$

مثال: 9 $9\times9\times9$ کے لیے قاعدہ 3 لیتے ہوئے اسے قوت نمائی شکل میں لکھیے :

سوال سے :

$9\times9\times9=9^3$ $\quad = 3^{2\times3}\left(\because (a^m)^n = a^{mn}\right)$

$=\left(3^2\right)^3$ (کیوں کہ $9=3\times3=3^2$) $\quad =3^6$

مثال : 10- حل کیجئے اور جواب کو قوت نمائی شکل میں لکھئے :

(i) $\left(\dfrac{3^7}{3^2}\right)\times3^4$ (ii) $2^3\times2^2\times5^5$ (iii) $\left\{\left(2^3\right)^2\times5^6\right\}\times3^6$

(iv) $8^2\div2^3$ (v) $\left(3^2\times3^4\right)\div3^3$

حل :

(i) $\left(\dfrac{3^7}{3^2}\right)\times3^4=\left(3^{7-2}\right)\times3^4\left(\because\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\right)$

$=3^5\times3^4$

$=3^{5+4}\left(\because a^m\times a^n=a^{m+n}\right)$

$=3^9$

(ii) $2^3\times2^2\times5^5=\left(2^3\times2^2\right)\times5^5$

$=2^5\times5^5\left(\because a^m\times a^m=a^{m+n}\right)$

$=(2\times5)^5\left(\therefore a^m\times b^m=(ab)^m\right)$

$=10^5$

(iii) $\left\{\left(2^3\right)^2\times5^6\right\}\times3^6$

$=\left(2^6\times5^6\right)\times3^6\left(\because\left(a^m\right)^n=a^{mn}\right)$

$\left\{(10)^6\times3^6\right\}\quad\left(\because a^m\times b^m=(ab)^m\right)$

$=\left(10^3\times3\right)^6$

$=(30)^6$

(iv) $8^2 \div 2^3$

$8 = 2\times2\times2 = 2^3$

$\therefore 8^2 = \left(2^3\right)^2$

$\therefore 8^2 \div 2^3 = \left(2^3\right)^2 \div 2^3$

$= 2^6 \div 2^3$

$= 2^{6-3} = 2^3$

(v) $= \left(3^2\times3^4\right)\div3^3$

$= \left(3^{2+4}\right)\div3^3 \quad \left(a^m\times a^n = a^{m+n}\right)$

$= 3^6\div3^3 \quad \left(a^m\div a^n = a^{m-n}\right)$

$= 3^{6-3} = 3^3$

مثال:11- سہل کیجیے:

(i) $\dfrac{2^3\times3^4\times4}{3\times32}$ (ii) $\dfrac{2\times3^4\times2^5}{9\times4^2}$ (iii) $\dfrac{12^4\times9^3\times4}{6^3\times8^2\times27}$

(iv) $2^3\times a^3\times5a^4$ (v) $\dfrac{4^5\times a^8b^3}{4^5\times a^5b^2}$ (vi) $\dfrac{2^8\times a^5}{4^3\times a^3}$

حل:

(i) $\dfrac{2^3\times3^4\times4}{3\times32} = \dfrac{2^3\times3^4\times2^2}{3\times2^5} \quad \left(\because 4=2^2, 32=2^5\right)$

$= \dfrac{2^{3+2}\times3^4}{3\times2^5} = \dfrac{2^5\times3^4}{3\times2^5}$

$= 2^{5-5}\times3^{4-1} = 2^0\times3^3$

$= 1\times27 = 27$

(ii) $= \dfrac{2\times3^4\times2^5}{9\times4^2} = \dfrac{2\times3^4\times2^5}{3^2\times\left(2^2\right)^2} = \dfrac{2\times2^5\times3^4}{3^2\times2^{2\times2}}$

$= \dfrac{2^{1+5}\times3^4}{2^4\times3^2} = \dfrac{2^6\times3^4}{2^4\times3^2}$

$= 2^{6-4}\times3^{4-2} = 2^2\times3^2 = 4\times9 = 36$

(iii) $= \dfrac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27} = \dfrac{(2^2 \times 3)^4 \times (3^2)^3 \times 2^2}{(2 \times 3)^3 \times (2^3)^2 \times 3^3} = \dfrac{(2^2)^4 \times 3^4 \times 3^{2\times3} \times 2^2}{2^3 \times 3^3 \times 2^{3\times2} \times 3^3}$

$= \dfrac{2^8 \times 2^2 \times 3^4 \times 3^6}{2^3 \times 2^6 \times 3^3 \times 3^3} = \dfrac{2^{8+2} \times 3^{4+6}}{2^{3+6} \times 3^{3+3}} = \dfrac{2^{10} \times 3^{10}}{2^9 \times 3^6}$

$= 2^{10-9} \times 3^{10-6} \quad = 2^1 \times 3^4 \quad = 2 \times 81 \quad = 162$

(iv) $2^3 \times a^3 \times 5a^4$

$= 2^3 \times a^3 \times 5 \times a^4$

$= 2^3 \times 5 \times a^3 \times a^4$

$= 8 \times 5 \times a^{3+4}$

$= 40a^7$

(v) $= \dfrac{4^5 \times a^8 b^3}{4^5 \times a^5 b^2}$

$= 4^{5-5} \times a^{8-5} \times b^{3-2}$

$= 4^0 \times a^3 \times b^1$

$= 1a^3 b$

$= a^3 b$

(vi) $= \dfrac{2^8 \times a^5}{4^3 \times a^3} \quad = \dfrac{2^8 \times a^5}{(2^2)^3 \times a^3} \quad = \dfrac{2^8 \times a^5}{2^6 \times a^3}$

$= 2^{8-6} \times a^{5-3} \quad = 2^2 a^2 \quad = 4a^2$

سوالنامہ : 8.2

-1 سہل کیجئے اور واب کو قوت نمائی شکل میں لکھئے :

(i) $7^2 \times 7^4 \times 7^8$ (ii) $3^{10} \div 3^6$ (iii) $d^2 \times d^3$

(iv) $5^x \times 5^2$ (v) $(5^3)^2 \div 5^3$ (vi) $3^5 \times 5^5$

(vii) $a^4 \times b^4$ (viii) $(2^{20} \div 2^{10}) \times 2^3$ (ix) $9^p \div 9^3$

-2 سہل کیجئے اور قوت نمائی شکل میں جواب دیجئے :

(i) $\dfrac{2^3 \times 3^4 \times 4}{3^2 \times 32}$ (ii) $\left[(5^3)^2 \times 5^3\right] \div 5^6$ (iii) $25^5 \div 5^4$

(iv) $3^0+4^0+5^0$ (v) $3^0\times4^0\times5^0$ (vi) $(4^0+5^0)\times2^0$

(vii) $\dfrac{11^6\times13^3\times3}{39\times11^2}$ (viii) $\dfrac{5^7}{5^4\times5^3}$ (ix) $(3^3\times3)^3$

(x) $\dfrac{5^8\times a^5}{25^3\times a^3}$

3- غیر مقسوم اجزائے ضربی کے قوت نما کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھیے :

(i) 1152 (ii) 64×81 (iii) 540

(iv) $27\times48\times72$ (v) $9\times6\times15\times4$

4- نیچے دیئے گئے اقوال میں صحیح اور غلط کو الگ کیجئے اور اپنے جواب کی وجوہات بتائیے :

(i) $10^0=(1000)^8$ (ii) $4^3\times3^2\times12^5$ (iii) $2^5=5^2$

(iv) $10\times10^6=100^6$

5- سہل کیجئے :

(i) $\dfrac{(3^2)^5\times5^3}{9^4\times5^2}$ (ii) $\dfrac{9^2\times3^2\times a^8}{3^7\times a^3}$ (iii) $\dfrac{3^5\times10^5\times25}{5^7\times6^5}$

8.5- اعشاریہ اعداد کا طریقہ (Decimal Number System)

ہم جانتے ہیں کہ

$56832=5\times10000+6\times1000+8\times100+3\times10+2\times$

ہم اسے 10 کے قوت نما کا استعمال کرتے ہوئے قوت نمائی شکل میں ذیل کے طریقوں سے لکھ سکتے ہیں:

$56832=5\times10^4+6\times10^3+8\times10^2+3\times10^1+2\times10^0$

دھیان دیجئے ,$10000=10^4, 1000=10^3, 100=10^2, 10=10^1$ اور $1=10^0$ ہے۔

یہاں 10 کا قوت نما 4 سے ایک ایک گھٹتے ہوئے 0 تک آجاتے ہیں۔

3.6- بڑے اعداد کو معیاری شکل میں ظاہر کرنا

مندرجہ ذیل پیٹرن(Pattern) کو دیکھئے:

1. $14335 = 1433.5 \times 10 = 1433.5 \times 10^1$
2. $14335 = 143.35 \times 100 = 143.35 \times 10^2$
3. $14335 = 14.335 \times 1000 = 14.335 \times 10^3$
4. $14335 = 1.4335 \times 10000 = 1.4335 \times 10^4$
5. $14335 = .14335 \times 100000 = .14335 \times 10^6$

مندرجہ بالا سبھی اعداد میں چوتھی شکل عدد کا معیاری شکل(Standard Form) ہے۔ جب کسی عدد کو 1.0 اور 9.9 یا اُس کے بیچ کے ایک اعشاریہ عدد اور 10 کے قوت نما کے حاصل ضرب کی شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے۔ تو عدد کی اس شکل کو معیاری شکل کہتے ہیں۔

اوپر کی تیسری شکل کا عدد $14335 = 14.335 \times 1000 = 14.335 \times 10^3$ معیاری شکل میں ہے؟ نہیں، کیوں کہ $1.0 < 14.335$ اور 9.9 سے اور اس کے بیچ کی کسی بھی اعشاریہ عدد سے اب کیا عدد 14335×10^6. معیاری شکل میں ہے؟ نہیں، کیوں کہ $1.0 < 14335$. اور 9.9 اور اس کے بیچ کے کسی بھی اعشاریہ عدد سے۔

دھیان دیجئے 14335 کو 14.335×1000 یا 14335×100000. اور 14.335×10^3 یا $\times 10^5$ 14335. کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ لیکن یہ 14335 کی معیاری شکل نہیں ہے۔

ہمارے نظام قمری یا گلیکسی کے مرکز سے سورج کی دوری یعنی:

300,000,000,000,000,000,000, میٹر کو 3.0×10^{20} میٹر کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

اسی طرح زمین کا وزن

= 5,976,000,000,000,000,000,000,000 کیلوگرام

$= 5.976 \times 10^{24}$

کیا آپ اس بات سے اتفاق رکھتے ہیں کہ پڑھنے، سمجھنے اور موازنہ کرنے کے نقطہ سے معیاری شکل میں لکھا یہ عدد اس 25 ہندسوں والے عدد کے مقابلے میں بہت زیادہ سہل اور آسان ہے۔

اب یورینس سیارے کا وزن

$=86,000,000,000,000,000,000,000$ کیلوگرام

کیلوگرام ہے $= 8.68\times10^{25}$

اب مندرجہ بالا دونوں عبارتوں میں صرف 10 کی قوتوں کا موازنہ کر کے ہی آپ یہ کہہ سکتے ہیں کہ یورینس سیارے کا وزن زمین سے زیادہ ہے۔

مثال : 12- مندرجہ ذیل اعداد کو معیاری شکل میں ظاہر کیجئے :

(i) 725.34 (ii) 956.230 (iii) 434.000 (iv) 800.403.000

حل :

(i) $725.34 = 7/2534 \times 100 = 7.2534 \times 102$

(ii) $956230 = 9.56230 \times 100000 = 9.5623 \times 10^5$

(iii) $434000 = 4.34000 \times 100000 = 4.34 \times 10^5$

(iv) $800403000 = 8.00403 \times 100000000 = 8.00403 \times 10^8$

اوپر کی مثال سے ظاہر ہے کہ کسی عدد کو معیاری شکل میں بدلتے وقت 10 کا قوت ذیل کی طرح سے بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

سب سے پہلے اعشاریہ نقطہ سے بائیں طرف کے اعداد کو ہندسوں کو گنتے ہیں۔ اعشاریہ نقطہ نہیں رہنے پر نقطہ کا قیاس دائیں طرف کر لیتے ہیں۔ پھر حاصل عدد میں سے 1 گھٹا کر جو حاصل ہوتا ہے۔ وہی 10 کی قوت ہوتی ہے۔ مثال (1) میں عدد 725.34 ہے۔ اس میں اعشاریہ کے بائیں طرف تین عدد ہیں۔ اس لیے 10 کی قوت = $3-1=2$ ہوگا۔

اس لیے $725.34 = 7.2534 \times 10^2$

اسی طرح مثال (2) میں عدد 956230 میں دائیں سرے پر نقطہ کا قیاس کرنے پر نقطہ کے بائیں طرف کل 6 ہندسے ہیں۔ اس لیے 10 کی قوت $6-1=5$ = ہوگا۔

اس لیے $956230 = 9.5623 \times 10^5$

سوالنامہ

-1 مندرجہ ذیل اعداد کو پھیلی ہوئی شکل میں لکھئے :

(i) 389505 (ii) 2005183 (iii) 230829 (iv) 30079 (v) 8324750

2- مندرجہ ذیل پھیلی ہوئی شکل میں سے ہر ایک کے لیے عدد معلوم کیجئے:

(i) $9 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 4 \times 10^0$

(ii) $7 \times 10^5 + 8 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 7 \times 10^0$

(iii) $6 \times 10^4 + 5 \times 10^2 + 7 \times 10^0$

(iv) $8 \times 10^5 + 3 \times 10^2 + 8 \times 10^1$

3- مندرجہ ذیل اعداد کو معیاری شکل میں ظاہر کیجئے:

(i) 7,00,00,000 (ii) 8,000,000 (iii) 416,000,000

(iv) 456,234 (v) 9634.21 (vi) 72439.62

4- مندرجہ ذیل اقوال میں ظاہر ہونے والے اعداد کو معیاری شکل میں لکھئے:

(i) زمین کا قطر 12756000 میٹر ہے۔

(ii) مارچ 2001 میں ہندوستان کی آبادی 1.27.000,000 تھی۔

(iii) سورج کا قطر 1,400,000,000 میٹر ہے۔

(iv) وہ مقام جہاں ہوا کا گذر نہ ہو، میں روشنی کی رفتار 300,000,000 میٹر/سکنڈ ہے۔

(v) نظام شمسی 12,000,000,000 سال پرانا تحقیق کیا گیا ہے۔

(vi) ایک نظام قمری میں اوسط 100,000,000,000 تارے ہیں۔

(vii) نظام قمری کے وسط سے سورج کی دوری 300,000,000,000,000,000,000 میٹر تحقیق کی گئی ہے۔

(viii) 1.8 گرام وزن والے پانی کی ایک بوند میں 60,230,000,000,000,000,000,000 جراثیم ہوتے ہیں۔

(ix) زمین میں 1,353,000,000 کیلومیٹر^3 سمندر کا پانی ہے۔

5- مندرجہ ذیل اقوال میں ظاہر ہونے والی دوریوں کو معیاری شکل میں ظاہر کرتے ہوئے گھٹتی ترتیب میں لکھئے:

(i) سورج اور ستارۂ زحل کے بیچ کی دوری 1,433,500,000,000 میٹر ہے۔

(ii) ستارۂ زحل اور یورینس کے بیچ کی دوری 1,439,000,000,000 میٹر ہے۔

(iii) سورج اور زمین کے بیچ کی دوری 149,600,000,000 میٹر ہے۔

(iv) زمین اور چاند کے بیچ کی دوری 384,000,000 میٹر ہے۔

ہم نے سیکھا

-1 بڑے عددوں کو قوتوں کا استعمال کر کے مختصر شکل میں لکھتے ہیں۔ جس سے بڑے عددوں کو پڑھنے، سمجھنے، موازنہ کرنے اور ان پر عملیات کرنے میں آسانی اور سہولت ہوتی ہیں۔

-2 عدد $10^5 = 100000$ اسے 10 کے اوپر قوت نما 5 پڑھا جاتا ہے۔ ہم یہ بھی کہتے ہیں کہ 10 کی پانچویں قوت نما 100000 ہے۔ یہاں 10 قاعدہ ہے اور 5 اس کا قوت نما ہے۔

-3 قوت نمائی شکل میں اعداد کچھ اصولوں کی تعمیل کرتے ہیں، جو اس طرح ہیں:

کسی غیر صفر (Non-Zero) اعداد صحیح a اور b اور مکمل اعداد m اور n کے لیے

(i) $a^m \times a^n = a^{mn}$

(ii) $a^m \div a^n = a^{mn}, m > n$

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iv) $a^m \times b^m = (ab)^m$

(v) $a^m \div b^m = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

(vi) $a^0 = 1$

(vii) $(-1)^{\text{جفت عدد}} = 1$

$(-1)^{\text{جفت عدد}} = -1$

باب : 9

الجبرائی عبارت

9.1: تمہید

ہم $x+3, y-5, 4x+5, 10y-5$ جیسے سہل الجبرائی عبارت سے متعارف ہو چکے ہیں۔ درجہ 6 میں ہم نے دیکھا تھا کہ یہ عبارت کس طرح پہیلیوں اور مسئلوں کو ایک منظم ڈھنگ سے پیش کرنے یں معاون ہوتے ہیں۔ ہم سہل مساواتوں والے باب میں بھی عبارتوں کی بہت ساری مثالوں کو دیکھ چکے ہیں۔

الجبرائی ریاضی میں عبارتوں (Expressions) کو ایک مرکزی تصور مانا جاتا ہے۔ یہ باب الجبرائی عبارتوں سے متعلق ہیں۔ اس باب میں ہم مطالعہ کریں گے کہ الجبرائی عبارت کس طرح بنتے ہیں؟ انھیں کس طرح سجایا (ملایا) جاتا ہے۔ ان کی قیمت ہم کیسے معلوم کر سکتے ہیں اور ان کا کس طرح استعمال کیا جاسکتا ہے۔

9.2- الجبرائی عبارت

پچھلی جماعت میں ہم نے دیکھا کہ کچھ متغیر (Variable) اور غیر متغیر (Constant) کو ملا کر بڑی عبارت بنایا گیا ہے۔ ان بڑی عبارتوں کو بنانے کے لے متغیر اور غیر متغیر کو جوڑ، گھٹاؤ، ضرب اور تقسیم کے عمل کے ذریعہ ملایا جاتا ہے۔ جیسے :

مثال : (a) $x+1$ x میں متغیر x میں 1 جوڑ کر $x+1$ حاصل کیا گیا ہے۔

(b) $x-1$ x میں متغیر x میں 1 گھٹا کر $x-1$ حاصل کیا گیا ہے۔

(c) $2x+1$ غیر متغیر 2 میں متغیر x سے ضرب کر کے $2x$ بنایا گیا ہے۔ پھر $2x$ میں 1 جوڑ کر $2x+1$ بنایا گیا ہے۔

9.2.1- الجبرائی عبارت کے رکن (Terms)

ایک عبارت $9x + 7$ پر غور کیجئے۔ اسے بنانے کے پہلے x اور 9 کا ضرب کر کے $9x$ بنایا گیا ہے۔ پھر $9x$ میں 7 جوڑ دیا گیا ہے۔

عبارت $3x^2 + 7y$ میں $3, x$ اور x کو ضرب کر کے $3x^2$ بنایا گیا ہے۔ پھر 7 کو y سے ضرب کر کے

$7y$ بنایا گیا ہے اور پھر آخر میں $3x^2$ کو $7y$ سے جوڑ کر $3x^2+7y$ عبارت بنایا گیا ہے۔ ایک دوسری مثال لیں کہ $3x^2-7xy$ اس عبارت میں کیا کیا گیا ہے؟

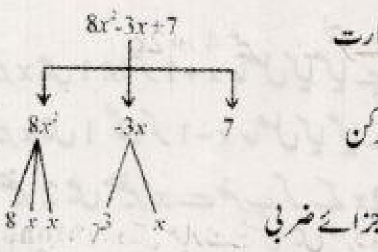
آیئے کچھ کر کے دیکھیں	
عبارت	فقرہ
$9x^2+2x-3$	$9x^2, 2x, -3$
$6x^2$	
$8x-7y$	
6	
0	
$7(x+y)+9$	

اس طرح ہم پاتے ہیں کہ کسی عبارت کے چھوٹے چھوٹے حصے ہوتے ہیں جو الگ سے بنائے جاتے ہیں۔ پھر آپس میں وہ چھوٹے چھوٹے حصے جوڑ دیئے جاتے ہیں اور عبارت بن جاتا ہے۔ عبارت کے یہ چھوٹے چھوٹے حصے جو پہلے الگ سے بنائے جاتے ہیں اور پھر جوڑ دیئے جاتے ہیں۔ عبارت کا رُکن کہلاتے ہیں۔ مندرجہ بالا پہلی مثال میں $9x$ اور 7 دو رُکن (Terms) ہیں۔ دوسری مثال میں $3x^2$ اور $7y$ رُکن ہیں اور تیسری مثال میں $7xy$ اور $(-3x^2)$ رُکن (Terms) ہے۔

9.2.2- رُکن کے اجزائے ضربی

ہم نے دیکھا کہ $(4x^2-7xy)$ میں دو رُکن ہیں۔ $4x^2$ اور $-7xy$۔ رُکن $4x^2$؛ $4, x$ اور x کا حاصل ضرب ہے۔ یہاں x، 4 اور x ، $4x^2$ کے اجزائے ضربی ہیں۔ اس لیے ہم پاتے ہیں کہ کوئی رُکن اپنے اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔

عبارت کے ارکان کے اجزائے ضربی کو ہم دلچسپ صورت میں درخت خاکہ طریقہ کے ذریعہ دکھا سکتے ہیں۔



کوشش کیجئے:

عبارت	رُکن	رُکن کے اجزائے ضربی	متغیر	غیر متغیر
$3x^2+2xy+9y^2$	$3x^2, 2xy, 9y^2$	$3x^2=3\times x\times x$ $2xy=2\times x\times y$ $9y^2=9\times y\times y$	x, y	3,2,9
$11x^2-7x+5$				

9.2.3- مضروب

ہم نے دیکھا کہ عبارت کے رُکن کو ان کے اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔
آپ نے یہ بھی دیکھا کہ رُکن کا جزءِ ضربی کوئی غیر متغیر ہو سکتا ہے اور اس کے علاوہ کوئی الجبرائی متغیر ہوسکتا ہے۔ جیسے $9x^2$ ایک رُکن ہے، جس کا اجزائے ضربی $9 \times x \times x$ ہے۔ اس میں 9 غیر متغیر ہیں اور باقی x^2 متغیر ہیں۔ کسی رُکن کے عددی (غیر متغیر) اجزائے ضربی کو رُکن کا عددی مضروب یا صرف مضروب کہتے ہیں۔ اسے باقی الجبرائی ارکان کا مضروب بھی کہتے ہیں۔ جیسے: $9xyz$ میں xyz کا مضروب 9 ہے۔ $-8x^2y^2$ میں x^2y^2 کا مضروب 8- ہے۔

کسی رُکن کا مضروب 1+ ہو تو رُکن لکھتے وقت اُسے نہیں لکھا جاتا ہے۔ جیسے $1x^2$ ، $1y$ کو x^2, y لکھا جاتا ہے۔ لیکن اگر مضروب 1- ہو تو اسے صرف گھٹاؤ والے نشان (–) کے ساتھ دکھایا جاتا ہے۔ جیسے $-1x$ کو $-x$ لکھتے ہیں۔

9.2.4 - یکساں اور غیر یکساں ارکان

جب ارکان کے الجبرائی اجزائے ضربی ایک جیسے ہی ہوں تو وہ رُکن "یکساں رُکن" (Like Terms) کہلاتے ہیں۔ جب ارکان کے الجبرائی اجزائے ضربی الگ الگ ہوں تو وہ غیر یکساں رُکن (Unlike Terms) کہلاتے ہیں۔
جیسے: عبارت $2xy - 3x + 5xy - 4$ میں ارکان $2xy$ اور $5xy$ کو دیکھیے۔ $2xy$ کے اجزائے ضربی $2, x$ اور y ہیں۔ $5xy$ کے اجزائے ضربی $5, x$ اور y ہیں۔ اس طرح ان کے الجبرائی اجزائے ضربی ایک ہی ہیں اور اس لیے یہ یکساں فقرے ہیں۔ اس کے بالمقابل ارکان $2xy$ اور $-3x$ میں الگ الگ الجبرائی جزءِ ضربی ہیں۔ یہ غیر یکساں فقرہ (Unlike Terms) ہیں۔ اسی طرح رُکن $2xy$ اور 4 غیر یکساں فقرے ہیں۔ ساتھ ہی $-3x$ اور 4 بھی غیر یکساں فقرے ہیں۔

9.2.5- عبارتوں کی قسمیں

1- ایک رُکنی عبارت (Monomial) : ویسی عبارت جس میں صرف ایک رُکن ہو ایک رُکنی عبارت کہلاتا ہے۔ جیسے $9x$ ، $3x^2$ ، y ، $8xy$ ، 8 ، 0 ، $3(x+y)$ وغیرہ۔

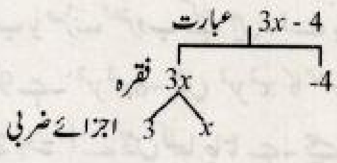
2- دو رُکنی عبارت (Binomial) : ویسی عبارت جس میں صرف دو فقرے ہوتے ہیں، دو رُکنی عبارت کہلاتے ہیں۔ جیسے $3x+2y$ ، x^2-9 ، a^2+ab وغیرہ۔

3- سہ رُکنی عبارت (Trinomial) : ویسی عبارت جن کے صرف تین فقرے ہوتے ہیں۔ سہ رُکنی عبارت کہلاتے ہیں۔ جیسے $9x^2-3x+2$ ، $x+y+z$ وغیرہ۔

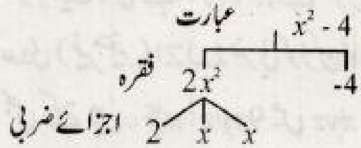
4- **کثیر رُکنی عبارت (Polynomial)** : عام طور سے ویسی عبارت، جس میں ایک یا ایک سے زائد فقرے ہوتے ہیں، کثیر رُکنی عبارت کہلاتے ہیں۔

مثال: 1 .... کے ذریعہ (a) $(3x-4)$ اور (b) $2x^2-4$ کا اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: (a)

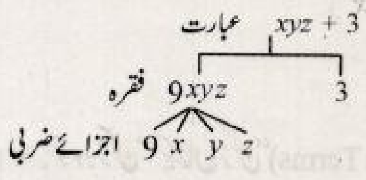


(b)



مثال: 2 $9xyz+3$ میں $x, xy, xyz, 9xy, 9xz, 9yz$ کا مضروب معلوم کیجیے۔

حل:



(a) x کا مضروب = x کو چھوڑ کر باقی رُکن = $9yz$

(b) xy کا مضروب = xy کو چھوڑ کر باقی رُکن = $9z$

(c) xyz کا مضروب = xyz کو چھوڑ کر باقی رُکن = 9

(d) $9xy$ کا مضروب = $9xy$ کو چھوڑ کر باقی رُکن = z

(e) $9xz$ کا مضروب = $9xz$ کو چھوڑ کر باقی رُکن = y

(f) $9yz$ مضروب = $9yz$ کو چھوڑ کر باقی رُکن = x

مثال: 3 وجہ سمیت بتایئے کہ ارکان کے مندرجہ ذیل جوڑوں کے کون کون سے جوڑے یکساں ارکان کے ہیں اور کون کون سے جوڑے غیر یکساں ارکان کے ہیں:

(i) $3ab, 3b$ (ii) $3a, -21b$ (iii) $17a, -6a$ (iv) $3^2b, 2ab^2$

حل:

نمبر شمار	فقرہ جوڑے	اجزائے ضربی	الجبرائی اجزائے ضربی	یکساں/غیر یکساں فقرے	وجوہات
(i)	$3ab, 3b$	$3\times a\times b, 3\times b$	الگ الگ	غیر یکساں	متغیر a دوسرے رُکن میں نہیں ہے
(ii)	$3a, -21b$	$3\times a - 21\times b$	الگ الگ	غیر یکساں	الجبرائی اجزائے ضربی الگ الگ ہیں

(iii)	$17a, -6a$	$17\times a - 6\times a$	یکساں	یکساں	دونوں الجبرائی اجزائے ضربی یکساں ہیں۔
(iv)	$3a^2b, 3ab^2$	$3\times a\times a\times b$ $3\times a\times b\times b$	الگ الگ	یکساں	متغیر تو ایک ہی جیسے ہیں، لیکن ان کی قوتیں غیر یکساں ہیں۔

مثال: 4 مندرجہ ذیل عبارتوں میں سے ایک رُکنی، دو رُکنی اور سہ رُکنی عبارتوں کو الگ کریں:

$6x+9, x+y+1, 9x, 8x^2+7x+2, 2, -5x-y, 4-x, 4-x^2, 8y^2$
$, 2xy, 3x^2y-1$

حل: ایک رُکنی عبارت: $ax-2, 8y^2, 2xy$

دو رُکنی عبارت: $6x+9, -5x-y, 4-x, 4-x^2, 3x^2y-1$

سہ رُکنی عبارت: $x+y+1, 8x^2+7x+2$

سوالنامہ : 9.1

1- مندرجہ ذیل عبارتوں میں سے متغیر اور غیر متغیر اعداد و تعداد معلوم کریں:

(a) $5x+2$ (b) $2ab+1$ (c) $2x^2y-1+2x$

(d) m^2-n^2-1 (e) $9x^2yz$

2- مندرجہ ذیل عبارتوں کے ارکان کو پہچانئے:

(a) x^2+2x+1 (b) $8a^2+11ab=2b^2$ (c) $9p^2-4q$

(d) a^2b^2-9 (e) $8ab-3b$

مندرجہ بالا سوالوں میں دیئے گئے سبھی عبارتوں کے ارکان کے اجزائے ضربی درخت خاکہ قاعدہ سے حاصل کریں۔ ہر ایک حالت میں یہ بھی بتایئے کہ عبارت کی بناوٹ کیسے کی گئی ہے؟

3- $12x^2y$ (i) میں x^2y (ii) x اور y کا مضروب بتایئے۔

4- ذیل میں دیئے گئے ارکا کے جوڑے میں سے یکساں ارکان کے مجموعے لکھئے:

$9x^2y, 8xy^2, 3ab, -7ba, 7ab^2, -4b^2, 7a, 7, 11a, -11a^2, 2xy,$

$-2xy, 8ab, -2a, -2, 1, -x, 3x, 8x, 8$

-5 نیچے دی گئی حالتوں میں متغیر اور متغیر اور ریاضی اعمال کا استعمال کرتے ہوئے الجبرائی عبارت حاصل کیجئے۔ یہ بھی بتایئے کہ بنی عبارت ایک رُکنی، دو رُکنی یا سہ رُکنی ہے۔

(a) x کے دو گنے سے y کم۔

(b) a میں خود سے ضرب کر کے 3 گھٹایا گیا ہے اور پھر اس میں سے a کا تین گھٹایا گیا ہے۔

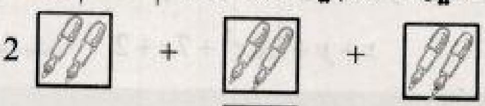
(c) m اور n کے حاصل ضرب کا تین گنا۔

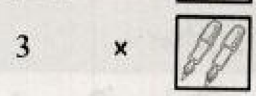
(d) a کا خود سے ضرب کر کے b سے ضرب کیا گیا اور اس میں a کا سات گنا گھٹا کر اس میں 6 کو جوڑا گیا ہے۔

(e) a^2 کے تین گنے میں a کا دو گنا گھٹایا گیا ہے۔

-9.3 الجبرائی عبارتوں پر عملیات

سپنا کے پاس قلم کے تین ڈبے ہیں۔ اگر ہر ایک ڈبے میں دو قلم ہو تو قلم کی تعداد

$= 2 + 2 + 2$ 

$= 2 \times 3$ 

$= 6$ 

اگر ڈبوں کی تعداد 5 ہو تو قلم کی کل تعداد

$= 2 + 2 + 2 + 2 + 2$ 

$= 2 \times 5 \quad = 10$

اگر ڈبوں کی تعداد n ہو تو قلموں کی کل تعداد

$= 2 + 2 + 2 + \ldots\ldots\ldots\ldots n$ بار

$= 2 \times n \quad = 2n \quad \because$ ($2n$ کا اجزائے ضربی $n \times 2$ ہے) $2x$

اسی طرح اگر ایک ڈبے میں n قلم ہو تو 8 ڈبے میں قلم کی تعداد کا کل عدد $= 8n$ اب اگر ہر ایک ڈبے میں n قلم والے 3 ڈبوں میں اور ہر ایک ڈبے میں n قلم والے 8 ڈبوں کے کل قلم کو جوڑا جائے تو

کل قلموں کی تعداد $= 3n + 8n$

$$= (n + n + n) + (n + n + n + n + n + n + n + n)$$
$$= 11 \times n \quad = 11n$$

یہاں یکساں ارکان $3n$ اور $8n$ کو جوڑنے پر حاصل جمع $11n$ آتا ہے۔ یہاں $3n$ کا 3، $8n$ کا 8 اور حاصل جمع $11n$ کا مضروب 11 ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ارکان کے مضروبوں کا جمع (3+8) حاصل جمع کے مضروب 11 کے برابر ہوتا ہے۔ اس سے یہ صاف ظاہر ہوتا ہے کہ الجبرائی عبارت کے حاصل جمع میں یکساں ارکان کے مضروب آپس میں جُو جاتے ہیں۔ اسی طرح الجبرائی عبارت کے گھٹانے میں یکساں ارکان کے مضروب گھٹ جاتے ہیں۔ جیسے: $7x$ میں سے $3x$ گھٹانے کے لیے $7x$ کے مضروب میں سے $3x$ کے مضروب 3 کو گھٹا کر آئی قیمت (Value) کو الجبرائی اجزائے ضربی کے ساتھ لکھتے ہیں۔ یعنی $7x-$

$$3x = 4x$$

$\because$ کسی رُکن کو گھٹانے کا مطلب ہوتا ہے اُس کے جمعی معکوس کا جوڑنا۔ اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ گھٹانا عام طور سے جوڑنے ہی کا عمل ہے۔

مثال: 5 (i) $7x$ میں $-3x$ کو گھٹائیں۔

حل:
$7x-(-3x)$
$\because \; -1\times(-3)=3$
$=7x+3x \qquad =10x$

(ii) $-7x$ میں سے $-3x$ کو گھٹائیں۔

حل:
$-7x-(-3x)$
$=-7x+3x$
$(\because\; -7+3=-4) \qquad =-4x$
($-3x$ کا جمعی معکوس $+3x$ ہے)

(iii) $-7x$ میں $-3x$ کو جوڑیے۔

حل:
$-7x+(-3x)$
$\because -1\times(-3)=-3$
$=-7x-3x$
$\because -7-3=-10$
$=-10x$

(iv) $8x$، $-3x$، $7x$ کو جوڑیے۔

حل:
$8x+(-3x)+7x$
$=8x-3x+7x$
$=8x+7x-3x$
$=15x-3x$
$=12x$

(v) $-12m$، $6m$، $-7m$ اور $4m$ کو جوڑیے۔

حل:
$-12m+6m+(-7m)+4m$
$=-12m+6m-7m+4m$

$= -12m - 7m + 6m + 4m$

$= -19m + 10m \qquad (\because -12m - 7m = -19m)$

$= -9m \qquad (6m + 4m = 10m)$

ابھی تک ہم نے یکساں ارکان والی عبارتوں کے جوڑ اور گھٹاؤ کو جانا۔ اب ذرا بتایئے کہ رنجنا کے پاس 3 گائیں اور 2 بھینسیں ہوں، شوکت کے پاس 4 گائیں اور 5 بھینسیں ہوں تو رنجنا اور شوکت کے پاس کل جانوروں کی تعداد

رنجنا کے جانور	+	شوکت کے جانور
(3 گائیں + 2 بھینسیں)	+	(4 گائیں + 5 بھینسیں)
(3 گائیں + 2 بھینسیں)	+	(4 گائیں + 5 بھینسیں)
(3 گائیں + 4 گائیں)	+	(2 بھینسیں +5 بھینسیں)
(7 گائیں + 7 بھینسیں)		

یہ ظاہر ہے کہ رنجنا اور شوکت کے پاس کل 14 جانور ہیں۔ جن میں 7 گائیں اور 7 بھینسیں ہیں۔ ہم یہ نہیں کہہ سکتے کہ ان کے پاس 14 گائیں ہیں یا 14 بھینسیں۔

اس مثال سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ جوڑنے اور گھٹانے کے عمل یکساں ارکان کے بیچ ہی ہوتا ہے۔ غیر یکساں ارکان ہونے پر جوڑنے اور گھٹانے کے لیے ارکان کو جوڑ کی علامت یا گھٹاؤ کی علامت کے رکھتے ہیں۔

الجبرائی عبارتوں کو جوڑنے -گھٹانے میں

1- یکساں اور غیر یکساں ارکان کو پہچان کرتے ہیں۔

2- یکساں ارکان کو ان کی علامت کے ساتھ ایک ساتھ لکھتے ہیں۔

3- عام عدد صحیح کی طرح ان یکساں ارکان کو ایک ساتھ جوڑتے اور گھٹاتے ہیں۔

4- پھر اگر ایک یا زائد غیر یکساں رُکن بچتے ہیں تو انھیں ان کے مضروب کی علامت کے ساتھ منظم کر لکھ دیتے ہیں۔

مثال: 6 (i) $5x + 6x$ میں $8x + 9y$ کو جوڑیئے۔

حل: $(5x + 6y) + (8x + 9y)$

$= 5x + 6y + 8x + 9y$

$= 5x + 8x + 6y + 9y$ (یکساں ارکان کو ایک ساتھ لکھ کر دوبارہ منظم کیا گیا)

$= 13x + 15y$ حل حاصل ہوا

$$\begin{array}{r} 5x + 6y \\ 8x + 9y \\ \hline 13x + 15y \end{array}$$

ان عبارتوں کو ہم عام ستون والے جوڑوں کی طرح بھی جوڑ سکتے ہیں۔ اس کے لیے ہم عبارتوں کو ایک کے نیچے ایک کر کے اسی طرح رکھتے ہیں کہ یکساں رُکن ایک ہی سیدھ میں ہو۔

(ii) $7ab + 4a$ میں $a + 8ba$ کو جوڑیے:

حل: $(7ab + 4a) + (a + 8ba)$

$= 7ab + 4a + a + 8ba$

$= 7ab + 4a + a + 8ab \quad (\because ab = a \times b = b \times a = ba)$

$= 7ab + 8ab + 4a + a \quad (a = 1a)$

$= 15ab + 5a$

دوسرا قاعدہ:

$$\begin{array}{l} 7ab + 4a \\ a \quad + 8ba \end{array} \quad \text{یا} \quad \begin{array}{l} 7ab + 4a \\ 8ba + a \end{array} \quad \text{یا} \quad \begin{array}{r} 7ab + 4a \\ 8ab + a \\ \hline 15ab + 5a \end{array}$$

(iii) $13m^2 - 4xy$ میں $12xy + 4m^2$ کو گھٹائیے:

حل: $(13m^2 - 4xy) - (12xy + 4m^2)$

$= 13m^2 - 4xy - 12xy - 4m^2$

$= 134m^2 - 4xy - 12xy$

$= 9m^2 - 16xy$

بائس کے پہلے گھٹاؤ (–) نشان ہے۔ باکس کھلنے پر ہر ایک رُکن میں 1– سے ضرب ہوتا ہے، جس سے ارکان کے نشان بدل جاتے ہیں۔

دوسرا قاعدہ:

$$\begin{array}{r} 13m^2 - 4xy \\ 4m^2 + 12xy \\ \hline 9m^2 - 16xy \end{array}$$

(iv) $3x-y+6$ میں سے $x-y$ گھٹایئے:

حل: $(3x-y+6)-(x-y)$

$= 3x-y+6-x+y$ ∵ (قوسین کے رُکن سے پہلے گھٹاؤ (-) کے نشان ہیں۔

$= 3x-x-y+y+6$ اس لیے قوسین کھلنے پر ارکان کی علامت بدل گئے)۔

$= 2x+6$ $(-y+y=0)$

(v) $3a+4b-7$ میں 8^2+4b^2 کو جوڑیے۔

حل: $(3a+4b-7)+(8a^2+4b^2)$

$= 3a+4b-7+8a^2+4b^2$

$= 3a+4b-7+8a^2+4b^2 = 8a^2+4b^2+3a+4b-7$

∵ یہاں دونوں عبارتوں میں کوئی رُکن یکساں نہیں ہے۔ اس لیے عمل کے بعد ارکان کی تعداد بڑھ جاتی ہے۔

سوالنامہ : 9.2

1- مندرجہ ذیل عبارتوں کو جوڑیے:

(a) $6ab$ اور $7ba$ (b) $8x^2y$ اور $-4x^2y$

(c) x اور $y-4$ (d) $x-y, y-z$ اور $z-x$

(e) $3ab-b$ اور $3b-ab$ (f) x^2-y^2 اور y^2-x^2

(g) $a^2+2ab+b^2$ اور $a^2-2ab+b^2$ (h) $a^2b+ab+ab^2$ اور $-ab+2ba+2a^2b^2$

(i) $3x+11+8z$ اور $5x-7$ (j) x^2-y^2-1, y^2-1-x^2 اور $1-x^2-y^2$

2- گھٹایئے:

(a) $3a^2$ میں سے $-7a^2$ (b) a^2+b^2 میں سے a^2-b^2

(c) $a^2+2ab+b^2$ میں سے $a^2-2ab+b^2$

(d) $b(8-a)$ میں سے $a(b-3)$ (e) $3xy-2x^2-2y^2$ میں سے $5x^2-7xy+5y^2$

3- سہل کیجئے:

(a) $4xy-7x^2-6xy+2yz^2-4y^2z-3yz^2$

(b) $a^2+ab+b^2+a^2+b^2-ab+3$

-4 x^2+y^2 حاصل کرنے کے لیے $2x^2+y^2-3$ میں کیا جوڑیں؟

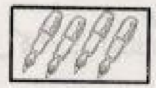
-5 $a+b+c$ حاصل کرنے کے لیے $7a-8b$ میں کیا گھٹانا چاہیے؟

-6 اگر سنیل نے a روپیہ کی شرح سے 5 قلم b روپیہ کی شرح سے 7 پنسلیں اور پھر a روپیہ کی شرح سے 10 قلمیں اور b روپیہ کی شرح سے 3 پنسلیں خریدیں تو اُس نے کل قلم اور پنسل خریدنے میں کتنے روپے خرچ کیے؟

-9.4 الجبرائی عبارتوں کا ضرب

شالنی کے پاس 3 ڈبے ہیں۔ ہر ایک میں 4 قلم ہیں تو کل قلم کی تعداد کیا ہوگی؟


+

+


$= 4 + 4 + 4$

$= 3 \times 4$

= ڈبوں کی تعداد × ہر ایک ڈبے میں قلموں کی تعداد

اگر شالنی کے پاس ڈبوں کی تعداد x ہو اور ہر ایک ڈبے میں y قلم ہو تو

$= y \times x$

$= xy$

پھر اگر مان لیں کہ شالنی کے پاس $2m$ ڈبے ہوں اور ہر ایک ڈبے میں $3m$ قلم ہو تو کل قلم

$= 2m \times 3m$

$= 2 \times 3 \times m \times m$

$= 6m^2$

اس طرح ہم نے دیکھا کہ عبارتوں کا ضرب حقیقت میں ان کے ارکان کا ضرب ہوتا ہے۔ جس میں ارکان کے عددی مضروب کا ضرب آپس میں اور متغیر کا ضرب آپس میں ہوتا ہے۔

اب ذرا سوچیے کہ ان الجبرائی عبارتوں کے ضرب کا استعمال ہم کہاں کہاں کرتے ہیں؟

آیئے کچھ کریں:

نیچے دیئے گئے عبارتوں کے حاصل ضرب پیٹرن(Pattern) کی بنیاد پر خالی جگہوں کو پُر کریں:

نمبر شمار	پہلی عبارت	دوسری عبارت	پہلی عبارت × دوسری عبارت	دوسری عبارت × پہلی عبارت	حاصل ضرب
-1	x	y	$x \times y$	$y \times x$	xy
-2	x	5			
-3	a	$2a$			
-4	-3	$3m$			

مندرجہ بالا مثالوں کی بنیاد پر ہم یہ سمجھ سکتے ہیں کہ عبارتوں کا ضرب اعداد صحیح کے ضرب کے ہی جیسا ہے اور اس میں ضرب کے عام اصولوں کو عمل میں لایا جاتا ہے۔

عبارتوں کے ضرب کرتے وقت اصولوں کے ضرب کے ذیل باتوں پر دھیان دیا جانا چاہیے۔

(i) مثبت عدد صحیح کو مثبت عدد صحیح سے ضرب کرنے پر مثبت عدد صحیح حاصل ہوتا ہے:

$$(+a)\times(+b) = +ab$$

(ii) مثبت عدد صحیح کو منفی عدد صحیح سے ضرب کرنے پر منفی عدد صحیح حاصل ہوتا ہے۔

$$(+a)\times(-b) = -ab$$

(iii) منفی عدد صحیح کو منفی عدد صحیح سے ضرب کرنے پر مثبت عدد صحیح حاصل ہوتا ہے۔ اگر کثیر رُکنی عبارت ہے تو $(-a)\times(-b) = +ab$

پہلے عبارت کے ہر ایک رُکن سے دوسری عبارت کے ہر ایک رُکن میں ضرب کیا جانا چاہیے۔

$a\times(b+c)$ ہو تو a سے عبارت $(b+c)$ کے دونوں رُکنوں b اور c میں ضرب کیا جانا چاہیے۔

مثال: 7- ضرب کیجیے:

(a) a اور $(b+c)$ کا　　(b) a اور $(b-c)$ کا

(d) $-3m$ اور $(-6m-7n)$ کا　　(d) xy اور $(9+8n)$ کا

(e) $-x$ اور $(4x-y)$ کا

حل:

(a) $(a)\times(b+c)=a\times b+a\times c$

$=ab+ac$

(b) $(a)\times(b-c)=a\times b-a\times c$

$=ab-ac$

(c) $(-3m)\times(-6m-7n)=(-3m)\times(-6m)-(-3m)-7n$

$=+18m^2+21mn$

$=18m^2+21mn$

(d) $(xy)\times(9+8x)=xy\times 9+xy\times 8x$

$=9xy+8x^2y$

(e) $(-x)\times(4x-y)=(-x)\times(4x)-(-x)\times y$

$=-4^2+xy$

سوالنامہ : 9.3

-1 نیچے دیے گئے الجبرائی عبارتوں کا ضرب کیجئے:

(a) $(7a+2b)(a+4b)$ (b) $(x-6)(4x+9)$

(c) $(5x-1)(3y-8)$ (d) $(a^3-b^3)(a-b)$

(e) $(0.7x-0.2y)(1.5x-3y)$ (f) $(3a^2+5a-9)(3a-9)$

(g) $(-x-y)(-x-y)$ (h) $(x^3-5x+8)(x^3+3)$

(i) $(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y)(x-y)$ (j) $(3pq-3q)(3q-7pq)$

-2 سہل کریں:

(a) $(a+b)(a-b)+(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(b) $a^3-b^3+(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(c) $m^2-n^3-(m-n)(m+n)$

(d) $(2a+5b)(3b+4a)-(7a+3b)(2a+b)$

سوالنامہ

1- نامعلوم عدد میں حرف علامتوں کے ذریعہ لکھے جاتے ہیں۔ جنھیں متغیر(Variable) کہتے ہیں۔ متغیروں کی قیمت(Value) بدل سکتی ہے۔ 2- غیر متغیر کی قیمت مقرر ہوتی ہے۔

3- متغیر اور غیر متغیر یا دونوں کی ریاضی اعمال کے ذریعہ الجبرائی عبارت حاصل کیے جاتے ہیں۔

4- الجبرائی عبارت ارکان(Terms) سے مل کر بنے ہوتے ہیں۔ جو متغیر اور غیر متغیر کی ریاضی اعمال کے ذریعہ بنے ہوتے ہیں۔ 5- ارکان کے عددی جزء ضربی کو رُکن کا مضروب کہتے ہیں۔

6- اگر ارکان کے الجبرائی اجزائے ضربی یکساں ہوتو وہ یکساں ارکان ہوتے ہیں۔

7- اگر ارکان کے الجبرائی اجزائے ضربی غیر یکساں ہوتو وہ غیر یکساں ارکان ہوتے ہیں۔

8- الجبرائی عبارت میں ارکان کی تعداد کی بنیاد پر انھیں یک رُکنی، دو رُکنی اور سہ رُکنی یا کثیر رُکنی کی قسموں میں بانٹا جاتا ہے۔

9- عبارت کو کثیر رُکنی (Polynomial) بھی کہتے ہیں۔

10- جن عبارتوں میں ایک متغیر ہوتے ہیں۔ وہ ایک متغیر والی عبارت کہلاتے ہیں۔ جن عبارتوں میں دو متغیر ہوتے ہیں، وہ دو متغیر والی عبارت کہلاتی ہے۔

11- دو یکساں ارکان کا جوڑ (یا گھٹاؤ) ایک دوسرے یکساں رُکن ہوتا ہے۔ جس کا مضروب ان یکساں ارکان کے مضروبوں کے جوڑ (یا گھٹاؤ) کے برابر ہوتا ہے۔

12- غیر یکساں ارکان کو جوڑتے (یا گھٹاتے) وقت انھیں ویسے ہی چھوڑ دیا جاتا ہے۔ جیسے:

$$3x+2y=3x+2y$$

13- جب ہم دو یا زائد عبارتوں کو جوڑتے یا گھٹاتے ہیں تو اصل میں ہم ان کے یکساں ارکان کو جوڑتے یا گھٹاتے ہیں اور غیر یکساں ارکان کو جیوں کا تیوں چھوڑ دیتے ہیں۔

14- عبارتوں کے ضرب میں متغیروں کا متغیروں کے ساتھ اور غیر متغیروں کا غیر متغیروں کے ساتھ ضرب کرتے ہیں۔

15- اگر کسی متغیر کا غیر متغیر کے ساتھ ضرب ہوتو انھیں آپس میں ضرب کے نشان کے ساتھ لکھ دیتے ہیں۔ جیسے:

$$2\times x=2x$$

باب : 10

اعداد کا موازنہ

10.1 : تمہید

ہمیں اپنے روزمرہ کی زندگی میں بہت بار ایسے مواقع میسر ہوتے ہیں، جہاں پر دو اعداد کا موازنہ کرنے کی ضرورت پڑتی ہے۔

مان لیا جائے کہ دو پیڑوں کی اونچائی کا موازنہ کر رہے ہیں۔ ہم پاتے ہیں کہ

(i) کھجور کیلے سے 3 گنا لمبا ہے۔

یا

(ii) کیلے کی اونچائی کھجور کی اونچائی کی ایک تہائی ہے۔

9 میٹر

3 میٹر

ایک اور مثال پر غور کیجیے جس میں ہم سائیکل اور اسکوٹر کی رفتار کا موازنہ کرتے ہیں :

(i) اسکوٹر کی رفتار سائیکل سے 4 گنا ہے۔

(ii) یا سائیکل کی رفتار اسکوٹر کی رفتار سے ¼ (چوتھائی) حصہ ہے۔

60 کیلومیٹر/گھنٹہ

15 کیلومیٹر/گھنٹہ

کوشش کیجیے :

(i) رویندر اور کشور کے ذریعہ حساب میں حاصل عدد بالترتیب 65 اور 62 ہے۔ ان کے نمبر کا تناسب (Ratio) بتایئے۔

(ii) 5:7 کا برعکس نسبت کیا ہوگا ؟

مثال: 1 ایک بکس کی لمبائی 2 میٹر اور چوڑائی 80 سینٹی میٹر ہے۔ اس کی لمبائی اور چوڑائی میں نسبت (Ratio) معلوم کیجئے۔

حل: پہلے دونوں عددوں کو ایک ہی اکائی میں لکھتے ہیں۔

اس لیے 2 میٹر = 2×100 سینٹی میٹر = 200 سینٹی میٹر

اسی طرح لمبائی : چوڑائی = 200 سینٹی میٹر : 80 سینٹی میٹر

$\frac{200}{80} = \frac{5}{2} = 5:2$

دھیان رہے کہ موازنہ کرتے وقت دونوں عددوں کی اکائیاں بھی یکساں ہونا چاہئیں۔

مثال: 2 اگر پروین کی اونچائی 150 سینٹی میٹر اور گنجن کی اونچائی 60 سینٹی میٹر ہے تب ان کی اونچائیوں کا نسبت کیا ہوگا؟

حل: پروین کی اونچائی : گنجن کی اونچائی = 150 سینٹی میٹر : 60 سینٹی میٹر

دونوں فقروں میں 30 سے تقسیم دینے پر $= \frac{150}{60} = \frac{5}{2}$

$= 5:2$

اگر مندرجہ بالا دونوں مثالوں پر دھیان دیں تو آپ پائیں گے کہ دو مختلف حالتوں میں موازنہ کرنے پر ایک ہی نسبت مل سکتا ہے۔

نسبت کی سہل شکل (Simplest Form of Ratio)

نسبت کی سہل شکل تب ہوتی ہے جب اس کے اوپر اور نیچے دونوں جگہوں میں انھیں تقسیم کرنے والا کوئی مشترک عدد نہ ہو۔

مثال: 3 36 اور 24 میں کیا تناسب ہے؟ اس کا نسبت معلوم کیجئے:

حل: 36 اور 24 میں تناسب (Ratio) = 36 : 24

36 اور 24 کا مشترک مقسوم علیہ اعظم (.H.C.F) کے لیے عمل

2	36, 24
2	18, 12
3	9, 6
	3, 2

$H.C.F. = 2\times2\times3 = 12$

سہل تناسب کے لیے

$(36\div12):(24\div12) = 3:2$

∵ سہل تناسب = 3:2

سہل نسبت حاصل کرنے کے لیے تناسب کے دونوں مقاموں میں ان کے مشترک مقسوم علیہ اعظم سے تقسیم دیتے ہیں۔ حاصل خارج قیمت کی نسبت سہل نسبت ہوتا ہے۔

10.2- مساوی نسبت

مختلف نسبتوں کا بھی آپس میں موازنہ کیا جا سکتا ہے، جس سے یہ پتہ چل سکے کہ وہ مساوی ہیں یا نہیں۔ ایسا کرنے کے لیے ہمیں نسبتوں کو پہلے کسروں کی شکل میں لکھنا پڑتا ہے۔ اور پھر انھیں یکساں نسب نما والے کسروں میں بدل کر ان کا موازنہ کرتے ہیں۔ اگر وہ کسر یکساں ہیں تب ہم کہتے ہیں کہ دیے ہوئے نسبت (Ratio) مساوی ہیں۔

مثال: 6 کیا نسبت 2:3 نسبت 3:5 کے مساوی ہے؟

حل: جانچ کرنے کے لیے ہمیں دیکھنا ہوگا کہ کیا $\frac{3}{5} = \frac{2}{3}$ ہے؟

ہم پاتے ہیں کہ $\frac{2}{3} = \frac{2\times5}{3\times5} = \frac{10}{15}$ اور $\frac{3}{5} = \frac{3\times3}{5\times3} = \frac{9}{15}$

ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{9}{15} > \frac{10}{15}$ ہے۔ یعنی $\frac{3}{5} > \frac{2}{3}$ ہے۔

اس لیے نسبت (Ratio) 2:3 نسبت 3:5 کے مساوی نہیں ہے۔

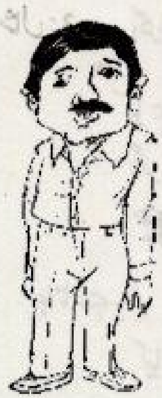
مثال: 5 کیا نسبت 5:6 نسبت 25:30 کے مساوی ہے؟

حل: جانچ کرنے کے لیے ہمیں دیکھنا ہوگا کہ کیا $\frac{25}{30} = \frac{5}{6}$ ہے۔

ہم پاتے ہیں کہ $\frac{5}{6} = \frac{5\times5}{6\times5} = \frac{25}{30}$ اور $\frac{25}{30} = \frac{25\times1}{30\times1} = \frac{25}{30}$

ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{25}{30} = \frac{25}{30}$ ہے یعنی $\frac{25}{30} = \frac{5}{6}$ ہے۔

اس لیے نسبت (Ratio) 5:6 نسبت 25:30 کے مساوی ہے۔



تناسب (Proportion)

ایلیش نے ایک آدمی کی تصویر بنائی لیکن اس تصویر میں گڑبڑی ہوئی۔ اس میں آدمی کا سر جسم کے مقابلے میں زیادہ بڑا دکھائی دے رہا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ آدمی کے سر اور جسم کی تصویر میں ایک متعین نسبت ہوتا ہے، وہی اس کی تصویر میں بھی نظر آنا چاہیے۔ یعنی تصویر کا سر اور جسم آدمی کے سر اور جسم کے تناسب میں ہونا چاہیے۔

یعنی $\dfrac{\text{آدمی کے سر کی بناوٹ}}{\text{اس کے جسم کی بناوٹ}} = \dfrac{\text{تصویر میں سر کی بناوٹ}}{\text{تصویر میں جسم کی بناوٹ}}$

ایسا ہونے پر ہی صحیح تناسب میں تصویر بنے گی۔

ابھی ہم نے دیکھا کہ دو نسبت مساوی بھی ہو سکتے ہیں۔ دو نسبت اگر مساوی ہوں تو وہ ایک تناسب بناتے ہیں۔ آیئے اس کی ایک مثال لیتے ہیں:

اگر دس کرسیوں کی قیمت 3000 روپے ہیں اور اُسی طرح کی 12 کرسیوں کی قیمت 3600 روپے ہیں تو

کرسیوں کی تعداد میں تناسب = 10:12 یا 5:6

کرسیوں کی قیمت میں تناسب = 3000:3600 یا 5:6

ظاہر ہے کہ $= 10:12 = 3000:3600$

یعنی کرسیوں کی تعداد میں وہی نسبت ہے جو ان کی قیمت میں تناسب ہے۔

اگر دو نسبت باہم برابر ہوتے ہیں تو انھیں تناسب کہتے ہیں۔ اعداد کے تناسب میں ہونے پر دو نسبتوں کے بیچ :: علامت لگاتے ہیں۔

یعنی اگر $a:b$ اور $c:d$ آپس میں برابر ہیں تو $a:b = c:d$ کو تناسب کہتے ہیں۔ a, b, c اور d کو تناسبی اعداد (Numbers in Proportion) کہتے ہیں۔ اعداد کو تناسب میں رکھنے پر $a : b :: c : d$ لکھا جاتا ہے۔ ان چاروں مقاموں میں پہلا (a) اور چوتھا (d) مقاموں کو خارجی رُکن (Extreme Term) کہتے ہیں۔ دوسرے (b) اور تیسرے (c) مقام کو داخلی یا وسطی رُکن (Middle Term) کہتے ہیں۔

اگر $a : b :: c$ ہے تو $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

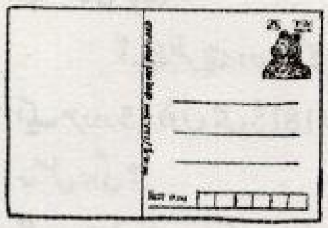
یا $a \times d = b \times c$ یعنی خارجی رُکنوں کا حاصل ضرب = وسطی رکنوں کا حاصل ضرب

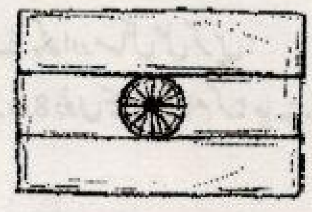
اگر $ad \neq bc$ تو a, b, c اور d تناسب میں نہیں کہے جا سکتے ہیں۔

حقیقی زندگی میں تناسب کا وسیع استعمال طریقہ وحدانی، نقشہ کا خطی خاکہ، نسبتی خطی خاکہ میں کیا جاتا ہے۔

کیا آپ جانتے ہیں کہ قومی ترنگا، پوسٹ کارڈ وغیرہ لمبائی اور چوڑائی کے ایک مقررہ نسبت میں

ہی بنائے جاتے ہیں۔ وہ نسبت الگ الگ ملکوں کے لیے مختلف ہو سکتا ہے۔ ایسا، اس لیے ہے کہ جب صحیح تناسب میں کوئی تصویر بنائی جاتی ہے تبھی دیکھنے میں خوشنما اور پُرکشش ہوتی ہے۔





(تصویر 10.2)

ہم نے درجہ 6 میں طریقۂ وحدانی کے ذریعہ سوال حل کرنا سیکھا ہے۔ اس طریقہ کے ذریعہ پہلے ہم بہت سے ایک اور پھر مطلوبہ عدد کے لیے قیمت معلوم کرتے ہیں۔ آیئے ہم کچھ مثال لیتے ہیں:

مثال: 6 اگر 6 بلبوں کی قیمت 78 روپیہ تو ایسے 9 بلبوں کی قیمت کیا ہوگی؟

حل: اسے راجیش اور سنیل نے الگ الگ طریقوں سے حل کیا۔

پہلا طریقہ: (راجیش)

چونکہ 6 بلبوں کی قیمت $= 78$ روپیہ

اس لیے 1 بلب کی قیمت $= \frac{78}{6}$

اس لیے 9 بلبوں کی قیمت $= \frac{78}{6} \times 9 = 117$ روپیہ

دوسرا قاعدہ: (سنیل)

قیمت	x	78
بلبوں کی تعداد	9	6

مانا کہ 9 بلبوں کی قیمت x روپیہ ہے

تو $78 : x :: 6 : 9$ یا $\frac{78}{x} = \frac{6}{9}$ یا $78 \times 9 = 6 \times x$

یا $\frac{78 \times 9}{6} = x$ یا $x = 117$ روپیہ

اس لیے 9 بلبوں کی قیمت = 117 روپیہ

دوسرے طریقے میں پہلے تناسب بنا کر پھر ایک مساوات حاصل کیا اور حل نکالا۔ پہلے قاعدے میں پہلے 1 چیز کی قیمت نکال کر پھر مطلوبہ چیزوں کی قیمت معلوم کی۔ اسی طرح اس میں وحدانی قاعدے کا استعمال کیا۔

آیئے طریقۂ وحدانی کا استعمال کرتے ہوئے کچھ اور مسائل حل کریں:

مثال: 7 ایک مزدور 15 دنوں میں 1815 روپیہ کماتا ہے۔ اگر وہ 8 دنوں تک ہی کام کرنا چاہیے تو اسے کتنی ضروری حاصل ہوگی؟

حل: پہلا طریقہ: چونکہ 15 دنوں کی مزدوری =1815 روپیہ

اس لیے دن کی مزدوری $= \frac{1815}{15} = 121$ روپیہ

اس لیے 8 دن کی مزدوری $= 121 \times 8 =$ روپیہ 968 روپیہ

دوسرا طریقہ:

مزدوری روپیہ میں	1815	x
دنوں کی تعداد	15	8

مان لیا کہ مزدوری x روپیہ ہے۔

تو $1815 : x :: 15 : 8 \quad \Rightarrow \frac{1815}{x} = \frac{15}{8} \quad \Rightarrow 1815 \times 8 = x \times 15$

سوالنامہ: 10.1

$\Rightarrow \frac{1815 \times 8}{15} = x \quad \Rightarrow x = 968$ روپیہ

-1 نسبت معلوم کیجئے:

(a) 3 کیلوگرام کا 600 گرام سے
(b) 2 گھنٹے کا 03 منٹ سے
(c) 340 سینٹی میٹر کا 4 میٹر سے
(d) 75 روپیہ کا 200 پیسے سے

-2 مندرجہ ذیل نسبتوں کو سہل شکل میں لکھئے:

(a) 45:60 (b) 144:84 (c) 184:12

3- اوپیندر کی تنخواہ 42000 روپیہ ماہانہ ہے اور وہ ہر ماہ 6000 روپیہ انکم ٹیکس میں جمع کرتے ہیں۔ نسبت معلوم کیجیے: (a) آمدنی کا انکم ٹیکس کے ساتھ نسبت (b) انکم ٹیکس کا آمدنی کے ساتھ نسبت

(c) کیا یہ دونوں نسبت مساوی ہیں۔

4- ایک ربن (Ribbon) کی لمبائی 10 میٹر اور اس کی چوڑائی 25 سینٹی میٹر ہے۔ ذیل کی نسب معلوم کیجیے:

(a) لمبائی کا چوڑائی کے ساتھ (b) چوڑائی کا لمبائی کے ساتھ

(c) کیا دونوں نسبت مساوی ہیں؟

5- مندرجہ ذیل نسبتوں کا دو مساوی نسبت معلوم کیجیے:

3:7 (a) 4:9 (b)

6- اگر تناسب کے (Proportion) کے پہلے تین رکن 5 ,3 اور 12 ہے تو چوتھا مقام معلوم کیجیے۔

7- $3:x::9:15$ ہو تو x کی قیمت معلوم کیجیے۔

8- بازار میں کیلے 18 روپیہ فی درجن فروخت ہو رہے ہیں تو 10 کیلوں کی قیمت کیا ہوگی؟

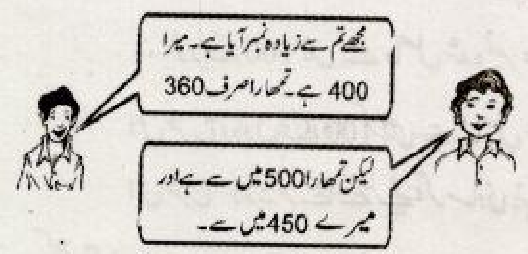
9- مٹھائی بنانے میں چینی اور کھوے کی نسبت (Ratio) 3:7 رکھا جائے تو 12 کیلو گرام چینی کی مٹھائی بنانے کے لیے کتنے کھوے کی ضرورت ہوگی؟

10- ایک موٹر سائیکل 2 لیٹر پٹرول میں 120 کیلو میٹر دوری طے کرتی ہے۔ بتایئے 300 کیلو میٹر دور تک جانے میں کتنے لیٹر پٹرول کی ضرورت ہوگی؟

11- ایک مکان کا 4 ماہ کا کرایہ 10,000 روپیہ ہے تو پورے سال کا کرایہ بتایئے۔

10.3- فی صد (Percentage)

ابھیشیک اور انور آج رزلٹ لائے ہیں۔ وہ دونوں اپنا رزلٹ دیکھ کر بات کرتے ہیں:



	ابھیشیک	انور
کل نمبر	500	450
حاصل شدہ نمبر	400	360

آپ بتایئے کس کا رزلٹ اچھا ہے؟

دونوں انور کی بہن شبنم کے پاس جاتے ہیں۔ شبنم نے کہا بغیر کل نمبر دیکھے اس طرح موازنہ نہیں کیا جا سکتا ہے۔

اس میں ہمیں ایک جیسے کل نمبر کی بنیاد پر حاصل عدد کا موازنہ کرنا ہوگا۔ بنیاد یکساں کرنے کے لیے ہم نے طریقۂ وحدانی بھی پڑھا ہے۔

انور کے 450 میں سے حاصل شدہ نمبر=360 ابھیشیک کے 500 میں سے حاصل شدہ نمبر= 400

انور کے 1 میں سے حاصل شدہ نمبر= $\frac{360}{400}$

انور کے 500 میں سے حاصل شدہ نمبر= $\frac{360}{440}\times 500 = 400$

اسی طرح دونوں کے نمبروں کی ایک مساوی بنیاد 500 پر موازنہ کرنے پر ہمیں معلوم ہوا کہ دونوں کا رزلٹ یکساں ہیں۔

اس طرح موازنہ کرنے کے لیے بنیاد شکل میں 100، 1000، 10000 یا کسی بھی دوسرے آسانی سے نمبر کا استعمال کر سکتے ہیں۔

پھر ابھیشیک کے 500 میں سے حاصل شدہ نمبر = 400

ابھیشیک کے 1 میں سے حاصل شدہ نمبر= $\frac{400}{500}$

ابھیشیک کے 100 میں سے حاصل شدہ نمبر= $\frac{400}{500}\times 100 = 80$

$\because$ انور کے 450 میں سے حاصل شدہ نمبر= 360

$\therefore$ انور کے 1 میں سے حاصل شدہ نمبر= $\frac{360}{450}$

$\therefore$ انور کے 100 میں سے حاصل شدہ نمبر= $\frac{360}{450}\times 100 = 80$

اس طرح دونوں کے 100 میں سے حاصل شدہ نمبر بالترتیب 80, 80 ہیں۔

اس طرح موازنہ کرنے کے لیے اگر مساوی بنیاد 100 لیتے ہیں تب اسے فی صد(Percentage) کہتے ہیں۔

فی صد ایک کسر ہے، جس کا نسب نما ہمیشہ تخمینہ 100 رہتا ہے اور شمار کنندہ فی صد کا عدد ہوتا ہے۔

فی صد کی علامت کو % کے ذریعہ ظاہر کرتے ہیں۔ جیسے : 50 فیصد کا مطلب ہے 100 میں 50۔ اسے علامتی شکل میں 50% لکھتے ہیں۔ اس کی کسری شکل $\frac{50}{100}$ ہے۔ اس کو اعشاریہ میں 0.5 لکھتے ہیں۔ اس طرح فیصد کو عام کسر یا اعشاریہ کی صورت میں بھی لکھا جا سکتا ہے۔

10.3.1- کسری اعداد کو فیصد میں بدلنا

کسری اعداد میں نسب نما کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے۔ اس کا مقابلہ کرنے کے لیے ہمیں ان کے نسب نماؤں کو یکساں کرنا پڑتا ہے۔ اور دیکھ چکے ہیں کہ جب ان میں ہر ایک کا نسب نما 100 ہو تو موازنہ کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔ یعنی ہم کسروں کو فیصد میں بدل رہے ہیں۔ آیئے اب ہم کچھ کسروں کو فیصد میں بدلنے کی کوشش کریں :

مثال : 8 $\frac{3}{5}$ کو فی صد کی شکل میں لکھیے :

حل : $\frac{3}{5}$ کا فیصد شکل $= \frac{3}{5}\times\frac{100}{100} = \frac{3\times 20}{100} = \frac{60}{100} = 60\%$

مثال : 9 کسی جماعت میں 32 طلبہ میں سے 8 غیر حاضر ہیں۔ غیر حاضر طلبا کی فیصد کیا ہے؟

حل : جماعت کے کل طلبہ کی تعداد $=32$

غیر حاضر طلبہ کی تعداد $=8$

حاضر طلبہ کی تعداد $=32-8=24$

غیر حاضر طلبہ کا فیصد $=\left(\frac{8}{32}\times 100\right)\% \quad = \frac{1}{4}\times 100$

$=\frac{100}{4}=25\%$

یا حاضر طلبہ کی تعداد = 100 – غیر حاضر طلبہ کا فیصد = 100 –

$=(100-25)\% \;=75\%$

کوشش کیجئے:

-1 مندرجہ ذیل کسروں کو فیصد میں بدلئے:

(i) $\frac{8}{25}$ (ii) $5\frac{1}{4}$ (iii) $\frac{4}{4}$ (iv) $\frac{49}{50}$

-2 ایک دکان میں مختلف سائز کے درج ذیل جوڑے جوتے موجود ہیں۔

سائز	2	3	4	5	6
جوتوں کی تعداد	20	30	28	14	8

ہر ایک سائز میں موجود جوتوں کا فیصد کیا ہے؟

10.3.2 - اعشاریہ کسر کو فیصد میں بدلنا

آیئے کچھ مثال لیں:

مثال:10- دیئے گئے اعشاریہ کو فیصد میں بدلئے:

(a) 0.49 (b) 3.75 (c) 0.009

حل:

(a) $0.49 = \frac{0.49 \times 100}{100} = \frac{49}{100} = 49\%$

(b) $3.75 = \frac{3.75 \times 100}{100} = \frac{375}{100} = 375\%$

(c) $0.009 = \frac{0.009 \times 100}{100} = \frac{0.9}{100} = 0.9\%$

اس لیے ظاہر ہے کہ اگر کسی اعشاریہ کو فی صد میں بدلنا ہو تو نسب نما کو 100 رکھتے ہوئے اعشاریہ کو کسر میں بدلتے ہیں۔

آیئے کچھ کریں:

مندرجہ ذیل اعشاریوں کو فی صد میں بدلئے:

(a) 0.33 (b) 4.5 (c) 6.75

10.3.3- فیصد کو عام کسر یا اعشاریہ میں بدلنا

ابھی تک ہم نے عام کسر یا اعشاریہ کسر کو فی صد میں بدلا۔ سوچو کیا ہم اس کے اُلٹ کسی فیصد کو عام کسر یا اعشاریہ کسر میں بدل سکتے ہیں؟

آیئے کچھ مثال لے کر دیکھیں :

مثال : 11- مندرجہ ذیل فی صد کو عام کسر میں بدلئے :

(a) 75% (b) 20% (c) $3\frac{1}{5}\%$

حل :

(a) $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ (b) $20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

(c) $3\frac{1}{5}\% = \frac{16}{5}\% = \frac{16}{5\times100} = \frac{4}{125}$

ہم نے دیکھا کہ فیصد کو کسر میں بدلتے وقت عدد کا ن سب نما 100 رکھتے ہوئے لکھتے ہیں اور اس کسر کا سب سے سہل شکل حاصل کرتے ہیں۔

(a) $40\% = \frac{40}{100} = 0.40$

(b) $12\frac{1}{5}\% = 12.2\% = \frac{12.2}{100} = 0.122$

(c) $10.2\% = \frac{10.2}{100} = 0.102$

ظاہر ہے کہ فی صد کو کسر میں بدلتے وقت سب سے پہلے نسب نما کو 100 رکھتے ہیں۔ اور تب اس کسر کے شمار کنندہ کو 100 سے تقسیم دے کر اعشاریہ میں بدلتے ہیں۔

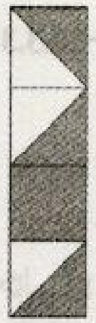
10.3.4- اندازہ کے ساتھ تفریح

فیصد ایک دیئے گئے رقبہ کے کسی قطعہ کا اندازہ لگانے میں مدد کرتا ہے۔

آیئے کچھ مثال لیں :

(a) سامنے دی گئی شکل میں پوری شکل کا کتنا حصہ سایہ دار ہے؟ معلوم کرنا ہے۔

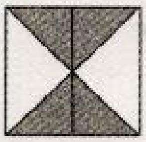
اس کے لیے سب سے پہلے کسر سے سایہ دار حصہ کا فیصد معلوم کر لیتے ہیں۔



تصویر میں $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{1+1+2+1}{8}=\frac{5}{8}$

اور $\frac{5}{8}=\left(\frac{5}{8}\times 100\right)\% = \frac{500}{8}\% = 62.5\%$

اس طرح 62.50% حصہ سایہ دار ہے۔

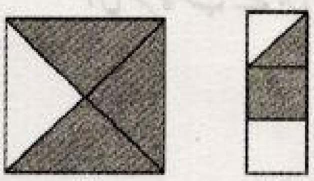


(b) تصویر سے ظاہر ہے کہ مکمل تصویر کا آدھا حصہ سایہ دار ہے۔

اور $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times 100\% = 50\%$

اس طرح 50% حصہ سایہ دار ہے۔

کوشش کیجیے:



(i) (ii)

درج ذیل تصویروں میں رنگین حصہ تصویر کے کل رقبہ کا کتنا فیصد حصہ ہے؟

10.4- فیصد کا استعمال

10.4- ابھی تک ہم نے یہ دیکھا کہ مقابلہ کرنے کے لیے فیصد کتنا فائدہ مند ہے۔ ہم نے عام کسر اور اعشاریہ کسر کو فی صد میں بدلنا بھی سیکھا۔ اب ذیل کے اقوال پر غور کیجیے:

— شیوم اپنی آمدنی کا 10% بچت کرتا ہے۔

— جہانگیر کو ہر ایک کتاب فروخت کرنے پر 15% کا نفع ملتا ہے۔

— ریاست بہار کی ترقی کی شرح 11% پہنچ چکی ہے۔

— بازار میں کھادی پوشاک پر 25% کی رعایت دی گئی ہے۔

ان سارے اقوال سے آپ کیا نتیجہ نکال سکتے ہیں؟

پہلے قول سے ہمارا مطلب ہے 100 میں سے 10 واں حصہ اور اسے ہم لکھتے ہیں $\frac{10}{100}$ ۔اس کا مطلب ہے کہ شیوم حاصل کیے گئے ہر ایک 100 روپیہ میں سے 10 روپیہ بچاتا ہے۔ اسی طرح آپ بھی دوسرے تمام اقوال کا مطلب نکالئے۔

10.4.2- فی صد سے عدد حاصل کرنا

آیئے ایک مثال لیں:

مثال: 13- 7ویں جماعت کے 60 بچوں کے معائنہ سے پتا چلا کہ 30% مڈڈے میل کے وقت چاول کڑھی کھانا پسند کرتے ہیں۔ تو کتنے بچوں کو چاول کڑھی پسند ہے۔

حل: جماعت vii میں بچوں کی کل تعداد 60 ہے۔ ان میں سے 30% چاول کڑھی کھانا پسند کرتے ہیں۔ جماعت کے انوپم اور راکھی نے ایسے بچوں کی تعداد معلوم کرنے کے لیے ذیل کے طریقوں کا استعمال کیا۔

انوپم:

100 میں سے چاول کڑھی کھانے والوں کی تعداد = 30

$\because$ 1 میں سے چاول کڑھی کھانے والوں کی تعداد = $\frac{30}{100}$

اس لیے 60 میں سے چاول کڑھی کھانے والوں کی تعداد = $\frac{30}{100}\times 60 = 18$

راکھی:

60 کا 30 فیصد

$$= 60\times 30\%$$

$$= 60\times\frac{30}{100}$$

$$= \frac{60\times 30}{100} = 18$$

اس طرح 60 بچوں میں سے 18 بچے چاول کڑھی کھانا پسند کرتے ہیں۔

اوپر کی مثالوں کو دھیان سے دیکھنے پر معلوم ہوتا ہے کہ انوپم نے بچوں کی تعداد کو معلوم کرنے کے لیے طریقہ وحدانی کا استعمال کیا۔ جب کہ راکھی نے سب سے پہلے دیئے گئے فی صد کو عام کسر میں بدلا ہے۔ پھر اس نے دیئے گئے عدد کو اس عام کسر سے ضرب کر کے مطلوبہ عدد حاصل کیا ے۔ آپ بھی ان طریقوں کا استعمال کر کے ذیل کے سوالوں کو حل کریں۔

مثال: 14 شوبھم اپنے باپ کی ماہانہ آمدنی کا 15% بچت کر کے 450 روپے جمع کر لیتا ہے۔ معلوم کیجیے کہ

> **خود کیجیے:**
>
> 1- (a) 400 کا 8% (b) 350 کا 20% (c) 40 کا 40%
>
> 2- ڈکش پورے سال میں 240 دن چلنے والے اسکول میں 80% حاضر رہا تو معلوم کیجیے کہ وہ کتنے دن اسکول گیا۔

شوبھم کے باپ کی ماہانہ آمدنی کیا تھی؟

حل: ان سوالوں کا حل جماعت میں نکالنے کے لیے شِوم اور حنا کوشش کرتی ہے۔ آیئے دیکھیں دونوں نے شوبھم کے باپ کی ماہانہ آمدنی کیسے معلوم کیا؟

شِوم:

کل آمدنی کا 15% = 450

مان لیا کہ کل آمدنی x روپیہ ہے۔

اس لیے x کا 15% = 450

یعنی $x \times \frac{15}{100} = 450$

یا $x = \frac{450 \times 100}{15} = 3000$

اس لیے $x = 3000$ روپیہ

حنا:

$\because$ 15 روپیہ کی بچت ہر 100 روپیہ پر ہوتی ہے۔

تب 1 روپیہ کی بچت ہوگی $\frac{100}{15}$ روپیہ پر

$\therefore$ تب 450 روپیہ پر بچت ہوگی $\frac{100}{15} \times 450$ روپیہ پر

$= \frac{100}{15} \times 450 = 3000$

سوالنامہ : 10.2

1- دیئے گئے کسری اعداد کو فیصد میں بدلئے:

(a) $\frac{3}{10}$ (b) $\frac{2}{5}$ (c) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{5}{8}$ (e) $\frac{7}{12}$

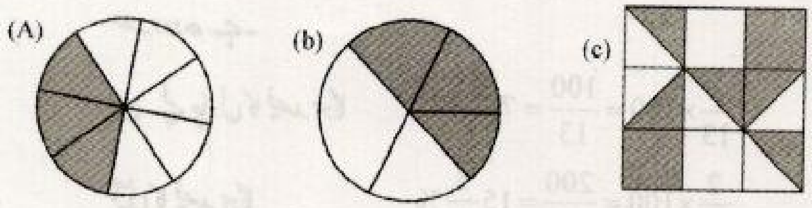
2- دیئے گئے اعشاریہ کسروں کو فیصد میں بدلئے:

(a) 0.45 (b) 1.25 (c) 3.2 (d) 0.375

3- دیئے گئے فیصد کو عام کسر اور اعشاریہ کسر میں بدلئے اور اپنے جواب کو سہل ترین شکل میں لکھئے:

(a) 25% (b) 18% (c) $12\frac{3}{4}\%$ (d) 60%

4- نیچے دی گئی تصویر کا کتنا فی صد حصہ سایہ دار ہے؟



5- ایک آدمی کی ماہانہ آمدنی 7000 روپیہ ہے۔ اور وہ 1400 روپیہ فی ماہ بچاتا ہے۔ تو وہ اپنی آمدنی کا کتنا فیصد حصہ خرچ کرتا ہے؟

6- ایک آدمی اپنی آمدنی کا چوتھائی حصہ کھانا پر 15%، تعلیم پر اور کرایہ پر 22% خرچ کرتا ہے۔ اگر وہ 266 روپیہ بچاتا ہے تو اس کی آمدنی کیا ہے؟

7- ایک شہر کی آبادی ہر سال 5% بڑھ جاتی ہے۔ اگر اس کی موجودہ آبادی 5,14,700 ہے، تو اگلے سال اس کی آبادی کیا ہوگی؟

8- کسی اسکول کے طلبا یونین کے الیکشن میں صدر کے لیے دو طلبا میں سیدھا مقابلہ تھا۔ اگر کامیاب طلبا کو کل 55% ووٹ ملے اور وہ 70 ووٹوں سے جیت گیا تو کل کتنے صحیح ووٹ پڑے اور ہارنے والے امیدوار کو کتنے ووٹ ملے؟

9- ایک کرسی اور ایک ٹیبل دونوں کی کل قیمت 2800 روپیہ ہے۔ اگر کرسی کی قیمت ٹیبل کی قیمت سے 40% کم ہے تو کرسی کی قیمت بتائیے۔

10.4.3- نسبتوں سے فیصد

کبھی کبھی کسی چیز یا عدد کے حصے نسبت کی شکل میں دیئے ہوتے ہیں۔ انھیں فیصد کی شکل میں بدلنا پڑتا ہے۔ آیئے ہم ایک مثال لیتے ہیں۔

مثال: 15 گنجن نے بتایا کہ کھیر بنانے کے لیے 1 حصہ چاول کی مقدار، 2 حصہ چینی اور 10 حصہ دودھ کی ضرورت ہوتی ہے۔ کھیر کے ایسے مرکب میں چاول، چینی اور دودھ کی فیصد معلوم کیجئے۔

حل: مرکب کو فیصد کی شکل میں اس طرح لکھا جائے گا:

چاول : چینی : دودھ $= 1:2:10$

اب کل حصہ $= 1+2+10 = 13$ یعنی مرکب میں $\frac{1}{13}$ حصہ چاول، $\frac{2}{13}$ حصہ چینی اور $\frac{10}{13}$ حصہ دودھ ہے۔

اس لیے چاول کا فیصد ہوگا $\frac{1}{13}\times 100 = \frac{100}{13} = 7\frac{9}{13}\%$

چینی کا فیصد ہوگا $\frac{2}{13}\times 100 = \frac{200}{13} = 15\frac{5}{13}\%$

دودھ کا فیصد ہوگا $\frac{10}{13}\times 100 = \frac{1000}{13} = 76\frac{12}{13}\%$

مثال: 10 اگر 500 روپیہ کو روی، مکیش اور سریش میں اس طرح بانٹئے کہ روی کو دو حصہ مکیش کو تین حصہ اور سریش کو پانچ حصہ ملے۔ اس بٹوارے میں ہر ایک کو کتنے روپے ملے اور ان کا فیصد کتنا تھا؟

حل: ہر ایک کے حصہ کو نسبت شکل میں اس طرح لکھا جائے گا:

روی	مکیش	سریش
2	3	5

سبھی حصوں کا جوڑ $5+3+2 = 10$

کل روپے میں ہر ایک کا فیصد	ہر ایک کو ملے روپے
روی کو ملا $\frac{2}{10}\times 100 = 20\%$	روی کو ملا $500\times\frac{2}{10}$ روپیہ $=100$ روپیہ
مکیش کو ملا $\frac{3}{10}\times 100 = 30\%$	مکیش کو ملا $500\times\frac{3}{10}$ روپیہ $=150$ روپیہ
سریش کو ملا $\frac{5}{10}\times 100 = 50\%$	سریش کو ملا $500\times\frac{5}{10}$ روپیہ $=250$ روپیہ

خود کیجیے:

1- اگر مثلث کے زاویوں میں نسبت 2:3:5 ہے تب اس کے ہر ایک زاویے کا ناپ کیا ہوگا؟

2- 20 چیزوں کو مونو اور سونو میں اس طرح بانٹئے کہ انھیں کل کا بالترتیب 30% اور 70% ملے۔

10.4.4 اضافہ یا کمی فیصد کی شکل میں

کبھی کبھی ہمیں کسی رقم میں ہوئی کمی یا بیشی کو فیصد کی شکل میں معلوم کر سمجھنا، ایسے سمجھنے سے زیادہ مناسب معلوم ہوتا ہے۔

مثال کے لیے اگر کسی شہر کی آبادی 2,20,000 سے بڑھ کر 2,42,000 ہوگئی تب ایسی حالت میں آبادی کی زیادتی کو فیصد کی شکل میں سمجھنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔ جیسے یہ کہیں کہ ریاست کی آبادی 10% بڑھ گئی ہے۔ کسی عدد کو بڑھنے یا گھٹنے پر کل عدد کے فیصد کی شکل میں شمار کرنے کے لیے آیئے ایک مثال لیں:

مثال: 17 بڑھتے یا گھٹتے کا فیصد معلوم کریں اگر:

(a) کسی قیمص کی قیمت 280 روپیہ سے گھٹ کر 250 روپیہ ہو جاتی ہے۔

(b) پروین کو جانچ کے امتحان میں نمبر 40 سے بڑھ کر 70 ہو جاتا ہے۔

حل: (a) قیمص کی صحیح قیمت = 280 روپیہ

قیمص کی گھٹی قیمت = 250 روپیہ

قیمت میں کمی = (280-25) روپیہ = 30 روپیہ

قیمت میں فیصد کمی = × 100 روپیہ

$$=\frac{30}{280}\times 100=\frac{300}{28}=\frac{75}{137}=10\frac{5}{7}\%$$

اس لیے کمی کا فیصد $10\frac{5}{7}\%$ ہے۔

(b) حاصل نمبر میں اضافہ = 30=40−70

حاصل نمبر میں فیصد کا اضافہ = × 100 روپیہ

$$=\frac{30}{40}\times 100=75\%$$

یعنی حاصل نمبر میں 75% کا اضافہ ہوا۔

خود کیجیے:

1- کسی شہر کی آبادی سال 2005 میں 7,00,000 (سات لاکھ) تھی، جو سال 2010 میں 10,00,000 (دس لاکھ) ہوگئی۔ تو آبادی میں ہوا اضافہ فیصد میں معلوم کیجیے۔

2- کسی اسکول کے ایک طلبہ کی فیس 200 روپیہ فی ماہ سے بڑھا کر 250 روپیہ فی ماہ کر دیتا ہے۔ فیس میں ہوا اضافہ فیصد میں معلوم کیجیے۔

3- کسی ملک میں پچھلے دس سالوں میں ناخواندوں کی تعداد 125 لاکھ سے گھٹ کر 10 لاکھ رہ گئی۔ گھٹنے کا فیصد کتنا رہا؟

10.5- کسی شے سے متعلق قیمت یعنی قیمت خرید اور قیمت فروخت

ہمیں اپنے روزمرہ کی زندگی میں کئی مرتبہ چیزوں کو خریدنے یا بیچنے کی ضرورت پڑتی ہے۔ ایک دکاندار چیزوں کو تھوک بیچنے والے (Whole Saler) کے یہاں سے خرید کر لاتا ہے اور کچھ منافع لے کر وہ گاہک کو بیچ دیتا ہے۔ چیزوں کو تھوک بیچنے والوں کے یہاں سے اپنے دکان تک لانے میں اسے چیزوں کی ڈھلائی یا ٹیکس دینے وغیرہ پر بھی خرچ کرنا پڑتا ہے۔ آیئے روزمرہ کی زندگی میں استعمال ہونے والے کچھ بیانات کو سمجھنے کی کوشش کریں:

(i) ایک سائکل 2000 روپیہ میں دکاندار کے ذریعہ خریدا گیا اور وہ 50 روپیہ رکشہ کرایہ لگا کر اسے اپنی دکان میں لایا۔ پھر اسے 2550 روپیہ میں گاہک کو بیچ دیا۔

(ii) ایک پھل دکاندار نے ایک ٹوکری سیب 500 روپیہ میں خریدا اور اسے 390 روپیہ میں بیچ دیا۔

اب پہلے قول پر غور کرتے ہیں۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ دکاندار کے ذریعہ سائکل خریدنے میں کتنی قیمت ادا کی گئی؟ یقیناً دکاندار کے ذریعہ سائکل خریدنے میں ادا کی گئی قیمت = (50 + 200) روپیہ = 2050 روپیہ۔

جس قیمت پر کوئی چیز خریدی جاتی ہے۔ وہ اس کی خرید قیمت ہوتی ہے یعنی (Cost Price) کہلاتا ہے۔ اسے مختصر میں (C.P.) لکھا جاتا ہے۔ چیزوں کو خریدنے کے لیے خرید قیمت کے علاوہ جو بھی خرچ کرنا پڑتا ہے۔ یہ سبھی دیگر اخراجات کہلاتے ہیں۔ اور چیز کی خرید قیمت کا ہی حصہ بن جاتے ہیں۔

اس لیے چیز کی اصل خرید قیمت = خرید قیمت + دیگر اخراجات

جس قیمت پر کوئی چیز بیچی جاتی ہے۔ وہ اس کا فروخت قیمت(Selling Price) کہلاتا ہے اور اسے مختصر میں (.S.P) لکھا جاتا ہے۔

اب ظاہر ہے کہ سائیکل کی خرید قیمت 2050 روپیہ اور فروخت قیمت 2550 روپیہ ہے۔ اسی طرح سیب کی خرید قیمت 500 روپیہ اور فروخت قیمت 390 روپیہ ہے۔

اوپر کے بیانات پر غور کرنے کے بعد ظاہر ہوتا ہے کہ جہاں سائیکل کی خرید قیمت سے فروخت قیمت زیادہ ہے وہیں سیب کی خرید قیمت سے فروخت قیمت کم ہے۔

اس لیے اگر کسی چیز کی فروخت قیمت اس چیز کی خرید قیمت سے زیادہ ہو تو فروخت کرنے والوں کو نفع ہوتا ہے۔

اگر خرید قیمت < فروخت قیمت

تب نفع (Profit) = خرید قیمت = فروخت قیمت

اگر خرید قیمت > فروخت قیمت

تب نقصان (Loss) = خرید قیمت - فروخت قیمت

اگر کسی چیز کی فروخت قیمت اس چیز کی خرید قیمت سے کم ہو تو (بیچنے والے کو) نہ تو نقصان ہوتا ہے اور نہ ہی نقصان۔

اگر خرید قیمت = فروخت قیمت، تب نہ تو نفع اور نہ ہی نقصان۔

10.5.1- نفع یا نقصان فیصد میں

نفع یا نقصان کو فیصد کی شکل میں بھی معلوم کیا جا سکتا ہے۔ ہمیں یہ دھیان میں رکھنا ہوگا کہ نفع یا نقصان کا شمار ہمیشہ اصل خرید قیمت پر ہی کرتے ہیں۔

آیئے مندرجہ بالا مثالوں میں ہم فیصد نفع یا فیصد نقصان بھی معلوم کر سکتے ہیں:

(i) سائیکل کی خرید قیمت = 2050 روپیہ

سائیکل کی فروخت قیمت = 2550 روپیہ

نفع = خرید قیمت = فروخت قیمت

=(2550 – 2050) روپیہ

=500 روپیہ

فیصد نفع کے لیے ریشمی اور آلوک نے ذیل کے قاعدوں کو اپنایا:

ریشمی

$$\text{نفع فیصد} = \frac{\text{نفع}}{\text{خرید قیمت}} \times 100$$

$$= \frac{500}{2050} \times 100$$

$$\text{نفع}\,\% = 24\frac{16}{41}$$

آلوک

$\because$ 2050 روپیہ پر 500 روپیہ کا نفع ہوتا ہے۔

$\therefore$ 1 روپیہ پر نفع = $\frac{500}{2050}$

اس لیے 100 روپیہ پر نفع = $\frac{500}{2050} \times 100$

اس لیے نفع % = $24\frac{16}{41}$

(ii) اسی طرح آپ دوسرے سوال میں بھی نقصان کا فیصد معلوم کر سکتے ہیں۔

یہاں خرید قیمت = 50 روپیہ، فروخت قیمت = 390 روپیہ

اس لیے نقصان = خرید قیمت − فروخت قیمت

= 390 روپیہ − 500 روپیہ = 110 روپیہ

ریشمی

$$\text{نقصان فیصد} = \frac{\text{نقصان}}{\text{خرید قیمت}} \times 100$$

$$= \frac{110}{500} \times 100$$

$$\text{نفع}\,\% = 22$$

آلوک

500 روپیہ پر نقصان = 110 روپیہ

اس لیے 1 روپیہ پر نقصان = $\frac{110}{500}$

اس لیے 100 روپیہ پر نقصان = $\frac{110}{500} \times 100$

$= \frac{110}{500} \times 100 = 22$

اس لیے نقصان % = 22 ہے۔

مثال: 18 رامو نے ایک پرانی موٹر سائیکل 2000 روپیہ میں خریدی اور اس کی مرمت وغیرہ میں 3000 روپیہ خرچ کیا۔ اُس نے یہ موٹر سائیکل 18500 روپیہ میں بیچ دی۔ اس کا نفع یا نقصان معلوم کیجیے۔

حل: پہلا طریقہ:

موٹر سائیکل کی خرید قیمت = 12000 روپیہ

مرمت پر خرچ = 3000 روپیہ

اصل خرید قیمت = (12000 + 3000) روپیہ =15000 روپیہ

موٹر سائیکل کی فروخت قیمت، یہاں ف.ق. > خ.ق. =18500 روپیہ

اس لیے نفع = خ.ق. - ف.ق.= 15000 روپیہ - 18500 روپیہ= 3500 روپیہ

نفع فیصد= $\frac{3500}{15000}\times 100 = 23\frac{1}{3}\%$

حل: دوسرا طریقہ:

15000 روپیہ پر نفع ہوتا ہے = 3500 روپیہ

1 روپیہ پر نفع ہوگا = $\frac{3500}{15000}$

تو 100 روپیہ پر نفع ہوگا = $\frac{3500}{15000}100 = 23\frac{1}{3}\% $

مثال: 19 ایک تاجر نے ایک کوئنٹل گیہوں 1200 روپیہ میں خریدا۔ پانی میں بھیگ جانے کی وجہ سے اُسے 9 روپیہ فی کیلوگرام کی قیمت سے گیہوں فروخت کرنا پڑا۔ معلوم کیجئے اسے کتنا فیصد نفع یا نقصان ہوا؟

حل: یہاں 1 کوئنٹل (100 کیلوگرام) گیہوں کی خرید قیمت =1200 روپیہ

100 کیلوگرام گیہوں کا فروخت قیمت، یہاں خ.ق. <ف.ق.= 900 = 9 × 100 روپیہ

پہلا طریقہ

اس لیے نقصان = خرید قیمت - فروخت قیمت

= 1200-900 =300 روپیہ

نقصان فیصد = ×100 روپیہ

$25 = \frac{300\times 100}{1200}$

نقصان فیصد = 25%

دوسرا طریقہ

1200 روپیہ پر نقصان ہوتا ہے =300

1 روپیہ پر نقصان ہوگا = $\frac{300}{1200}$

100 روپیہ پر نقصان = $\frac{300}{1200}\times 100$

نقصان % = 25%

مثال: 20 ایک تاجر 1 ٹین تیل 780 روپیہ میں خریدتا ہے۔ وہ اسے فی لیٹر فی کس قیمت سے فروخت کرے کہ اسے پورے میں 20% کا نفع ہوا۔ (1 ٹین میں 15 لیٹر تیل آتا ہے)

حل : پہلا طریقہ :

یہاں 1 ٹین تیل کی خرید قیمت = 780 روپیہ

نفع = 20%

اس لیے 780 روپیہ کا 20% = $\frac{780\times 20}{100}$ = 156 روپیہ

فروخت قیمت = خرید قیمت + نفع

780 روپیہ + 156 روپیہ = 936 روپیہ

اس لیے 1 ٹین کی فروخت قیمت = 936 روپیہ

یعنی 15 لیٹر تیل کی فروخت قیمت = 936 روپیہ

فروخت قیمت فی لیٹر = $936\div 15 = 62.40$ روپیہ فی لیٹر

حل : دوسرا طریقہ :

20% نفع کا مطلب ہے

100 روپیہ خرید قیمت ہے تو نفع = 20 روپیہ

اس لیے فروخت قیمت = $100+20$ = 120 روپیہ

جب خرید قیمت = 100 روپیہ تب فروخت قیمت = 120 روپیہ

جب خرید قیمت = 1 روپیہ تب فروخت قیمت = $\frac{120}{100}$

جب خرید قیمت = 780 روپیہ تب فروخت قیمت = $780\times\frac{120}{100}$ روپیہ = 936 روپیہ

فروخت قیمت فی لیٹر = $936\div 15$ = 62.40 روپیہ فی لیٹر

مثال :21 ایک ٹیلی ویژن کو 9000 روپیہ میں فروخت پر 10 فیصد نقصان ہوتا ہے۔ اسے کتنے روپیہ میں فروخت کیا جائے کہ 15 فیصد نفع ہو جائے۔

حل : پہلا طریقہ :

نقصان = خرید قیمت کا 10%

فروخت قیمت = خرید قیمت - نقصان

خرید قیمت کا %- خرید قیمت = خرید قیمت × $\frac{10}{100}$ - خرید قیمت

یا 9000 = خرید قیمت × $\frac{1}{10}$ - خرید قیمت

یا 9000 = $\left(1-\frac{1}{10}\right)$ خرید قیمت

∴ خرید قیمت = $9000\times\frac{10}{9}=10,000$

حل: دوسرا طریقہ:

ٹیلی ویژن کا فروخت قیمت = 9000 روپیہ

% نقصان = 10%

مانا کہ ٹیلی ویژن کی خرید قیمت = 100 روپیہ ہو

(10% نقصان پر بیچنے پر) پہلی فروخت قیمت = 10 − 100 = 90 روپیہ

جب فروخت قیمت 90 روپیہ ہوتو خرید قیمت = 100 روپیہ

جب فروخت قیمت 1 روپیہ ہوتو خرید قیمت = $\frac{100}{90}$

جب فروخت قیمت 9000 روپیہ ہوتو خرید قیمت = $9000\times\frac{100}{90}$ = 1000 روپیہ

% نفع = 15%

10,000 کا 15% نفع = $10000\times\frac{15}{100}$ = 1500 روپیہ

دوسری فروخت قیمت = 1500 + 10,000 = 11,500 روپیہ

اس لیے 15% نفع کمانے کے لیے دکاندار کو ٹیلی ویژن 11.500 روپیہ میں بیچنا چاہیے۔

1- ہدایت کے مطابق خالی جگہوں کو پُر کیجیے :

نمبر شمار	خرید قیمت	فروخت قیمت	نفع یا نقصان (روپیہ میں)	نفع یا نقصان (% میں)
(i)	420 روپیہ	450 روپیہ	نفع = 30 روپیہ	نفع % = $7\frac{1}{7}\%$
(ii)	700 روپیہ	679 روپیہ		
(iii)	300 روپیہ	324 روپیہ		
(iv)	110 روپیہ	88 روپیہ		

2- خالی جگہوں کو پُر کیجیے :

نمبر شمار	خرید قیمت	نقصان/نفع	فروخت قیمت	نفع یا نقصان (% میں)
(i)	1200 روپیہ	90 روپیہ نفع	1290 روپیہ	نفع % = $7\frac{1}{7}\%$
(ii)	500 روپیہ	25 روپیہ نفع		
(iii)	630 روپیہ	70 روپیہ نقصان		
(iv)	400 روپیہ	40 روپیہ نقصان		

3- خالی جگہوں کو پُر کیجیے :

نمبر شمار	فروخت قیمت	نفع / نقصان	خرید قیمت (روپیہ میں)	نفع یا نقصان (% میں)
(i)	1500 روپیہ	نقصان 350	$1500+350=1850$	$18\frac{34}{37}\%$ نقصان
(ii)	1400 روپیہ	نفع 280		
(iii)	950 روپیہ	نقصان 50		
(iv)	375 روپیہ	نفع 25		

4- ایک چیز کی خرید قیمت 80 روپیہ ہے اور وہ چیز %25 کے نفع پر فروخت کی گئی تو نفع اور فروخت قیمت بتائیے۔

5- کوئی مشین %7 کے نقصان پر 837 روپیہ میں فروخت کی گئی تو اس کی خرید قیمت نکالئے۔

6- کسی چیز کی 72 روپیہ میں فروخت کرنے سے %10 کا نقصان ہوتا ہے۔ بتائیے کہ اسے کتنے میں بیچنے پر %20 کا نفع ہوگا؟

7- ایک ریڈیو کو 880 روپیہ میں فروخت کرنے سے %10 نفع ہوتا ہے تو بتائیے کہ اگر اسے 760 روپیہ میں فروخت کیا جائے تو فروخت کرنے والا کتنے فیصد کے نفع یا نقصان میں رہے گا؟

8- ایک کرسی %20 نقصان پر 240 روپیہ میں فروخت ہوتی ہے۔ مگر فروخت قیمت %10 بڑھ جائے تو بتائیے کہ کتنے فیصد کا نقصان ہوگا؟

9- ایک تاجر نے 1 روپیہ کا 5 کی شرح سے 1000 آم خرید کر 1 روپیہ کے 4 کی شرح سے فروخت کر دیا تو اس کا نفع فیصد معلوم کیجئے۔

10- ایک دکاندار نے دو سائیکل 1100 روپیہ فی سائیکل کے حساب سے فروخت کی۔ ایک پر اسے %10 کا نفع اور دوسرے پر %20 کا نقصان ہوا۔ بتائیے اسے نفع ہوا کہ نہیں؟

10.6- قرض دی گئی رقم پر محصول یعنی سود مفرد (Simple interest)

روزہ مرہ کی زندگی میں ہمیں گھریلو خرچ کے لیے کاروبار کو بڑھانے کے لیے یا کوئی دوسرے کاموں کے لیے کچھ مزید رقم کی ضرورت ہوتی ہے۔ اس کے لیے بینک یا دوسرے لوگوں سے رقم لینا پڑتا ہے۔ قرض لی گئی رقم کو زر اصل (Principal) کہتے ہیں۔

یہ رقم واپس کرنے سے پہلے قرض حاصل کرنے والے شخص کے ذریعہ کچھ وقت تک اس کا استعمال کیا جاتا ہے۔ اس لیے ایک مقررہ مدت تک رقم کو استعمال میں لانے کے بدلے کچھ اضافی رقم بینک یا قرض دینے والے مہاجن کو دینا ہوتا ہے۔ قرض لی گئی رقم کے استعمال کے بدلے جو رقم دینا پڑتا ہے، وہ اضافی رقم سود (Interest) کہلاتی ہے۔

ایک مقررہ مدت کے بعد آپ کو زر اصل اور سود دونوں کو ملا کر پوری رقم قرض حاصل کرنے والے کو واپس کرنا پڑتا ہے، جسے زر کل (Amount) کہتے ہیں۔

یعنی زر کل = زر اصل + سود

سود ایک مقررہ شرح پر تخمینہ کیا جاتا ہے جو ہمیشہ ہر ایک 100 روپیہ کے لیے 1 سال کے لیے طے شدہ ہوتا ہے۔ اسے اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔ 8 فیصد ہر سال یعنی 8 فیصد سالانہ۔

8 فیصد سالانہ کا مطلب ہے کہ ہر 100 روپیہ پر ہر سال 8 روپیہ سود کی شکل میں مزید رقم دینے ہوں گے۔

آیئے ایک مثال کے ذریعہ دیکھیں کہ سود کا حساب کیسے کیا جاتا ہے؟

مثال : 22 سریش 5500 روپیہ کا قرض کاشتکاری کے لیے 5% سالانہ کی شرح سے سود پر لیتا ہے۔ معلوم کیجئے کہ ایک سال بعد اسے کل کتنی رقم واپس کرنی ہوگی؟

حل: قرض لی گئی رقم = 5500 روپیہ

سود کی شرح = 5% ہر سال

اس کا مطلب ہے کہ اگر وہ 100 روپیہ قرض لیتا ہے تب اسے ایک سال بعد 5 روپیہ سود کی صورت میں دینے ہوں گے۔

اس لیے 5500 کے قرض پر اسے 1 سال بعد دینے ہوں گے $5500 \times \frac{5}{100}$ روپیہ = 275 روپیہ

یعنی ایک سال بعد اسے سود ملا کر زرِ کل دینا ہوگا 5500 روپیہ + 275 روپیہ = 5775 روپیہ

ایک سال کا سود معلوم کرنے کے لیے ہم ایک فارمولا بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

اگر ہم زر اصل کو P سے اور شرح R% سالانہ کو R سے ظاہر کرتے ہیں تو ہمیں ہر ایک 100 کے لیے ایک سال کا R روپیہ سود دینا ہوگا۔

$\because$ P روپیہ قرض لینے پر ایک سال کا سود 1 روپیہ ہوگا۔

$$1 = \frac{R \times P}{100} = \frac{P \times R}{100}$$

10.6.1- ایک سے زیادہ سالوں کے لیے سود

اگر رقم ایک سال سے زیادہ وقت کے لیے قرض لیا جاتا ہے تب سود کا حساب بھی اتنے وقت کیا جاتا ہے۔ جتنے وقت کے لیے رقم رکھا گیا ہے۔ مثال کے لیے اگر سریش وہی رقم اسی شرح پر دو سال بعد واپس کرتا ہے تب اسے سود بھی دوگنا یعنی 275 روپیہ پہلے سال کے لیے اور 275 روپیہ دوسرے سال کے لیے۔ زر اصل وہی رہتا ہے۔ یہ نہیں بدلتا اور سود بھی ہر سال کے لیے یکساں ہی رہتا ہے۔ اس طرح

کے سود کو عام سود یا سود مفرد کہتے ہیں۔ جس طرح سالوں کی تعداد بڑھتی جاتی ہے اُسی طرح سود کی رقم بھی۔

بطور مثال 3 سالوں کے لیے 100 روپیہ 12 فیصد سالانہ شرح سے قرض لینے پر 3 سالوں کے بعد سود دینا ہوگا۔

$12+12+12=3\times12=36$ روپیہ

ہم ایک سال سے زیادہ وقت کے لیے عام سود معلوم کرنے کے لیے فارمولا حاصل کر سکتے ہیں۔

اوپر ہم دیکھ چکے ہیں کہ P روپیہ زر اصل کے لیے R% سالانہ کی شرح سے 1 سال بعد سود دینا ہوتا ہے $\frac{R\times P}{100}$

اس لیے T سالوں کے لیے دیا گیا سود مفرد (I) ہوگا :

$$I=\frac{T\times R\times P}{100}=\frac{P\times R\times T}{100} \text{ یا } \frac{PRT}{100}$$

اس لیے T سالوں کے بعد زر کل A ہوگا $A = P + I$

خود کیجیے :

سوال 1- جدول میں دی گئی خالی جگہوں کو پُر کیجیے :

نمبر شمار	زر اصل	سود	زر مخلوط
-1	625 روپیہ	125 روپیہ	750 روپیہ
-2	350 روپیہ	....	700 روپیہ
-3	3200 روپیہ	320 روپیہ	....
-4	....	1750.00	2895.00

سوال 2- سود مفرد معلوم کیجیے۔

(i) زر اصل 4000 روپیہ شرح 6% مدت 3 سال

(ii) زر اصل 900 روپیہ شرح 5.5% مدت 6 سال

سوال 3- زر کل معلوم کیجیے۔

(i) زر اصل 400 روپیہ شرح 5% مدت 2 سال

(ii) زر اصل 1000 روپیہ شرح 7.25% مدت 8 ماہ

(iii) زر اصل 1500 روپیہ شرح 6.5% مدت 146 دن

10.6.2- زر اصل، شرح اور مدت کی گنتی

سود مفرد کے سوالوں میں زر اصل (P) شرح (R) اور مدت (T) معلوم ہونے پر ہم سود (I) کی گنتی کرتے ہیں۔ اب اگر ان چاروں رقموں میں سے کوئی تین کی قیمت معلوم ہو تو کیا چوتھی رقم کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔

آیئے ایک مثال پر غور کرتے ہیں:

مثال: 23 ایک شخص نے بینک سے 1800 روپیہ قرض لیا۔ کچھ دنوں کے بعد وہ بینک میں جاتا ہے تو اسے بتایا گیا کہ زر اصل کے علاوہ اسے 324 روپیہ اور دینا پڑے گا۔ اگر سود کی شرح 6% ہو تو وہ آدمی کتنے دنوں بعد بینک گیا تھا؟

حل: یہاں زر اصل (P) = 1800 روپیہ

شرح (R) = 6%

سود (I) = 324 روپیہ

مدت = ؟

ہمیں معلوم ہے، عام سود (I) = $\dfrac{\text{زر اصل} \times \text{شرح} \times \text{مدت}}{100}$

یا زر اصل = $\dfrac{\text{عام سود} \times 100}{\text{شرح} \times \text{مدت}}$ = علامت میں $P = \dfrac{1 \times 100}{R \times T}$

$$\frac{1800 \times 6 \times \text{مدت}}{100} = 324$$

$$\text{مدت} = \frac{324}{18 \times 6} = 3 \text{ سال}$$

مثال: 24 انور نے اعجاز سے 5000 روپیہ قرض لیا۔ 2 سال بعد اس نے 6225 روپیہ دے کر اعجاز سے اپنا حساب

کر دیا۔ سود کی شرح معلوم کیجئے۔

حل: یہاں زر اصل = 5000 روپیہ زرِ کل = 6225 روپیہ **مدت** = 2 سال

یہاں عام سود نہیں دیا گیا ہے۔ لیکن زر کل دیا گیا ہے اس لیے پہلے سود معلوم کرنا چاہیے۔

عام سود = زر اصل - زر کل

$= 6225 - 5000 = 1225$ روپیہ

$$= \frac{\text{زر اصل} \times \text{شرح} \times \text{مدت}}{100}$$

پہلا طریقہ:

سود

$$1225 = \frac{5000 \times \text{شرح} \times 2}{100}$$

$$1225 = 100 \times \text{شرح}$$

$$\text{شرح} = \frac{1225}{100}$$

$$= 12.25\%$$

دوسرا طریقہ:

$$\text{سود} = \frac{\text{زر اصل} \times \text{شرح} \times \text{وقت}}{100}$$

$$\text{شرح} = \frac{\text{سود} \times 100}{\text{زر اصل} \times \text{مدت}}$$

$$\text{شرح} = \frac{1225 \times 100}{5000 \times 2}$$

$$= 12.25\%$$

مثال : 25 10% سالانہ کے حساب سے کس رقم کا 26 مارچ 2009 سے 19 اگست 2009 تک کا سود 140 روپیہ ہوگا۔

حل: یہاں شرح = 10%، سود = 140 روپیہ

مارچ	اپریل	مئی	جون	جولائی	اگست	کل
5	30	31	30	31	19	146

مدت = 146 دن = 146/365 سال = 2/5 سال (مارچ کے 26 دن 5 دن چھوڑ کر)

$$\text{زر اصل} = \frac{\text{عام سود} \times 100}{\text{شرح} \times \text{مدت}}$$

$$\text{روپیہ } 3500 = \frac{140\times100\times5}{10\times2} = \frac{140\times100}{10\times\frac{2}{5}}$$

مثال: 26 کتنی مدت میں 550 روپیہ 10 فیصد سالانہ عام سود کی شرح سے 660 روپیہ ہو جائیں گے۔

حل: یہاں زر اصل = 550 روپیہ زرکل = 660 روپیہ شرح = 10% مدت = ؟

سود = زر اصل - زرکل

$$= 660 - 110 = 550$$

$$\text{مدت} = \frac{\text{سود} \times 100}{\text{شرح} \times \text{مدت}}$$

$$= \frac{110\times100}{10\times550} = 2 \text{ سال}$$

خود کیجئے:

1- کسی رقم کا 12.5 فیصد سالانہ شرح سے 4 سال کا سود 250 روپیہ ہے، تو وہ رقم معلوم کیجئے۔

2- کتنے فیصد سالانہ سود کی شرح سے 600 روپیہ 3 سالوں میں 744 روپیہ ہو جائے گا؟

3- کتنی مدت میں کوئی رقم 10 فیصد سالانہ سود کی شرح سے دوگنا ہو جائے گا؟

سوالنامہ

1- 750 روپیہ کا 9% سالانہ سود کی شرح سے 6 سالوں کا سود معلوم کیجئے۔

2- 500 روپیہ کا 1 روپیہ 50 پیسے فی سیکڑا ماہانہ کی شرح سے 15 مہینے کا سود معلوم کریں۔

3- کتنے فیصد سالانہ سود کی شرح سے کوئی زر اصل 4 سالوں میں اپنا سوا گنا ہو جائے گا؟

4- کتنے فیصد سود کی شرح سے 450 روپیہ تین سالوں میں 504 روپیہ ہو جائے گا؟

5- اگر کوئی زرکل 5 سالوں میں زر اصل کا 5/4 ہو جاتا ہے تو سود کی شرح معلوم کیجئے۔

6- کتنے سالوں میں 5% سالانہ سود کی شرح سے 600 روپیہ کا زرِ مخلوط 700 روپیہ ہو جائے گا؟

7- کتنی مدت میں $6\frac{1}{2}$ سالانہ سود کی شرح سے کوئی رقم دوگنی ہو جائے گی؟

8- 12% سالانہ سود کی شرح سے کون سی رقم 5 سالوں میں 400 روپیہ ہو جائے گا؟

9- کتنی رقم 5% سالانہ سود کی شرح سے 8 سالوں میں 560 روپیہ ہو جائے گا؟

10- کتنی رقم کا 6% سالانہ سود کی شرح سے 2.5 سال میں وہی سود ہوگا جو 400 روپیہ کا 5 سالانہ سود کی شرح سے 3 سالوں میں ہوگا؟

ہم نے سیکھا

1- اپنی روزمرہ کی زندگی میں ہمیں ہمیشہ دو اعداد کے درمیان موازنہ کرنا پڑتا ہے۔ یہ عدد اونچائی، وزن، تنخواہ، حاصل نمبر وغیرہ ہوسکتی ہے۔

2- دو عدد a اور b کا موازنہ کرنے پر ہم اسے نسبت شکل میں a:b لکھتے ہیں۔

3- دو نسبتوں کا موازنہ انھیں یکساں نسب نما والے کسروں سے بدل کر کیا جا سکتا ہے۔ اگر دونوں یکساں نسب نما والے کسر یکساں ہیں تب ہم کہتے ہیں کہ دونوں نسبت بھی مساوی نسبت ہے۔

4- اگر دو نسبت مساوی ہیں تب ان کے چاروں ارکان ایک تناسب بناتے ہیں۔ مثال کے طور پر دو نسبت a:b اور c:d مساوی ہیں۔ اس لیے a,b,c اور d تناسب میں ہیں۔

5- موازنہ کرنے کا ایک طریقہ فیصد بھی ہے۔ کسر جن کے نسب نما 100 ہوتے ہیں، ان کے شمار کنندہ فیصد ظاہر کرتے ہیں۔ فیصد کا مطلب ہوتا ہے ہر سو پر۔ مثال کے طور پر 5/100 کو 5% بھی کہا جاتا ہے۔

6- کسروں کو فیصد میں بدلا جا سکتا ہے اور فیصد کو کسروں میں اور اعشاریہ کسروں میں بدلا جا سکتا ہے۔

7- فیصد کا ہمارے روزمرہ میں عام استعمال ہے:

(i) جب ہمیں کسی رقم کا فیصد معلوم ہو تو ہم وہ مکمل رقم معلوم کر سکتے ہیں۔

(ii) اگر ہمیں کسی رقم کے حصوں میں نسبت دیا ہوتو ہم انھیں فیصد میں بھی بدل سکتے ہیں۔

(iii) کسی رقم کا گھٹنا یا بڑھنا بھی فیصد میں دکھایا جا سکتا ہے۔

(iv) کسی چیز کا خرید قیمت میں ہوئے نفع یا نقصان کو بھی فیصد میں دکھایا جا سکتا ہے۔

(v) قرض لی گئی رقم پر سود کے حساب کے لیے اس کی شرح فیصد میں ہی دی جاتی ہے۔

8- (i) کسی نسبت کو فیصد میں بدلنے کے لیے نسبت کو کسر کی شکل بدلتے ہیں۔

(ii) کسی نسبت کو فیصد میں بدلنے کے لیے کسر کو 100 سے تقسیم کر کے فیصد کا نشان (%) اس کے ساتھ لگا کر حساب کرتے ہیں۔

باب : 11

سہل مساوات

11.1: عقلی کھیل

انجو، افسانہ، ممتاز اور مکیش اپنے کلاس روم میں اپنے ساتھیوں کے ساتھ ایک عقلی کھیل کھیل رہے تھے۔ کھیل میں انجو نے ممتاز سے کوئی عدد سوچنے کو کہا۔ سوچے ہوئے عدد میں 5 سے ضرب کر کے حاصل ضرب میں 4 جوڑنے اور نتیجہ بتانے کو کہا۔

ممتاز نے کہا نتیجہ 29 ہے۔ انجو نے فوراً بتایا کہ سوچا ہوا عدد 5 ہے۔ ممتاز نے کہا میں نے 5 ہی سوچا تھا۔

ممتاز اور کلاس کے سبھی طلبا حیرت زدہ ہو گئے اور سوچنے لگے کہ کیا انجو جادو جانتی ہے؟ آخر انجو نے ممتاز کے دل میں سوچے گئے عدد کو کیسے جان لیا؟ افسانہ کو کچھ شک ہوا۔ اُس نے انجو سے کہا، میں نے ایک اور عدد سوچا ہے۔ اُسے بتا دو۔ انجو نے وہی عمل دہرایا اور نتیجہ جاننا چاہا۔ افسانہ نے کہا نتیجہ 154 ہے۔ انجو نے فوراً کہا سوچا ہوا عدد 30 ہے۔

ہر ایک ساتھی یہ جاننا چاہتا تھا کہ آخر انجو نے سوچے گئے عدد کو کیسے معلوم کر لیا۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ انجو نے نامعلوم عدد (سوچے گئے عدد) کو کیسے معلوم کیا؟

آیئے ہم اسے سمجھنے کی کوشش کریں۔

ممتاز نے جو عدد سوچا وہ 1، 2، 3 ..... میں سے کچھ بھی ہو سکتا ہے۔ وہ عدد ہمیں معلوم نہیں ہے۔ اس لیے ایسے عدد کے لیے ہم ایک متغیر (x) لیتے ہیں۔ (متغیر کی صورت میں ہم کوئی حرف علامت لے سکتے ہیں) اب x میں 5 سے ضرب کر کے 4 جوڑنے پر حاصل عبارت ($5x+4$) ہے جو 29 کے برابر ہے۔

سوالنامہ: 15.5

1- ایک مستطیل نما باغ کی لمبائی 40 میٹر اور چوڑائی 20 میٹر ہے۔ باغ کے باہر چاروں جانب 5 میٹر چوڑا ایک راستہ بنایا گیا ہے۔ راستہ کا رقبہ معلوم کیجئے۔

2- ایک مستطیل نما گھاس کا میدان نے، جس کی لمبائی 140 میٹر اور چوڑائی 80 میٹر ہے۔ اس میدان کے اندر سے چاروں جانب 5 میٹر چوڑا راستہ بنایا گیا ہے۔ راستے کا رقبہ معلوم کیجئے۔

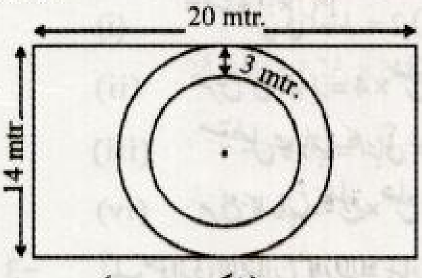
3- ایک باغ 80 میٹر لمبا اور 70 میٹر چوڑا ہے۔ اس کے باہر چاروں جانب ایک 5 میٹر راستہ بنانا ہے۔ راستے کا رقبہ معلوم کیجئے اور باغ کا رقبہ ہیکٹیئر میں بتائیں۔

4- 10 سینٹی میٹر لمبے اور 6 سینٹی میٹر چوڑے ایک گتے پر ایک تصویر کی پینٹنگ اس طرح بنائی گئی ہے کہ اس کے ہر ایک اضلاع کے متوازی 1.6 سینٹی میٹر چوڑا حاشیہ چھوڑا گیا ہے۔ حاشیہ کا کل رقبہ معلوم کریں۔

5- 60 میٹر ضلع والی ایک مربع نما پھلواری کی چوحدی سے لگا اندر کی جانب 3 میٹر چوڑا راستہ بنا ہوا ہے۔ تو راستہ کا رقبہ معلوم کیجئے اور 20.50 روپے فی مربع میٹر کی شرح سے پھلواری میں بنے راستے میں اینٹ سولنگ کرنے کا خرچ معلوم کیجئے۔

6- 800 میٹر لمبے اور 400 میٹر چوڑے ایک مستطیل نما باغ کے بیچ سے ہو کر 10 میٹر چوڑے دو راستے بنے ہوئے ہیں۔ راستے کا کل رقبہ معلوم کیجئے اور راستہ کو چھوڑ کر باغ کے باقی حصے کا رقبہ معلوم کیجیے۔ جواب ہیکٹیئر میں دیجئے۔

7- نیچے دیا گیا خاکہ 15.28 ایک مستطیل نما باغ کے بیچ کی چوڑائی کو قطر مانتے ہوئے پھولوں کی ایک دائرہ نما کیاری کو ظاہر کرتا ہے۔ پھولوں کی کیاری کی چوحدی سے 3 میٹر چوڑا راستہ اندر سے دائرہ نما بنایا گیا ہے، تو معلوم کیجئے:



(خاکہ: 15.28)

(i) پورے باغ کا رقبہ

(ii) راستہ سمیت پھولوں کی کیاری کا رقبہ

(iii) بغیر راستہ کے پھولوں کی کیاری کا رقبہ

(iv) راستے کا رقبہ

(v) پھولوں کی کیاری راستہ سمیت چھوڑ کر باغ کے باقی حصے کا رقبہ

عدد کا 6 گنا $= 6x$

عدد کا 6 گنا 30 کے برابر ہے

اس لیے $6x = 30$ (یہ ایک مساوات ہوا)

-2 کسی عدد کا 2 گنا اس عدد کے 5 گنا سے 21 کم ہے۔

اگر مان لیں کہ عدد x ہے تو

عدد کا 2 گنا $= 2x$ ، عدد کا 5 گنا $= 5x$

عدد کے 5 گنا سے 21 کم $= 5x - 21$

عدد کا 2 گنا یعنی $2x$ ، عدد کے 5 گنا سے 21 سے کم کے برابر ہے۔

اس لیے $2x = 5x - 21$ (یہ ایک مساوات ہے)

آیئے کچھ مساوات بنائیں

(a) کسی عدد کا تہائی 17 کے برابر ہے۔

(b) سنیل کی موجودہ عمر اس کی 2 سال پہلے کی عمر کی تین گنی ہے۔

(c) انجم اور اس کے بھائی کی عمر کا جوڑ 23 ہے۔ اگر انجم کی عمر 10 ہے تو اس کے بھائی کی عمر کو m مانتے ہوئے مساوات کی عبارت لکھیے۔

جن مساوات میں ایک متغیر ہوتا ہے وہ ایک متغیر والا مساوات کہلاتا ہے۔ دو یا تین متغیر ہونے پر وہ دو یا تین متغیر والا مساوات کہلاتا ہے۔

11.3 - مساوات کے حل (Solution of equation)

آیئے ہم پھر ممتاز کی مثال کو لیں۔ ممتاز کے ذریعہ سوچے گئے عدد کو x ماننے پر بنا مساوات $5x + 4 = 29$ ہے۔ یہ مساوات $x = 1$ کے لیے L.H.S. $\neq$ R.H.S.

$\because$ LHS $= 5\times1+4 = 9$

RHS $= 29$

اسی طرح $x = 2, 3$ اور 4 کے لیے

LHS $\neq$ RHS ہے

لیکن $x = 5$ کے لیے RHS $= 5x + 4 = 5\times5+4$

حل: مان لیا کہ $ABCD$ ایک مربع میٹر ضلع کا مربع نما باغ ہے۔ سایہ دار حصہ 4 میٹر چوڑی سڑک کو ظاہر کرتا ہے۔

EF = AB + 2 × راستے کی چوڑائی

= 50 *mtr.* + 2 × 4 *mtr.* = 58 *mtr.*

مربع EFGH کا رقبہ = ضلع × ضلع

= 58 *mtr.* × 58 *mtr.*

= 3364 *mtr.*^{2}

مربع نما پارک ABCD کا رقبہ = ضلع × ضلع

= 50 *mtr.* × 50 *mtr.*

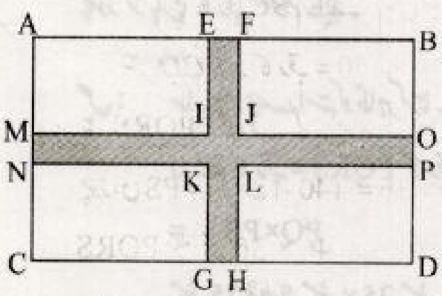
= 2500 *mtr.*^{2}

راستے کا رقبہ = ABCD کا رقبہ − EFGH کا رقبہ

= 3364 *mtr.*^{2} − 2500 *mtr.*^{2} = 864 *mtr.*^{2}

∵ 1 میٹر^2 سیمنٹ کرانے کا خرچ = 20 روپیہ

∴ 864 میٹر^2 سیمنٹ کرانے کا خرچ = 20 × 864 = 17280 روپیہ



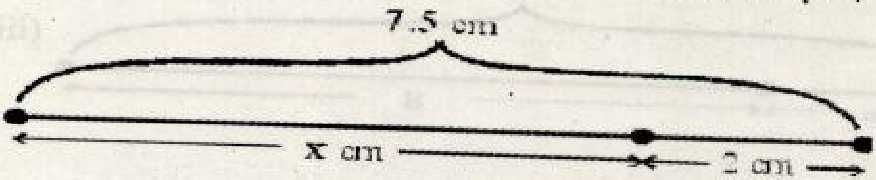
مثال: 24 100 میٹر لمبائی اور 50 میٹر چوڑائی والے ایک مستطیل نما باغ کے بیچ سے ہو کر 5 میٹر چوڑائی کے دو راستے ایک دوسرے پر عمودی ایسے بنے ہوئے ہیں جو ضلعوں کے متوازی ہیں۔ راستوں کا رقبہ معلوم کیجئے اور 200 روپے فی مربع میٹر کی شرح سے راستوں کو بنانے کا خرچ معلوم کیجئے۔

حل: سایہ دار حصہ راستے کو ظاہر کرتا ہے۔ لیکن مربع IJKL کے رقبہ کو دو بار لیا جاتا ہے، جسے گھٹانا ہوگا۔

مستطیل EFGH میں EF = 5 میٹر، EG = 50 میٹر

EF × EF = کا رقبہ ^ EFGH

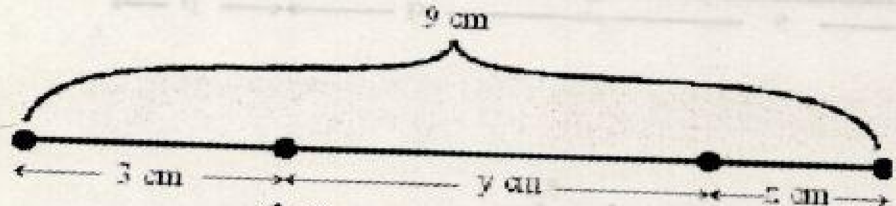
-3 صحیح متبادل پر صحیح کا نشان (✓) لگائیے۔



(i) دیئے گئے قطعہ خط کی لمبائی ذیل میں سے کیا ہوگی؟

(a) $x+2$ (b) $x-2$ (c) 7.5

(d) $x+7.5$ (e) $x-7.5$ (f) $7.5-x$



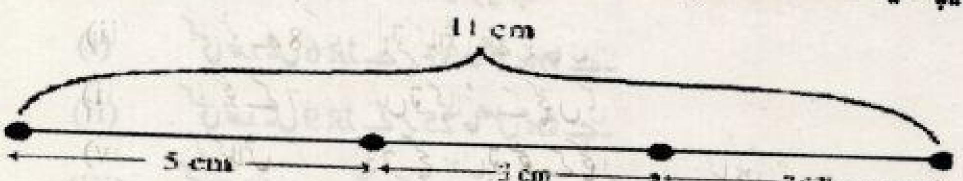
(ii) درج بالا تصویر کی بنیاد پر بتائیے کہ ذیل میں سے کون سا تعلق صحیح ہے۔

(a) $3+y-z=9$ (b) $3+y+z>9$

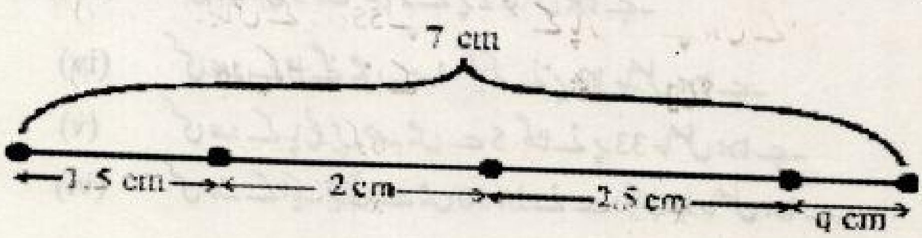
(c) $3+y+z<9$ (d) $3+y+z=9$

-4 نیچے دیئے گئے قطعہ خط کے لیے مناسب مساوات بنائیے:

(i)



(ii)



10 ملی میٹر = 1 سینٹی میٹر　　اور　　10 سینٹی میٹر = 1 ڈیسی میٹر

اسی طرح 10 میٹر = 1 ڈیکا میٹر　　10 ڈیکا میٹر = 1 ہیکٹو میٹر

10 ہیکٹو میٹر = 1 کیلو میٹر

چونکہ 10 ملی میٹر = 1 سینٹی میٹر، اس لیے (10 ملی میٹر)^2 = (1 سینٹی میٹر)^2 اور 100 ملی میٹر^2 = 1 سینٹی میٹر^2۔

کیا آپ اسی طرح کیلو میٹر^2 کو میٹر^2 میں بدل سکتے ہیں؟

100 مربع ملی میٹر = 1 مربع سینٹی میٹر

100 مربع سینٹی میٹر = 1 مربع ڈیسی میٹر

100 مربع ڈیسی میٹر = 1 مربع میٹر = 1000 مربع سینٹی میٹر

100 مربع میٹر = 1 مربع ڈیکا میٹر

100 مربع ڈیکا میٹر = 1 مربع ہیکٹو میٹر

100 مربع ہیکٹو میٹر = 1 مربع کیلو میٹر

میٹرک کے اصول میں قطعہ اراضی کے رقبہ کو ہیکٹیر میں ناپا جاتا ہے۔

اس لیے ہیکٹیر = $100\times 100\, mt.^2 = 10,000\, mt.^2$

جب ہم رقبہ کی ایک اکائی کو چھوٹی اکائی میں بدلتے ہیں تو نتیجے کے طور پر اکائیوں میں ہندسوں کی تعداد زیادہ ہوگی۔ مثال کے طور پر:

$$1000\, cm.^2 = 1000\times 1\, cm.^2 = 1000\times 100\, mm.^2 = 100000\, mm.^2$$

لیکن جب ہم رقبہ کی ایک اکائی کو بڑی اکائی میں بدلتے ہیں تو بڑی اکائی میں ہندسوں کی تعداد کم ہوگی۔

جیسے: $1000\, cm.^2 = \frac{1000}{10000} mt^2. = \frac{1}{10} mt^2 = 0.1 mt^2$

خود کر کے دیکھیے:

مندرجہ ذیل کو تبدیل کریں:

(i) 200 سینٹی میٹر^2 کو ملی میٹر^2 میں　　(ii) 4 ہیکٹیر کو میٹر^2 میں

(iii) 400 میٹر^2 کو سینٹی میٹر^2 میں

6- نیچے دیئے گئے مساواتوں کے سامنے دیئے گئے (x) کی قیمت(Value) سے مساوات تسلی بخش ہے یا نہیں، لکھیے :

		x کی قیمت	ہاں/نہیں
(i)	$x+2=7$	$x=5$	....
(ii)	$\frac{7x}{2}=21$	$x=8$	....
(iii)	$2x+3=19$	$x=4$	....
(iv)	$\frac{5x-2}{4}=2$	$x=2$	....

اپنے ساتھیوں سے بحث بھی کیجئے کہ x کی کس قیمت سے مساوات تسلی بخش ہوتا ہے۔

7- جدول میں دی گئی قیمت سے ذیل کے مساوات حل کیجئے اور بتایئے کہ کس قیمت کے لیے مساوات کے دونوں حصے برابر ہیں؟

$$x-2=3x-8$$

دایاں حصہ $3x-8$	بایاں حصہ $x-2$	x کی قیمت (Value)
		0
		1
		2
		3

$x=$............

8- مساوات کے سامنے دیئے گئے x کی مختلف قیمت مساوات میں لکھ کر جانچ کیجئے کہ صحیح حل کیا ہے اور اُس کو دائرہ سے گھیریئے:

(i) $3x-1=-4 \Rightarrow x=1, \quad 0, \quad -1, \quad 2$

(ii) $4x=-12 \Rightarrow x=3, \quad 2, \quad -3, \quad 1$

(iii) $\frac{3x-1}{2}=1 \Rightarrow x=-1, \quad 5, \quad 4, \quad 1$

= 200.96 مربع سینٹی میٹر

اس لیے سایہ دار حصہ کا رقبہ = 452.16 - 200.96

= 251.20 مربع سینٹی میٹر

سوالنامہ: 15.4

-1 دائرہ کا رقبہ معلوم کیجئے، جس کا نصف قطر مندرجہ ذیل ہیں۔ (π کی قیمت $\frac{22}{7}$ لیجئے)

(i) 14 سینٹی میٹر (ii) 20 سینٹی میٹر

(iii) 2.8 سینٹی میٹر (iv) 35 سینٹی میٹر

-2 دائرہ کا رقبہ معلوم کیجئے، جس کا محیط احسب ذیل ہے:

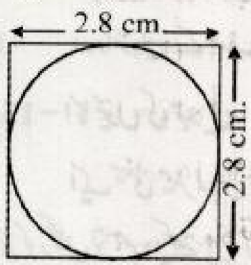
(i) 572 سینٹی میٹر (ii) 253 سینٹی میٹر (iii) 110 سینٹی میٹر

(iv) 132 سینٹی میٹر (v) 198 سینٹی میٹر

-3 اگر ایک دائرہ نما میدان کا محیط 154 سینٹی میٹر ہوتو اس میدان کا نصف قطر معلوم کیجئے۔ میدان کا رقبہ بھی معلوم

کیجئے۔ (π کی قیمت $\frac{22}{7}$ لیجئے)۔

-4 ایک گائے 28 سینٹی میٹر مربع نما میدان کے مرکز میں ایک 14 سینٹی میٹر رسّی سے بندھی ہے تو بتائیے کہ گائے کتنے رقبہ تک کی گھاس چرے گی اور یہ بھی بتائیے کہ کتنے رقبہ کی گھاس نہیں چرے گی۔



-5 ایک گول چھلّے کی باہری گولائی کا نصف قطر 14 میٹر ہے اور چھلّا کی داخلی نصف قطر 7 سینٹی میٹر ہے تو چھلّے کا رقبہ معلوم کیجئے۔

-6 دی گئی شکل 15.25 میں دائرہ کا رقبہ معلوم کیجئے۔

-7 88 میٹر لمبے ایک تار کو موڑ کر دائرہ نما شکل میں زمین پر رکھا گیا تو کتنے رقبہ کو تار گھیرے گا؟

آیئے دونوں حصوں میں 5 جوڑتے ہیں۔ کیا کوئی فرق پڑا؟

$$7-4+5=2+1+5$$

بایاں حصہ $7-4+5=3+5=8$

دایاں حصہ $2+1+5=8$

بغیر کسی شک و شبہ کے کوئی فرق نہیں آیا۔ چونکہ مساوات بھی ایک مماثلت ہی ہے اور اس کے الجبرائی فقرہ کسی نہ کسی عدد کو ظاہر کرتے ہیں۔ اس لیے مساوات کا دونوں حصوں میں ہم یکساں عدد جوڑ یا گھٹا سکتے ہیں۔ اس سے نتیجہ متاثر نہیں ہوتا۔

(ii) کیا دونوں جانب ضرب کرنے سے فرق پڑے گا؟

$$(7-4)\times 2=(+1)\times 2$$

بایا حصہ $3\times 2=6$ ، دایاں حصہ $3\times 2=6$ ، ظاہر ہے کہ ضرب کرنے سے بھی فرق نہیں آتا، آپ تقسیم کر کے دیکھیں۔ اس لیے مساوات میں صفر کے علاوہ کوئی دیگر عدد سے ہم دونوں اطراف میں ضرب یا تقسیم کر سکتے ہیں۔ اس سے مساوات کے دونوں اطراف کی قیمت برابر ہی رہتی ہے۔

مان لیجئے ہم اصول کی پابندی نہیں کرتے اور مختلف عدد جوڑتے ہیں تب کیا ہوگا؟

$$7-4+3=2+1+5$$

بایاں حصہ $= 7-4+3=3+3=6$ اور دایاں حصہ $= 2+1+5=3+5=5$ جو کہ برابر نہیں ہے۔ اس لیے الگ الگ عدد نہیں جوڑ سکتے۔ کیا ہم ایک طرف جوڑ اور دوسری طرف گھٹا کر کر سکتے ہیں۔ جانچ کیجئے۔ اور اس طرح جس متغیر کی قیمت معلوم کرنا ہے اس کو برابر نشان کے ایک طرف کرتے ہیں۔

اب مندرجہ بالا قاعدے کا سہارا لے کر ہم انجو کے ذریعہ کیے گئے حل کو دیکھیں:

$$5x+4=29$$

مساوات کے دونوں حصوں میں سے ہم 4 گھٹاتے ہیں۔

اس طرح نیا بایاں حصہ $= 5x+4-4=5x$

نیا دایاں حصہ $= 29-4=25$

(کیوں کہ گھیرا کا ہر ایک قوس قطع برابر ہے)۔

دائرہ کا رقبہ $= n \times$ زاویہ قائمہ مثلث AOB کا رقبہ

$$= n \times \frac{1}{2} \times OA \times AB$$

$$= n \times \frac{1}{2} \times r \times \frac{2\pi r}{n} \left(\because OA = r, AB = \frac{2\pi r}{n} \right)$$

اس لیے دائرہ کا رقبہ $= \pi r^2$

پھر دائرہ کا رقبہ $= \pi r^2$

$$\sqrt{\frac{\text{رقبہ}}{\pi}} = r$$

خود کر کے دیکھیے:

1- مختلف قطر کا دائرہ بنائیں اور گراف کاغذ کی مدد سے مربعوں کی تعداد کو گن کر رقبہ معلوم کیجیے اور دائرہ کے فارمولے سے رقبہ معلوم کر دونوں جوابات کا موازنہ کیجیے۔

2- کاغذ کی ایک دائرہ نما چکتی لیجیے۔ برابر قطعہ قطر میں موڑ کر کاٹیں پھر اس قطعہ قطر کو ایک مستطیل کی شکل میں مرتب کر دائرہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

مثال: 17 7 سینٹی میٹر نصف قطر والے دائرہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔ $\pi = \frac{22}{7}$

حل: قطر = 7 سینٹی میٹر دائرہ کا رقبہ $= \pi r^2$

$$= \frac{22}{7} \times (7)^2 = \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$

$= 154$ مربع سینٹی میٹر یا cm^2

مثال: 18 20 سینٹی میٹر نصف قطر والے دائرہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔ (جب کہ $\pi = 3.14$)

حل: قطر = 20 سینٹی میٹر

دائرہ کا رقبہ $= \pi r^2 = 3.14 \times (20)^2$

$$= 3.14 \times 400$$

$= 1256.00$ مربع سینٹی میٹر

مثال: 19 ایک دائرہ نما میدان کی قطر 14 میٹر ہے۔ اس کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل: قطر $d = 14$ میٹر

-2 $x+5=8$

اگر ہمیں x کی قیمت پتا کرنا ہے تو کیا کریں گے؟

ہم اتنا ہی عدد دونوں حصوں میں جوڑیں گے/ گھٹائیں گے کہ صرف متغیر عدد ہی باقی رہے۔

$x+5-5=8-5$ اس لیے $x+0=3$ اس لیے $x=$ ....

نیچے دیے مساوات کو حل کیجیے:

(i) $x-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ (ii) $x-8=2$

(iii) $x-1=5$ (iv) $x+3=-5$

-3 

لیکن اگر مساوات اس طرح ہوا تو

$\frac{x}{3}=6$

(i) آپ بتایئے، صرف متغیر عدد بچانے کے لیے کیا کریں گے؟

....

(ii) مساوات کو حل کرنے پر x کی قیمت کیا ہوگی؟

....

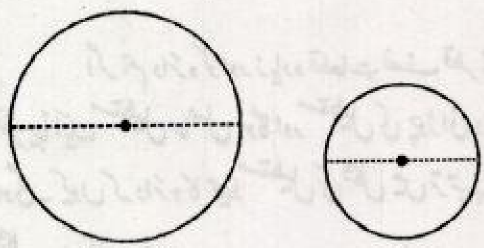
ہمیں متغیر عدد چاہیے تو دونوں حصوں میں 3 سے ضرب کر دیں گے۔

12- راہل کے پاس ایک دائرہ نما شکل کی تار ہے، جس کا نصف قطر 7 سینٹی میٹر ہے۔ اس سے 11 سینٹی میٹر ضلع والا مربع بنائے جا سکتا ہے۔ اپنے جواب کو ثابت کیجیے۔

13- 21 میٹر کے نصف قطر والے دائرہ نما میدان کے باہر 1980 میٹر کی لمبی دوڑ پوری کرنے کے لیے کتنی چکر لگانے کی ضرورت پڑے گی؟

15.7- دائرہ کا رقبہ (Area of Circle)

دو کمرے کی فرش کی شکل گول نما ہے۔ ایک کمرے کی فرش کی قطر 14 میٹر ہے۔ فرش پر دری بچھانا ہے۔ جیسا کہ ذیل کی شکل میں دکھایا گیا ہے۔

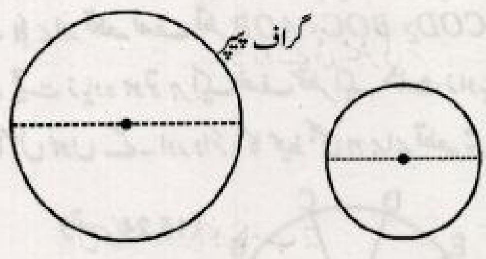


فرش-2 فرش-1

تصویر :15.21)

تو بتایئے کہ کس فرش میں بڑی دری کی ضرورت ہوگی۔ ظاہر ہے دوسرے فرش میں زیادہ بڑی دری لگے گی۔ کیوں کہ فرش -2 زیادہ جگہ گھیرتا ہے یا اس کا رقبہ زیادہ ہے۔ تو آیئے اب دائرہ کے رقبہ پر بحث کریں۔

شکل 15.22 پر شفاف گراف پیپر ذیل میں دکھائے گئے طریقے کے مطابق رکھیں۔ اب اس شکل کے اندر کے مربعوں کو گن کر اس کا رقبہ معلوم کریں۔ اس قاعدے سے مربع کا رقبہ ایک قیاس رقبہ ہی حاصل ہوتا ہے۔ کیوں کہ دائرہ کے کنارے سیدھے نہیں ہیں۔ اس لیے صحیح رقبہ معلوم کرنے کے لیے ایک اور طریقے پر بحث کرتے ہیں۔



(ii) (i)

تصویر :15.22)

ایک کاغذ کا دائرہ نما چکتی لیتے ہیں۔ اس چکتی کو دو برابر حصوں میں موڑتے ہیں۔ نصف حصہ کو رنگ دیتے ہیں۔ پھر اسے 12 ٹکڑوں میں تصویر کے مطابق کاٹ لیتے ہیں۔ اب ہر ایک قطعہ نما نصف قطر (sector) کو مندرجہ بالا تصویر کی تیسری ترتیب کے مطابق رکھتے ہیں، جو سرسری نظر میں ایک متوازی الاضلاع کو ظاہر کرتا ہے۔

(الف) مساوات کو حل کیجئے:

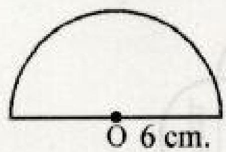
(i) $3a+4=10$ (ii) $\frac{5x-10}{4}=20$

(iii) $\frac{3x-8}{2}=2$

-6 دائیں جانب لکھے مساوات کا ایک مرحلہ حل کر بائیں جانب لکھا گیا ہے۔ لیکن وہ اوپر نیچے ہو گئے ہیں۔ آپ صحیح جوڑے لگائیے:

(i)	$3x+5=-5$	$x=\left(\frac{-7}{5}\right)\times\frac{1}{5}$
(ii)	$5x-7=2$	$x=\frac{9}{3}$
(iii)	$\frac{x}{5}=2$	$5x=2+7$
(iv)	$3x=9$	$x+1=3\times5$
(v)	$3=9x$	$x-3=\frac{9}{3}$
(vi)	$5x=\frac{-7}{5}$	$3x=-5-5$
(vii)	$3(x-3)=9$	$y^2=(-6)\left(\frac{4}{3}\right)$
(viii)	$\frac{3}{x}=7$	$3=7\times x$
(ix)	$\frac{3y^2}{4}=-6$	$\frac{3}{9}=x$
(x)	$\frac{x+1}{5}=3$	$x=2\times5$

مثال: 15 6 سینٹی میٹر نصف قطر والے نصف دائرے کا احاطہ معلوم کیجیے۔



حل: ∵ نصف دائرے کا احاطہ = $\frac{2\pi r}{2}+2r$

= $\frac{3\times22\times6}{2\times7}+2\times6$ = $\frac{132}{7}+12$ سینٹی میٹر

$= 18.857 + 12 = 30.857$ cm.

مثال: 16 ایک مالی اپنے 35 میٹر چوڑائی والے ایک دائرہ نما باغ کو گھیرنا چاہتا ہے۔ وہ رسّی سے دو گھیرا لگانا چاہتا ہے۔اس کے لیے وہ کتنی لمبی رسّی خریدے گا۔ اگر رسّی 5 روپیہ میٹر کی شرح سے بیچی جاتی ہو تو خریدے گئے کل رسّی کی قیمت کیا ہوگی؟ معلوم کیجیے۔

حل: یہاں باغ کی قطر = 35 میٹر

چونکہ محیط = πd $\frac{22}{7}\times35 = 110$ میٹر

∴ 1 گھیرے میں رسّی کی لمبائی = 110 میٹر

∴ 2 گھیرے میں رسّی کی لمبائی 2×110 میٹر = 220 میٹر

∵ 1 میٹر رسّی کی قیمت 5 روپے ہے۔

∴ 220 میٹر رسّی کی قیمت = $5\times220 = 1100$ روپیہ

سوالنامہ : 15.3

1- مندرجہ ذیل نصف قطر والے دائروں کا محیط معلوم کیجیے۔ (π کی قیمت $\frac{22}{7}$ لیجیے)

(i) 56 ملی میٹر (ii) 7 سینٹی میٹر (iii) 21 سینٹی میٹر (iv) 28 ملی میٹر

2- درج ذیل محیط والے دائروں کا نصف قطر معلوم کیجیے:

(i) 154 میٹر (ii) 308 سینٹی میٹر (iii) 352 سینٹی میٹر (iv) 220 میٹر

$3p = 60$

$\frac{3p}{3} = \frac{60}{3}$ (دونوں طرف 3 سے تقسیم کرنے پر)

یا $p = 20$ (یہ مساوات کا حل ہے)۔

(d) $2y + \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = \frac{37}{2} - \frac{5}{2}$

یا $2y = 16$

یا $\frac{2y}{2} = \frac{32}{2} = 16$ (دونوں حصوں میں 2 سے تقسیم دینے پر)

یا $y = 8$ (یہ مساوات کا حل ہے)۔

(e) $4 = 5(p-2)$

یا $5(p-2) = 4$ (دونوں حصوں کو باہم بدلنے پر)

یا $p = \frac{4}{5} + 2 = \frac{4+10}{5} = \frac{14}{5}$

یا $\frac{5(p-2)}{5} = \frac{4}{5}$ (دونوں حصوں میں 5 سے تقسیم دینے پر)

یا $p - 2 = \frac{4}{5}$ (دونوں حصوں میں 2 جوڑنے پر)

یا $p - 2 + 2 = \frac{4}{5} + 2$

یا $p = \frac{4}{5} + 2 = \frac{4+10}{5} = \frac{14}{5}$

یا $C = \pi \times 2r$ (چونکہ $d = 2r$، جہاں r = نصف قطر ہے۔

یا $C = 2\pi r$ یعنی دائرہ کا محیط = $2\pi r$

اصل فارمولے سے نکالے گئے فارمولے

(i) $C = \pi d$ (ii) $d = \frac{C}{\pi}$ (iii) $d = 2r$

(iv) $\therefore r = \frac{d}{2}$ (v) $C = 2\pi r$ (vi) $\therefore r = \frac{C}{2\pi}$

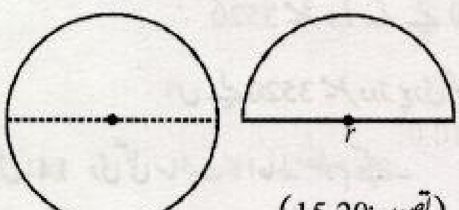
خود کر کے دیکھئے:

مختلف ساخت کی چوڑی ایک دائرہ نما پلیٹ، بوتل کا ڈھکن اور ایک روپیہ کا سکہ لیجئے اور اس کے محیط (گھیرا) اور قطر کو ناپئے اور ان کا متعلقہ تناسب نکالئے۔

آیئے دائرے کو دو برابر حصوں میں بانٹ کر دیکھیں۔ ہر ایک حصہ ایک نصف دائرہ کہلاتا ہے۔ جیسے:

نصف دائرہ کا احاطہ = $2r + \frac{2\pi r}{2}$ تصویر سے ظاہر ہے۔

یا نصف دائرے کا احاطہ $d + \frac{\pi d}{2}$



(تصویر 15.20)

خود کر کے دیکھئے:

نمبر شمار	نصف قطر (Radius)	قطر (Diameter)	محیط $\pi = \frac{22}{7}$
1	4 سینٹی میٹر	16 میٹر	
2			
3	21 سینٹی میٹر		
4			308 سینٹی میٹر
5		84 سینٹی میٹر	

یا $4-3=\frac{8m}{5}+3-3$ (دونوں حصوں میں 3 گھٹانے پر)

یا $1=\frac{8m}{5}$

یا $1\times 5=\frac{8m}{5}\times 5$ (دونوں حصوں میں 5 سے ضرب کرنے پر)

یا $5=8m$

یا $\frac{5}{8}=\frac{8m}{8}$ (دونوں حصوں میں 8 سے تقسیم کرنے پر)

یا $\frac{5}{8}=m$

یا $m=\frac{5}{8}$ (حصوں کو باہم بدلنے پر)

دیئے گئے مساوات کا حل ہے۔

دوسرا قاعدہ: $\frac{2}{5}(m+10)=2m+3$

یا $\frac{2}{5}m+4=2m+3$ (بایاں حصے میں قوسین ہٹانے پر)

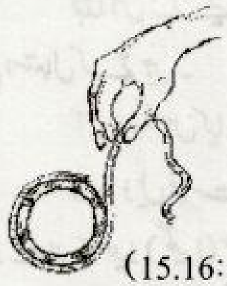
یا $\frac{2^{m}}{5}+4=2m+3$ (یکساں رکن (m) کو ایک حصے میں کرنے، $2m$ کا حصہ بدلنے پر یا دونوں طرف 2m گھٹانا)

یا $\frac{2}{5}m-2m+4=3$

یا $\frac{2^{m}}{5}-2m=3-4$ (4 کا حصہ بدلنے پر یا دونوں طرف 4 گھٹانے پر)

$\frac{2m-10m}{5}=-1$

15.6 - دائرہ (Circle)

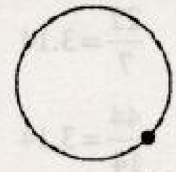


(تصویر:15.16)

نیشا اپنی چوڑی پر چمکیلی پٹی لگانا چاہتی ہے۔ اسے پتا کرنا ہے کہ پٹی کی لمبائی کیا ہے؟ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ چوڑی کا محیط کیا ہوگا؟

آپ ایک پیمانے (رولر) کی مدد سے ٹیڑھی سطح کو نہیں ناپ سکتے، کیوں کہ یہ ساخت سیدھی نہیں ہے۔ آپ کیا کریں گے؟

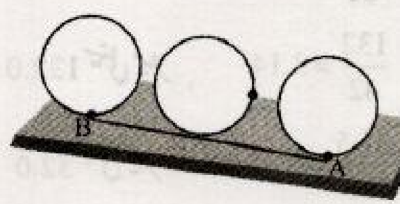
(تصویر:15.17)



(تصویر:15.17)

خاکہ 15.16 میں دیئے گئے ساخت کے ضروری کنارے کی لمبائی معلوم کرنے کے لیے کارڈ کے کنارے پر ایک نقطہ لگایئے اور اسے ایک ٹیبل پر رکھئے۔ نقطہ کی حالت کو ٹیبل پر بھی درج کیجئے۔ (خاکہ:15.17)

اب دائرہ نما کارڈ کو ایک سہل خط کی سمت میں ٹیبل پر تب تک گھمایئے۔



(تصویر:15.18)

جب تک درج نقطہ ٹیبل کو دوبارہ مُس نہ کر جائے۔ اس دوری کو خط کے ساتھ ناپئے۔ یہ ضروری کنارے کی لمبائی ہے۔ یہ کارڈ کے درج کیے گئے نقطہ سے کارڈ کے کنارے کنارے واپس اُسی نقطہ تک کی دوری ہے۔ آپ ایک دھاگے کو دائرہ نما چیز کے چاروں طرف کنارے کنارے رکھ کر بھی دوری معلوم کر سکتے ہیں۔

ایک دائرہ نما حلقہ کی چاروں طرف کی دوری اس کا محیط(Circumference) (گھیرا) کہلاتا ہے۔

خود کر کے دیکھئے: **ایک بوتل کا ڈھکن، ایک چوڑی یا کوئی دوسری دائرہ نما چیز لیجئے اور اس کا محیط (گھیرا) معلوم کیجئے۔**

اب کیا آپ اس قاعدہ سے ایک دوڑ مقابلہ کرنے والے کے ذریعہ ایک دائرہ نما سڑک پر طے کی گئی دوری معلوم کر سکتے ہیں؟

ابھی بھی سڑک کی چاروں طرف کی دوری معلوم کرنا یا دوسری کسی دائرہ نما چیز کو دھاگے سے ناپنا بہت ہی مشکل ہوگا۔ اس کے علاوہ یہ ناپ صحیح بھی نہیں ہوگی۔

اس لیے $x = 3 \times (64 - x)$

یا $x = 192 - 3x$

یا $x + 3x = 192$ ($3x$ کا حصہ بدلنے پر)

یا $4x = 192$

$x = \frac{192}{4}$ ($4x$ میں 4 گنا ہے، اس لیے حصہ بدلنے پر وہ مقسوم علیہ کی شکل میں آجائے گا۔ حقیقت میں یہ عمل دونوں طرف 4 سے تقسیم کرنے کے برابر ہے۔

یا $x = 48$

بڑا حصہ $x = 48$

چھوٹا حصہ $64 - x = 64 - 48 = 16$

مطلوبہ حصہ 48 روپیہ اور 16 روپیہ ہے۔

مثال: 4 باپ، بیٹا اور بیٹی کے عمر کا جوڑ 120 ہے۔ باپ کی عمر بیٹا اور بیٹی کی عمر کے جوڑ کے برابر ہے اور بیٹی کی عمر بیٹے کی عمر کا نصف ہے تو تینوں کی عمر الگ الگ معلوم کیجئے۔

حل: مانا کہ بیٹے کی عمر x سال ہے۔

بیٹی کی عمر $= \frac{x}{2}$ (بیٹے کی عمر کی آدھی)

∴ بیٹا اور بیٹی کی عمر کا جوڑ $= x + \frac{x}{2}$

سوال سے

باپ کی عمر $= x + \frac{x}{2}$

تینوں کی عمر کا جوڑ

یا $\frac{x}{2} + x + x + \frac{x}{2} = 120$

یا $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + 2x = 120$

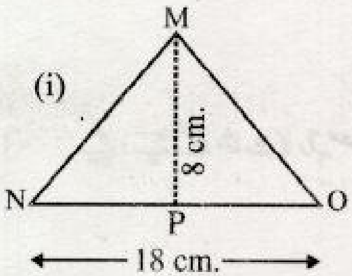
4- متوازی الاضلاع $PQRS$ کے دو اضلاع کی لمبائی 20 سینٹی میٹر اور 10 سینٹی میٹر ہے۔ قاعدہ PQ کی متعلقہ اونچائی 6 سینٹی میٹر ہے تو QR کی متعلقہ اونچائی معلوم کیجیے۔

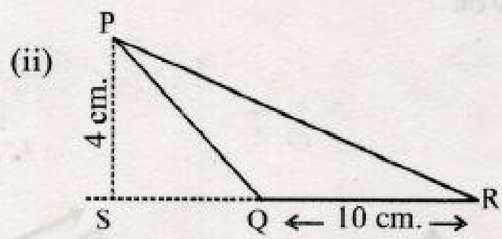
5- ایک مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے، جس کا قاعدہ 16 سینٹی میٹر اور اونچائی 12 سینٹی میٹر ہے۔

6- خالی جگہوں کو بھریئے:

مثلث	قاعدہ	اونچائی	رقبہ
(i)	50 سینٹی میٹر	30 سینٹی میٹر	
(ii)	40 سینٹی میٹر	60 سینٹی میٹر	
(iii)	80 سینٹی میٹر		1200 مربع سینٹی میٹر
(iv)		20 سینٹی میٹر	300 مربع سینٹی میٹر

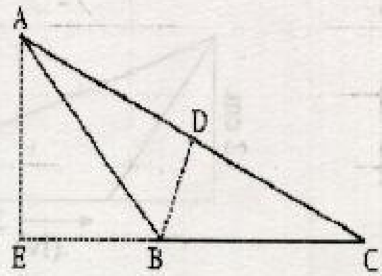
7- ذیل کی خاکوں کا رقبہ معلوم کیجیے:





8- کسی مثلث کا رقبہ 45 مربع سینٹی میٹر ہے اور قاعدہ سے عمودی راس کی اونچائی 9 سینٹی میٹر ہے تو قاعدہ کی لمبائی بتایئے۔

9- ABC میں $BC = 20$ سینٹی میٹر، $AE = 14$ سینٹی میٹر اور $AC = 28$ سینٹی میٹر تو BD معلوم کیجیے۔



یا $\frac{20x-19x}{20}=20,000$

یا $\frac{x}{20}=20,000$

یا $20,000\times 20=4,00,000$ روپیہ

اس لیے کل رقم =40,00,000 روپیہ

سوالنامہ : 11.3

درج ذیل مساوات کا حل کیجئے اور حاصل شدہ حل کی جانچ کریں۔

1- $\frac{x}{3}-\frac{x}{5}=-2$ 2- $\frac{3x+2}{3}=\frac{17}{6}$ 3- $x-4=4(129-x)$

4- $\frac{x+19}{5}=8$ 5- $\frac{x}{2}+6=\frac{x}{3}+\frac{2x}{7}$ 6- $\frac{2y-1}{3}=\frac{y+2}{2}$

7- $10=4+3(x+2)$ 8- $4x-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+x$ 9- $3(x+1)-2(x+1)=10$

10- $5(5x+2)=40$ 11- $\frac{x+19}{5}=8$ 12- $\frac{5x}{2}-7=\frac{11}{2}$

13- تین لگاتار اعداد صحیح کا جوڑ 21 ہے تو تینوں اعداد صحیح معلوم کیجئے۔

14- تین لگاتار آنے والے طاق اعداد کا جوڑ 39 ہے تو وہ عدد معلوم کیجئے۔

15- کسی متساوی الساقین کا راس زاویہ راس 50° کا ہو تو مثلث کے باقی دونوں زاویوں کی ناپ بتایئے۔

16- کسی مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی کی نسبت 3:2 ہے۔ اگر مستطیل کا احاطہ 90 میٹر ہے تو اس کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجئے۔

17- سلمیٰ کی عمر اس کے باپ کی عمر کی ایک تہائی سے 5 سال کم ہے۔ اگر سلمیٰ کی عمر 20 سال ہے تو اس کے باپ کی عمر معلوم کیجئے۔

18- وِکرم نے 8 کرسی اور 2 میز خریدنے میں کل 2900 روپیہ خرچ کیا۔ اگر 1 میز کی قیمت 450 روپیہ ہے تو 1 کرسی کی قیمت معلوم کیجئے۔

19- .... 20° ہے تو دونوں زاویہ معلوم کیجئے۔

پھر رقبہ = 60 سینٹی میٹر^2، قاعدہ = PQ=15 سینٹی میٹر، UR = ؟

متوازی الاضلاع $PQRS$ کا رقبہ = $UR \times PQ$

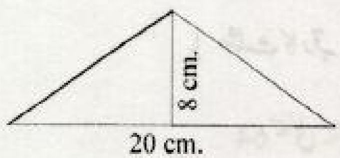
60 سینٹی میٹر^2 = 10 سینٹی میٹر UR

$UR = \frac{60\,cm.^2}{10\,cm.}$ = 6 سینٹی میٹر

اس لیے متوازی الاضلاع $PQRS$ میں PQ کی متعلقہ اونچائی 6 سینٹی میٹر

مثال: 9 ایک مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے، جس کی قاعدہ 20 سینٹی میٹر اور اونچائی 8 سینٹی میٹر ہے۔

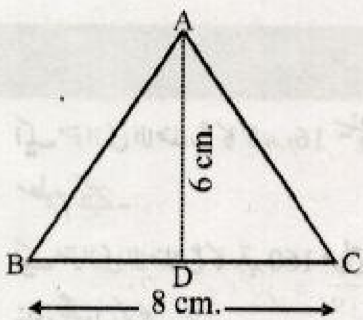
حل: مثلث کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ × قاعدہ × اونچائی

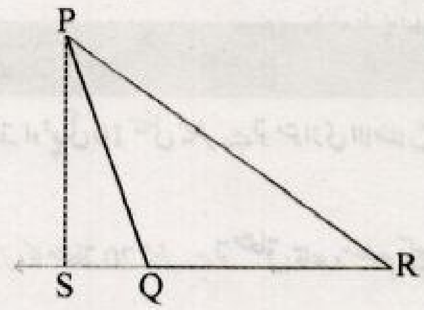


= $\frac{1}{2}$ × 20 سینٹی میٹر × 8 سینٹی میٹر

= 80 مربع سینٹی میٹر یا 80 سینٹی میٹر^2

خود کیجئے: ذیل کی شکل کا رقبہ معلوم کیجئے:





مثال: 10 کسی مثلث کا رقبہ 48 مربع سینٹی میٹر ہے اور اس کے راس عمود کی اونچائی 8 سینٹی میٹر ہے تو قاعدہ کی لمبائی بتائیے۔

حل: رقبہ = 48 مربع سینٹی میٹر = 48 سینٹی میٹر^2 اور اونچائی = 8 سینٹی میٹر

اس لیے 48 سینٹی میٹر^2 = $\frac{1}{2}$ × بنیاد × 8

باب : 12

قابل پیمائش اعداد (Rational Numbers)

12.1: تمہید

ہم نے طبعی عدد، مکمل عدد اور کسر اعداد کے بارے میں پڑھا ہے۔ کسر اعداد میں ہم لوگوں نے صرف مثبت شکل پر ہی غور وفکر کیا۔ کسر کے بارے میں ہم جانتے ہیں کہ کی $\frac{\text{شمارکنندہ}}{\text{نسب نما}}$ شکل میں لکھے اعداد کو کسر عدد کہتے ہیں، جس میں شمار کنندہ صفر یا کوئی بھی مثبت عدد صحیح ہوسکتا ہے۔ لیکن ہمیشہ مثبت عدد صحیح ہی ہوتا ہے۔ اس باب میں ہم ایسے اعداد کے بارے میں بھی پڑھیں گے جن کا شمارہ کنندہ و نسب نما منفی عدد صحیح بھی ہوسکتا ہے۔ اس باب میں ہم عدد کے ضابطوں کو زیادہ وسیع طور پر سمجھیں گے، جس میں ہم مثبت و منفی کسروں کے مجموعوں اور ان کے آپس میں اعمال سیکھیں گے۔

12.2- قابل پیمائش عدد

ہم نے عدد صحیح میں دیکھا ہے کہ کسی اشیا کی قیمت میں 50 روپیہ اضافہ کو 50+ سے ظاہر کیا جائے تو 50 روپیہ کی کمی کو 50- سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ اسی طرح کسی جگہ سے دائیں جانب کی ذوری 10 کیلو میٹر کو 10+ سے تو بائیں جانب کی دوری 10 کیلو میٹر 10- سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

اس طرح کی بہت ساری صورتیں کسری اعداد میں بھی ہوتی ہیں۔ جیسے ہم سمندری سطح سے اوپر 800 میٹر کی اونچائی کو کیلو میٹر میں ظاہر کرنے پر $\frac{800}{1000}$ کیلو میٹر = $\frac{4}{5}$ کیلو میٹر ہوتا ہے، جسے $\frac{4}{5}$ کیلو میٹر سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ کیا ہم سمندر کے نیچے کی زمین سے نیچے 800 میٹر کی دوری کو کیو میٹر میں ظاہر کر سکتے ہیں؟ کیا ہم سمندر کے نیچے کی زمین سے نیچے $\frac{4}{5}$ کیلومیٹر کی گہرائی کو $\frac{-4}{5}$ سے ظاہر کر سکتے ہیں؟ اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{-4}{5}$ نہ تو ایک عدد صحیح ہے اور نہ ہی ایک کسر۔ ایسے اعداد کو شامل کرنے کے لیے ہمیں عددی ضابطے کو وسیع کرنے کی ضرورت ہے۔ تو آیئے ہم ایک نئے قسم کے عدد پر غور وفکر کرتے ہیں۔ جسے قابل پیائش عدد کہتے ہیں۔

ہر ایک مثلث کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ (متوازی الاضلاع کا رقبہ)

= $\frac{1}{2}$ (بنیاد × اونچائی)   کیوں کہ متوازی الاضلاع کا رقبہ = بنیاد × اونچائی

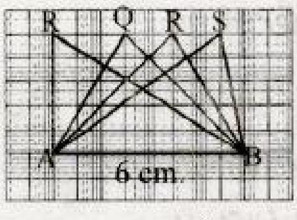
= $\frac{1}{2}$ $(b \times h)$ (یا $\frac{1}{2} b \times h$ ، مختصر میں)

خود کر کے دیکھیے:

1- اوپر دیئے گئے لائحہ عمل کو الگ الگ طرح کے مثلث لے کر کیجیے۔

2- الگ الگ طرح کے متوازی الاضلاع لیجیے۔ ہر ایک متوازی الاضلاع کا دو مثلثوں میں ایک تیر کی طرح کاٹیے۔ کیا یہ متماثل مثلث ہے۔

شکل 15.14 میں سبھی مثلث، بنیاد $AB = 6$ سینٹی میٹر پر واقع ہے۔



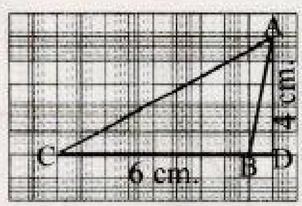
(تصویر 15.14)

بنیاد AB پر ہر ایک مثلث کی متعلقہ اونچائی کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟

کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ سبھی مثلثوں کے رقبہ برابر ہیں؟ ہاں۔ کیا مثلث متماثل ہیں؟ نہیں۔

ہم نتیجہ نکالتے ہیں کہ سبھی متماثل مثلثوں کا رقبہ برابر ہوتا ہے۔ لیکن یہ ضروری نہیں ہے کہ وہ مثلث جن کا رقبہ برابر ہوتا ہے وہ متماثل ہیں۔

بنیاد 6 سینٹی میٹر والے ایک زاویہ منفرجہ مثلث ABC پر غور کرتے ہیں۔ (شکل: 15.15)



(تصویر 15.14)

اس کی اونچائی AD راس A سے CB پر عمود ہیں جو مثلث کے بیرونی حصہ میں واقع ہے۔ کیا آپ اس مثلث کا رقبہ معلوم کر سکتے ہیں؟

اس لیے کسی بھی مثلث کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ × بنیاد × اونچائی ہوتی ہے۔

کیا 0 ایک قابل پیمائش عدد ہے؟

ہاں کیوں کہ اسے $\frac{0}{1}$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔

12.3- مساوی قابل پیمائش عدد

ایک قابل پیمائش عدد کو الگ الگ شمار کنندوں اور نسب نماؤں کا استعمال کرتے ہوئے لکھا جا سکتا ہے۔

قابل پیمائش عدد $\frac{-5}{8}$ پر غور کریں۔

$\frac{-5}{8}=\frac{-5\times 2}{8\times 2}=\frac{10}{16}$ ، ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{-5}{8}$ وہی ہے جو $\frac{-10}{16}$ ہے۔

ساتھ ہی $\frac{-5}{8}=\frac{-5\times 3}{8\times 3}=\frac{-15}{24}$، اس لیے $\frac{-5}{8}$ وہی ہے، جو $\frac{-15}{24}$ ہے۔

پھر $\frac{-5}{8}=\frac{-5\times 4}{8\times -4}=\frac{20}{-32}$، اس لیے $\frac{-5}{8}$ وہی ہے جو $\frac{20}{-32}$ ہے۔

اس طرح $\frac{-5}{8}=\frac{-10}{16}=\frac{-15}{24}=\frac{20}{-32}$ ہے۔

یعنی ایسی قابل پیمائش اعداد جو باہم برابر ہوں ایک دوسرے کے مساوی (Equivalent) قابل پیمائش اعداد کہے جاتے ہیں۔

نوٹ: کسی قابل پیمائش عدد کا مساوی کسر حاصل کرنے کے لیے قابل پیمائش عدد کے شمار کنندہ اور نسب نما میں یکساں عدد سے ضرب یا تقسیم کرتے ہیں۔ جیسا کہ اوپر بتایا گیا ہے۔

کیا $\frac{5}{-7}=\frac{-5}{7}$ ہے؟ چونکہ $\frac{5}{-7}=\frac{5\times -1}{-7\times -1}=\frac{-5}{7}$ یا $\frac{5}{-7}=\frac{5\div -1}{-7\div -1}=\frac{-5}{7}$

اس لیے $\frac{5}{-7}$ اور $\frac{-5}{7}$ دونوں ایک دوسرے کے برابر ہے۔ یعنی $\frac{5}{-7}=\frac{-5}{7}$ ہوگا۔

ہم $\frac{5}{-7}$ کو $-\frac{5}{7}$، $\frac{-5}{7}$ کو $-\frac{5}{7}$ وغیرہ لکھتے ہیں۔

حاصل کر سکتے ہیں؟ آپ ایک مستطیل حاصل کرتے ہیں۔

کیا متوازی الاضلاع کا رقبہ بنائے گئے مستطیل کے رقبہ کے برابر ہیں۔

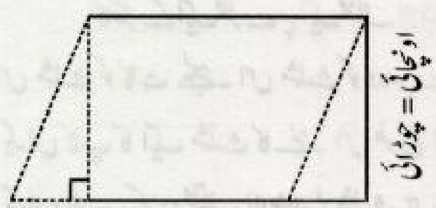
ہاں، متوازی الاضلاع کا رقبہ = بنائے گئے مستطیل کا رقبہ مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی کیا ہے؟

ہم نے دیکھا کہ بنائے گئے مستطیل کی لمبائی، متوازی الاضلاع کی ساخت کی لمبائی کے برابر ہے۔ اور مستطیل کی چوڑائی، متوازی الاضلاع کی اونچائی کے برابر ہے۔[شکل(iii)]

اب متوازی الاضلاع کا رقبہ = مستطیل کا رقبہ

= لمبائی × چوڑائی

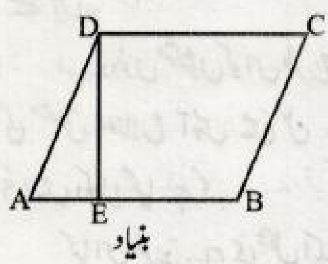
$= l \times b$



(تصویر:15.11)

لیکن مستطیل کی لمبائی l اور چوڑائی b بالترتیب متوازی الاضلاع کی بنیاد b اور اونچائی h ہی ہے۔

اس طرح، متوازی الاضلاع کا رقبہ = قاعدہ × اونچائی = $b \times h$ ہی ہے۔



متوازی الاضلاع کی کسی بھی ضلع کو قاعدہ لے سکتے ہیں۔ اس ضلع پر مخالف راس سے ڈالا گیا عمود اس کی اونچائی کہلاتی ہے۔ متوازی الاضلاع $ABCD$ میں DE، AB پر عمود ہے۔ یہاں AB قاعدہ اور DE متوازی الاضلاع کی اونچائی ہے۔

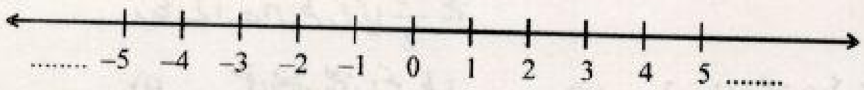
اس متوازی الاضلاع $ABCD$ میں BF مخالف ضلع AD پر ڈالا گیا عمود ہے۔ یہاں AD قاعدہ اور BF اونچائی ہے۔

خود کر کے دیکھیے:

قابل پیمائش عدد	منفی قابل پیمائش عدد	مثبت قابل پیمائش	نہ مثبت نہ منفی
$\frac{45}{18}$			
$\frac{-40}{27}$			
$\frac{-28}{-17}$			
$\frac{56}{-19}$			
$\frac{0}{5}$			
0			

12.4- قابل پیمائش اعداد کا عددخطی پر ظاہر کرنا

آیئے عددخطی کو دیکھیں:



عددی خط میں صفر کی دائیں جانب مثبت عدد صحیح ہے، جنھیں + نشان کے ساتھ لکھتے ہیں۔ اور صفر کے بائیں جانب منفی عدد صحیح ہے، جنھیں – نشان کے ساتھ لکھتے ہیں۔ عددی خط پر ہم لوگوں نے پچھلی جماعت میں کسروں کی شکل کو دیکھا ہے۔

آیئے اب ہم لوگ عددخطی پر قابل پیمائش عدد کو ظاہر کریں:

ایک قابل پیمائش عدد $\frac{-2}{3}$ کو عددخطی پر ظاہر کریں۔ چونکہ $\frac{-2}{3}$ منفی قابل پیمائش عدد ہے۔ اس لیے اس کی جگہ '0' (صفر) کی بائیں جانب ہوگا۔ $\frac{-2}{3}$ عددخطی کے '0' اور 1– کے بیچ ہوگا۔

مستطیل	لمبائی	چوڑائی	احاطہ	رقبہ
(a)	5 سینٹی میٹر	2 سینٹی میٹر	14 سینٹی میٹر	10 مربع سینٹی میٹر
(b)				
(c)				
(d)				

(ii) جس مستطیل کا رقبہ سب سے کم ہے، اس کے دونوں ضلع کی ناپ کیا ہے؟

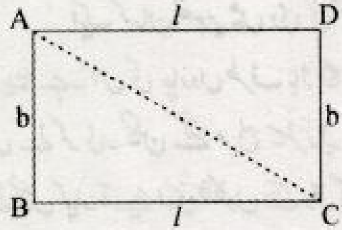
(iii) جس مستطیل کا رقبہ سے زیادہ ہے، اس کے دونوں ضلع کی ناپ کیا ہے؟

....

....

15.3- مثلث کا رقبہ(Area of Triangle)

ایک مستطیل نما کاغذ کا ایک ٹکڑا لیجئے۔ اسے وتر کے متوازی ایسا کاٹئے کہ دو مثلث حاصل ہو۔ (شکل A)
اب ایک کو دوسرے پر رکھئے۔ کیا یہ دونوں ایک دوسرے کو پوری طرح ڈھک لیتا ہے؟



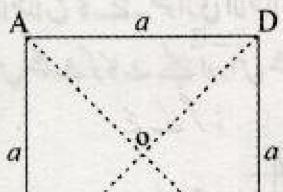
(تصویر:15.7)

ہم دیکھتے ہیں کہ ہاں دونوں ایک دوسرے کو پوری طرح ڈھک لیتا ہے۔ اس لیے دونوں متماثل ہیں۔ (شکل:15.7)
اس لیے ہر ایک کا رقبہ آپس میں برابر ہوگا۔
△ABC کا رقبہ مستطیل کے رقبہ کا نصف ہوگا۔

△ABC کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ مستطیل ABCD کا رقبہ۔

$= \frac{1}{2}(l \times b)$ (اگر l= بنیاد، b= اونچائی ہو)

اس لیے مثلث کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ × بنیاد × اونچائی	



(تصویر:15.8)

اسی طرح کوئی مربع لے کر اسے مثلثوں میں بانٹئے اور ہر ایک مثلث کا رقبہ معلوم کیجئے۔ a ضلع کا ABCD ایک مربع نما کاغذ کا ایک ٹکڑا لیجئے۔ اسے تیر کی طرح موڑ کر کاٹ لیجئے۔ پھر مثلثوں کو ایک دوسرے پر رکھئے۔ کیا یہ مثلث

12.5- قابل پیائش عدد کا موازنہ

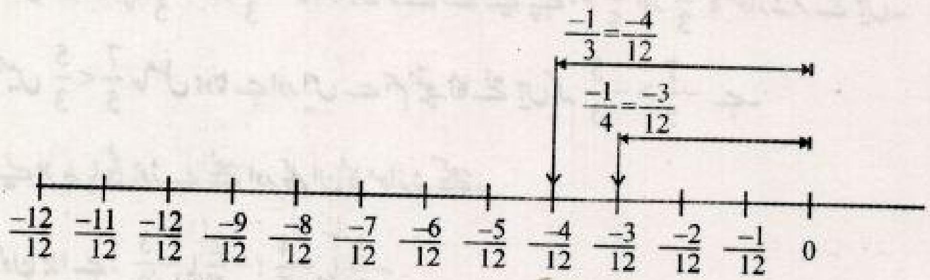
ہم نے دیکھا ہے کہ دو اعداد صحیح یا دو کسروں کا موازنہ کیسے کیا جاتا ہے اور یہ بھی ان میں کون بڑا اور کون چھوٹا ہے۔ آیئے اب ہم لوگ دو قابل پیائش اعداد کے موازنہ پر غور کریں۔

$\frac{5}{4}$ اور $\frac{6}{11}$ جیسی دو مثبت قابل پیائش اعداد کا موازنہ ٹھیک اُسی طرح کیا جا سکتا ہے جیسا کہ ہم کسروں کی صورت کے لیے پہلے ہی کر چکے ہیں۔

آیئے دو منفی قابل پیائش اعداد کا موازنہ عددی خط پر دیکھیں۔

ہم لوگوں نے اعداد صحیح کے موازنہ کے ضمن میں دیکھا ہے کہ عددی خط پر دائیں طرف کے عدد صحیح بائیں طرف کی عدد صحیح سے بڑا ہوتا ہے۔ اسی طرح $\frac{-1}{4}$ اور $\frac{-1}{3}$ کو عددی خط پر ظاہر کر کے پہچان کیا جا سکتا ہے۔ دونوں کے ایسے مساوی قابل پیائش عدد لیجیے جن کے شمار کنندہ یکساں ہوں۔ جیسے:

پھر $-\frac{1}{4} = \frac{1\times 3}{4\times 3} = -\frac{3}{12}$ اور $-\frac{-1}{3} = \frac{1\times 4}{3\times 4} = -\frac{4}{12}$



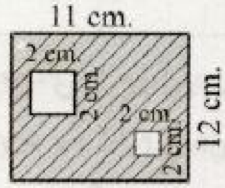
چونکہ $-\frac{1}{4}$، $-\frac{1}{3}$ سے عدد خطی پر دائیں طرف ہے۔ اس لیے $\frac{-1}{4}$، $-\frac{1}{3}$ سے چھوٹا ہوگا۔

8، 5 سے بڑا ہے۔ لیکن 8-، 5- سے چھوٹا ہے۔

اسی طرح اگر $\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$ ہے، لیکن $\frac{-1}{3} < \frac{-1}{6}$

ہم کسروں کے اپنے مطالعہ سے یہ جانتے ہیں کہ $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ ہے۔ ساتھ ہی عدد خطی سے ہم نے $\frac{-1}{4}$ اور

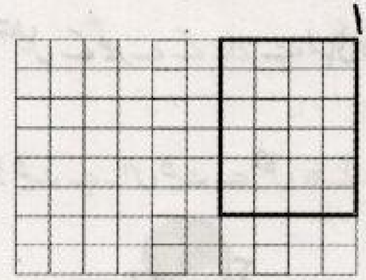
(c)



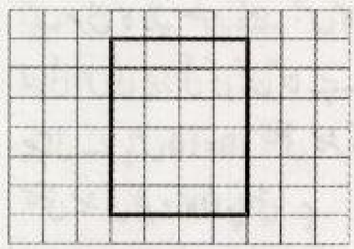
(ii) کسی ایک شکل کے لیے یہ بھی بتایئے کہ سایہ دار حصے کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے آپ نے کیا کیا؟

5- جماعت میں استاد نے طلبہ کو ایک عمل کرنے کو کہا۔ طلبہ کو 10 سینٹی میٹر لمبے اور 8 سینٹی میٹر چوڑے گتے میں سے 6 سینٹی میٹر لمبا 4 سینٹی میٹر چوڑا کاٹنا تھا۔ رمیش، نازیہ، ٹینا اور ابراہیم نے اسے نیچے دیئے گئے خاکے کے مطابق الگ الگ طریقے سے کاٹا۔

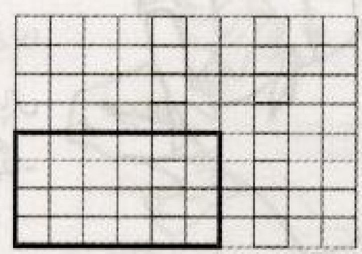
رمیش



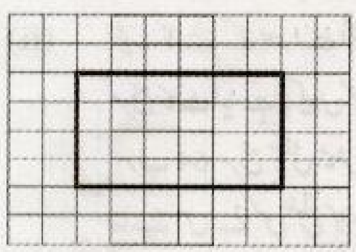
نازیہ



ٹینا



ابراہیم



(i) چاروں طلبہ کے بچے ہوئے حصے کے رقبہ کی گنتی کیجئے:

رمیش .... نازیہ ....

ٹینا .... ابراہیم ....

آپ نے کیا پایا؟

مثال: 2 $\frac{-5}{6}$ اور $\frac{-4}{5}$ کا موازنہ کیجئے۔

حل: $\frac{5}{6}$ اور $\frac{4}{5}$ میں

6 اور 5 کا مشترک ذو اضاف اقل = $30 = 6\times 5$

$$\frac{5}{6}=\frac{5\times 5}{6\times 5}=\frac{25}{30}$$

$$\frac{4}{5}=\frac{4\times 6}{5\times 6}=\frac{24}{30}$$

$\Rightarrow \frac{25}{30}>\frac{24}{30}$ کیوں کہ $25 > 24$

$$\Rightarrow \frac{5}{6}>\frac{4}{5}$$

طریقہ کار:

⇐ ہر ایک قابل پیائش عدد کے نسب نما کا مشترک ذو اضاف اقل نکالتے ہیں۔

⇐ دونوں کے نسب نما کو مشترک ذو اضاف اقل کے برابر کرتے ہیں۔

⇐ اس طرح مشترک نسب نما والا کسر حاصل ہو جاتا ہے۔

⇐ پھر دونوں قابل پیائش اعداد کا موازنہ کر چھوٹا یا بڑا کسر معلوم کرتے ہیں۔

اب $\frac{-5}{6}$ اور $\frac{-4}{5}$ کے لیے عدم مساوات کی علامت کو الٹا کر دیتے ہیں۔

$$\therefore\ \frac{-5}{6}<\frac{-4}{5}$$

ایک مثبت قابل پیائش عدد منفی قابل پیائش عدد سے بڑا ہوتا ہے۔ جیسے: $\frac{5}{4}<\frac{-8}{3}$

$\frac{-4}{-5}$ اور $\frac{-7}{-8}$ کے موازنہ کے لیے پہلے انھیں معیاری شکل میں تبدیل کریں اور پھر ان کا موازنہ کریں۔

دو قابل پیائش اعداد کے موازنہ کے لیے تیسرے قاعدے پر غور کریں۔

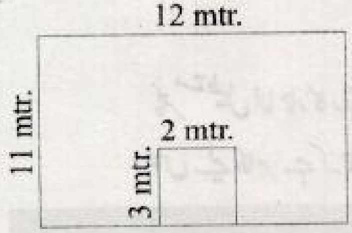
مثال: 3 $-\frac{5}{4}$ اور $-\frac{2}{3}$ کا موازنہ کریں۔

حل: $-\frac{5}{4}$ اور $-\frac{2}{3}$ کا کراس ضرب کرتے ہیں۔

اب مستطیل نما شیٹ کا احاطہ = (لمبائی + چوڑائی) × 2

$=2\,(40 + 10)$ سینٹی میٹر $= 50 \times 2$ سینٹی میٹر $=100$ سینٹی میٹر

مثال 3: 12 میٹر × 11 میٹر ناپ کی ایک دیوار میں 3 میٹر × 2 میٹر ناپ والے ایک دروازے کا ایک چوکھٹ لگایا گیا ہے۔ اگر دیوار پر پینٹ کرانے کا خرچ 2.50 روپیہ مربع میٹر ہو تو پوری دیوار پر پینٹ کرانے کا خرچ معلوم کیجئے۔



(خاکہ: 15.5)

حل: دیوار پر پینٹ، دروازے کے رقبہ کو چھوڑ کر ہوگا۔

دروازے کا رقبہ = لمبائی × چوڑائی

= 3 میٹر × 2 میٹر = 6 مربع میٹر

دروازہ سمیت دیوار کا رقبہ = لمبائی × چوڑائی

= 12 میٹر × 11 میٹر

= 132 میٹر

دروازے کو چھوڑ کر، دیوار کا رقبہ = $132m^2 - 6m^2 = 126$ میٹر^2

دیوار پر پینٹ کرانے کا کل خرچ = 126 میٹر^2 × 2.50 = 315 روپیہ (جواب)

مثال 4: ایک مستطیل کا رقبہ ایک مربع کے رقبہ کے برابر ہے۔ اگر مستطیل کا رقبہ 100 مربع میٹر ہو تو مربع کا ضلع معلوم کیجئے۔

حل: مربع کا رقبہ = مستطیل کا رقبہ = 100 مربع سینٹی میٹر

$\because$ مربع کا رقبہ = ضلع^2

100 میٹر^2 = ضلع^2

$\therefore$ ضلع = $\sqrt{100}$ میٹر^2 = 10 میٹر

مثال 5: ایک تار 20 سینٹی میٹر ضلع والے مربع کی ساخت کا ہے۔ اگر تار کو دوبارہ موڑ کر ایک 24 سینٹی میٹر لمبائی والا ایک مستطیل بنایا جاتا ہے تو اس کی چوڑائی معلوم کیجئے اور یہ بھی بتائیے کہ کس کا رقبہ زیادہ ہوگا۔

حل: مربع کا ایک ضلع 20 سینٹی میٹر اور رقبہ = 20 × 20 = 400 مربع سینٹی میٹر

$\because$ تار کی لمبائی = مربع کا احاطہ = 4 × ضلع = 4 × 20 = 80 سینٹی میٹر

مثال: 5 مان لیا کہ $\frac{-3}{10}$ اور $\frac{7}{10}$ کے بیچ کا قابل پیائش عدد معلوم کرنا ہے۔ ہمیں پتا ہے کہ $\frac{-3}{10}$ اور $\frac{7}{10}$ کے

بیچ میں کم سے کم 9 قابل پیائش اعداد تو ہیں ہی $\frac{-2}{10}, \frac{-1}{10}, \frac{0}{10}, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}$ کیونکہ

3- اور 7 کے بیچ 9 عدد صحیح ہے۔ لیکن کیا $\frac{-3}{10}$ اور $\frac{7}{10}$ کے بیچ اور بھی قابل پیائش اعداد ہیں؟

دیکھتے ہیں، جیسے: $\frac{-3}{10} = \frac{7\times 5}{10\times 5} = \frac{-15}{50}$ اسی طرح $\frac{7}{10} = \frac{7\times 5}{10\times 5} = \frac{35}{50}$

اب $\frac{-15}{50}$ اور $\frac{35}{50}$ کے بیچ کے قابل پیائش اعداد ہیں: $\frac{-14}{50} < \frac{-13}{50} < \frac{-12}{50} < \ldots\ldots < \frac{34}{50}$

اب اور زیادہ اعداد معلوم کرنے کے لیے ہم $\frac{-3}{10}$ اور $\frac{7}{10}$ کو $\frac{100}{100}$ سے ضرب کر مزید قابل پیائش اعداد معلوم کر سکتے ہیں۔

خود کر کے دیکھیے: $-\frac{4}{5}$ اور $-\frac{3}{5}$ قابل پیائش اعداد کے بیچ میں 7 قابل پیائش اعداد معلوم کیجیے۔

مثال: 6 $\frac{2}{5}$ اور $\frac{5}{6}$ کے بیچ کے قابل پیائش اعداد لکھیے۔

حل: پہلے ان کے نسب نما برابر کرتے ہیں $\frac{2}{5} = \frac{2\times 6}{5\times 6} = \frac{12}{30}$; $\frac{5}{6} = \frac{5\times 5}{6\times 5} = \frac{25}{30}$

اس لیے ان کے بیچ کے قابل پیائش اعداد لکھی جا سکتے ہیں۔

$$\frac{13}{30} < \frac{14}{30} < \frac{15}{30} < \frac{16}{30} < \ldots\ldots < \frac{24}{30}$$

شمار کنندہ کے فرق کو اور زیادہ بڑھا کر ان کے بیچ میں مزید قابل پیائش اعداد لکھے جا سکتے ہیں۔

معلوم کرنا ہوگا۔

خود کر کے دیکھیے:

نیچے دیئے گئے سوالوں کو حل کرنے کے لیے آپ کو رقبہ یا احاطہ میں سے کس کی ضرورت ہوگی:

1- تختۂ سیاہ کتنی جگہ گھیرتا ہے؟

2- ایک مستطیل نما آم کے باغیچے کی چاروں جانب باڑ لگانے کے لیے ضروری تار کی لمبائی کیا ہے؟

3- ایک مثلث نما باغ کی چاروں جانب دو بار چکر لگانے پر آپ کتنی دوری طے کریں گے؟

4- ایک مستطیل نما سوئمنگ پل کو ڈھکنے کے لیے آپ کو کتنی پلاسٹک شٹ کی ضرورت ہوگی؟

کیا آپ جانتے ہیں؟

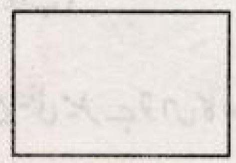
متساوی الاضلاع کا احاطہ = ضلعوں کی تعداد × ایک ضلع کی لمبائی

مربع کا احاطہ = 4 × ضلع

مستطیل کا احاطہ = $2(l + B)$ یا 2(لمبائی + چوڑائی)

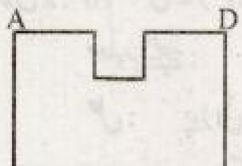
مستطیل کا رقبہ = لمبائی × چوڑائی

مربع کا رقبہ = ضلع × ضلع

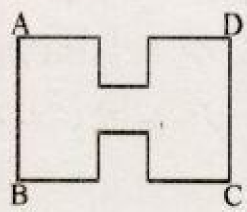


(تصویر: 15.2)

تانیہ کو ایک کالج (College) پورا کرنے کے لیے ایک 4 سینٹی میٹر ضلع والے مربع کی ضرورت تھی۔ اس کے پاس 28 سینٹی میٹر لمبائی اور 21 سینٹی میٹر چوڑائی والی ایک مستطیل نما شیٹ تھی (خاکہ: 15.2)۔ اس نے اس مستطیل نما شیٹ میں سے ایک 4 سینٹی میٹر ضلع والے ایک مربع کو کاٹا۔ اس کی سہیلی نے شیٹ کے باقی حصوں کو دیکھا (خاکہ: 15.3) اور تانیہ سے پوچھا، کیا شیٹ کا احاطہ اب بڑھ گیا ہے یا کم ہوگیا ہے؟ کیا ضلع کی کل لمبائی، مربع کے کاٹنے کے بعد بڑھ گئی ہے؟ کیا رقبہ بڑھ گیا ہے یا کم ہوگیا ہے؟ تانیہ مخالف ضلع میں سے ایک اور مربع



(تصویر: 15.3)



(تصویر: 15.4)

حل: وسطی $= \frac{4}{8} = \frac{1+3}{4\times 2} = \dfrac{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}{2}$ چونکہ اوسط $\frac{4}{8}$ دونوں اعداد $\frac{1}{4}$ اور $\frac{3}{4}$ کے بیچ ہوگا۔

دوسرے قابل پیائش اعداد $\frac{1}{4}$ ، $\frac{4}{8}$ کا اوسط $= \frac{6}{16} = \frac{2+4}{8\times 2} = \dfrac{\frac{1}{4}+\frac{4}{8}}{2}$

تیسرے قابل پیائش اعداد $\frac{4}{8}$ اور $\frac{6}{16}$ کا اوسط $= \frac{14}{32} = \frac{8+6}{16\times 2} = \dfrac{\frac{4}{8}+\frac{6}{16}}{2}$

اسی طرح دوسرے قابل پیائش اعداد نکالے جا سکتے ہیں۔ اب نکالے گئے پہلے قابل پیائش اعداد کو دیئے گئے دوسرے قابل اعداد پیائش اعداد کے ساتھ اسی طرح کا عمل کر کے لامتناہی قابل پیائش اعداد نکالے جا سکتے ہیں۔

$$\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{4}{8}}{2} = \frac{6+4}{8\times 2} = \frac{10}{16};\qquad \dfrac{\frac{4}{8}+\frac{10}{16}}{2} = \frac{8+10}{16\times 2} = \frac{18}{32};\qquad \dfrac{\frac{10}{16}+\frac{18}{32}}{2} = \frac{20+18}{32\times 2} = \frac{38}{64}$$

اسی طرح دوسرے قابل پیائش اعداد نکالے جا سکتے ہیں۔ مانا کہ a اور b دو قابل پیائش اعداد ہیں تو ان کے بیچ کے قابل پیائش اعداد $= \dfrac{ak+b}{k+1}$ ؛ جہاں k = طبعی اعداد

خود کر کے دیکھئے:

درج ذیل کے بیچ کے 6 قابل پیائش اعداد اوسط کی ترکیب سے معلوم کیجئے۔

(i) $\frac{1}{2}$ اور $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{-1}{4}$ اور $\frac{3}{8}$

سوالنامہ 12.1:

-1 درج ذیل قابل پیائش اعداد کے بیچ 4 قابل پیائش اعداد لکھئے:

(i) -3 اور -1 (ii) -2 اور 0 (iii) -1 اور 0

(iv) $\frac{-4}{5}$ اور $\frac{2}{5}$ (v) $\frac{-4}{5}$ اور $\frac{-5}{7}$ (vi) $\frac{-1}{2}$ اور $\frac{2}{3}$

-3 اگر کسی ہیئت کی دو یا دو سے زاید خطی تشاکل ہوں تو کیا یہ ضروری ہے کہ اس میں ترتیب ایک سے زاید کی گردشی تشاکل ہوگا؟

-4 ایسے مثلثوں کے نام بتایئے جس میں خطی تشاکل اور ترتیب 2 سے زاید کی گردشی تشاکل دونوں ہوں۔

-5 کسی ہیئت کو اس کے مطابق 60° کے زاویہ پر گھمانے پر وہ اس کی ابتدائی حالت جیسی دکھائی پڑتی ہے۔ اور کن کن زاویوں کے لیے ایسی حالت بنے گی؟

ہم نے سیکھا

-1 متشاکل شکلوں کے ٹھیک بیچ کھینچی گئی خط کے مطابق موڑنے یا کاٹنے پر حاصل دونوں حصے ایک دوسرے کو پوری طرح ڈھک لیتے ہیں۔ کھینچا گیا خط محور تشاکل کہلاتی ہے۔

-2 آئینہ کے عکس سے بھی خطی تشاکل حاصل ہوتی ہے۔ جس میں آئینہ کا کنارا محور تشاکل کا کام بخوبی انجام دیتا ہے۔ آئینہ کے عکس میں اُفقی بدلاؤ یا دائیں بائیں سامنوں کا بھی دھیان رکھنا ہوتا ہے۔

-3 اگر گردش کے بعد اُسی حالت کے مطابق پہلے جیسی ہی دکھائی دیتی ہے تو ہم کہتے ہیں کہ اس میں گردشی تشاکل ہے۔ جس نقطہ کے مطابق گردش کرتی ہے وہ گردش کا مرکز کہلاتا ہے۔ جس زاویہ پر چیزیں گردش کرتی ہیں، اسے گردش کا زاویہ کہتے ہیں۔ پورے چکر کا مطلب 360° کی گردش، نصف چکر کا مطلب 180° کی گردش، ایک چوتھائی کا مطلب 90° کی گردش ہے۔

-4 گردش جب گھڑی کی سوئی کے چلنے کی سمت میں ہوں تو داہنی طرف گھومتا ہے۔

-5 ایک پورے چکر میں ایک چیز جتنی بار چلنے کی صورت حال کے مطابق پہلے جیسی ہی دکھائی دیتی ہے۔ وہ عدد اس گردشی تشاکل کی ترتیب کہلاتی ہے۔ ایک مربع کی گردشی تشاکل کی ترتیب 4 ہیں اور ایک مثلث متساوی الاضلاع کی گردشی تشاکل کی ترتیب 3 ہے۔

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{-2}{9}, \frac{-5}{4}$ (iv) $-2, 0, \frac{-2}{15}, \frac{7}{15}, \frac{-7}{11}$

-10 مندرجہ ذیل کو گھٹتی ترتیب میں لکھیے :

(i) $\frac{15}{28}, \frac{-17}{28}, \frac{-1}{28}, \frac{5}{28}$ (ii) $\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-5}{6}, \frac{4}{-3}$

(iii) $\frac{1}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{-5}{-6}$ (iv) $\frac{-5}{6}, \frac{-8}{9}, \frac{-11}{12}, \frac{1}{6}$

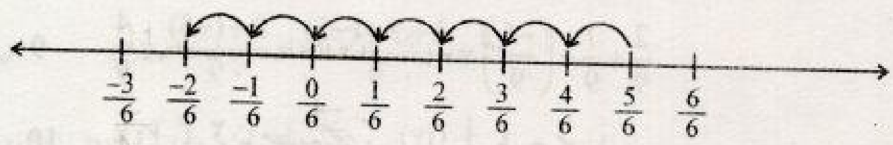
12.8- قابل پیمائش اعداد پر اعمال

آپ جانتے ہیں کہ اعداد صحیح اور کسروں کو کس طرح جوڑا، گھٹایا، ضرب اور تقسیم کیا جاتا ہے۔ آیئے ان بنیادی اعمال کو قابل پیمائش اعداد کے لیے سمجھیں۔

12.8.1- قابل پیمائش اعداد کا جوڑ

آیئے ہم قابل پیمائش اعداد $\frac{5}{6}$ اور $\frac{-7}{6}$ کا حاصل جمع عدد خطی سے حاصل کریں۔

ہم $\frac{5}{6}+\frac{-7}{6}$ معلوم کریں۔



دو روایتی نقطوں کے بیچ کی دوری $\frac{1}{6}$ ہے۔ اس لیے $\frac{5}{6}$ میں $\frac{-7}{6}$ جوڑنے کا مطلب ہے کہ $\frac{5}{6}$ کی بائیں جانب 7 قدم چلیں۔ ہم کہاں پہنچتے ہیں؟ ہم $\frac{-2}{6}$ پر پہنچتے ہیں۔

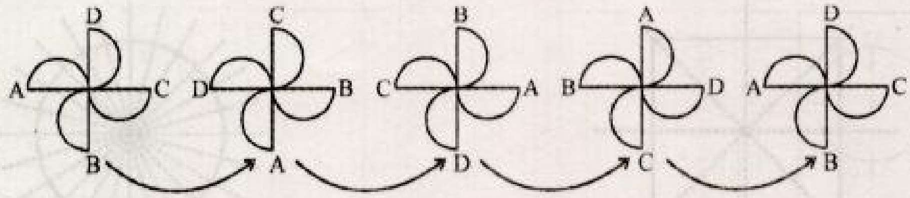
اس لیے $\frac{5}{6}+\left(\frac{-7}{6}\right)=\frac{-2}{6}$ ہے۔

آیئے، اسے دوسرے طریقے سے کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

$$\frac{5}{6}+\left(\frac{-7}{6}\right)=\frac{5+(-7)}{6}=\frac{-2}{6}$$

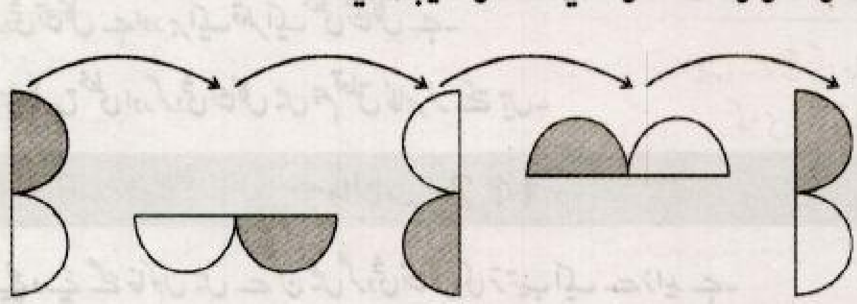
چکری کی گردش :

چکری کو دیکھو۔ چکری اپنے ایک گردش میں چار بار اپنے ابتدائی حالت میں آتی ہے اور ہر ایک °90 پر وہ اپنی پہلی والی حالت میں آتی ہے۔ اس لیے چکری کا زاویہ گردش °90 ہے۔

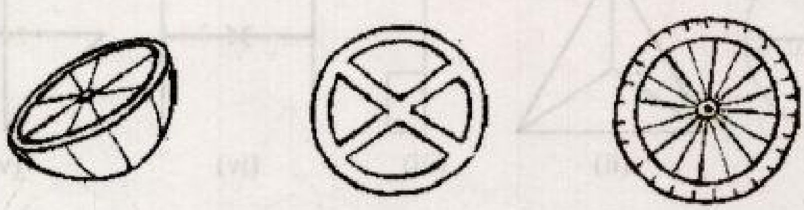


خود کیجیے :

B کی گردش کی سمت، گردشی زاویہ، اور گردشی ترتیب بتائیے :



پھلوں کی قاشیں، ٹریفک کے قاعدے، اور پہیہ وغیرہ میں بھی گردشی تشاکل دیکھیے۔



پھل کی قاش　　　سڑک کی علامت　　　پہیہ

سب سے پہلے مشترک ذو اضعاف اقل نکالتے ہیں۔ سبھی عدد میں نسب نما کو ذو اضعاف اقل کے برابر کرتے ہیں۔

$$\frac{5}{8}\times\frac{2}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{4}{4}+\frac{-7}{16} \qquad \frac{10}{16}+\frac{12}{16}+\frac{-7}{16} \qquad \frac{10+12-7}{16}=\frac{22-7}{16}$$

انھیں دیکھیے:

$$\frac{-3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{-3+3}{4}=\frac{0}{4}=0$$

ساتھ ہی $\frac{3}{4}+\left(\frac{-3}{4}\right)=\frac{3+(-3)}{4}=\frac{0}{4}=0$

$$\Rightarrow \qquad \frac{-3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}+\left(\frac{-3}{4}\right)$$

خودکر کے دیکھیے:

عدد خطی پر دکھائیں:

(i) $\frac{-1}{2}+\frac{5}{2}$ (ii) $\frac{5}{4}+\frac{-3}{4}$

اس لیے قابل پیائش اعداد میں بھی جمعی معکوس کی خصوصیت ہوتی ہے۔ ان میں $\frac{-3}{4}$ جمعی معکوس $\frac{3}{4}$ ہیں

اور $\frac{3}{4}$ کا جمعی معکوس $\frac{-3}{4}$ ہیں۔

خودکر کے دیکھیے:

$\frac{4}{6}$	$\frac{-8}{16}$	$\frac{-5}{20}$	قابل پیائش اعداد
			جمعی معکوس **Addition inverse**

12.8.2- قابل پیائش اعداد کی تفریق (گھٹاؤ)

ہم کسروں اور مکمل اعداد کی تفریق کے بارے میں تذکرہ کر چکے ہیں۔ یہاں قابل پیائش اعداد کی تفریق کا ذکر کریں گے۔

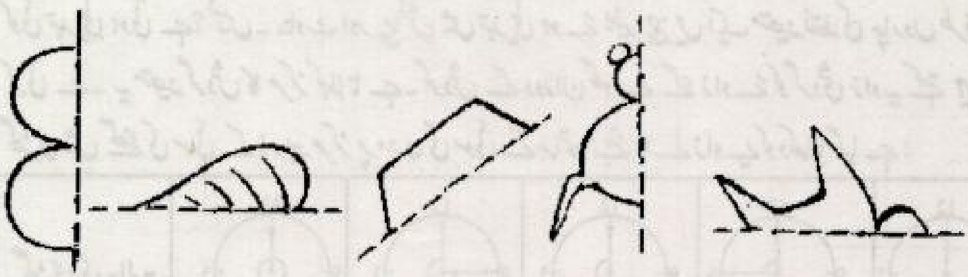
آیئے ہم درج ذیل عدد صحیح کے گھٹاؤ پر غور کریں:

$$5-3=5+(-3)=2$$

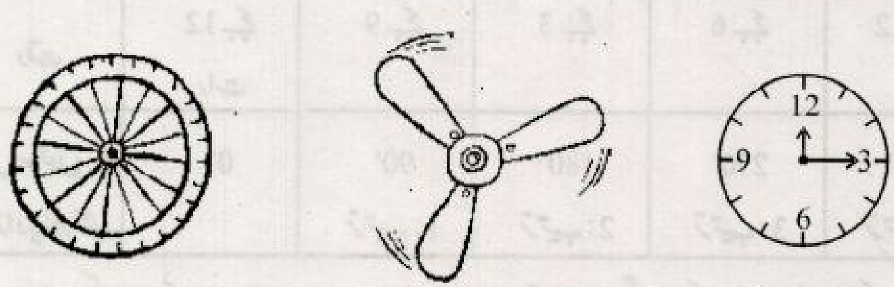
$$5-(-3)=5+(3)$$

اس لیے ظاہر ہے کہ کسی عدد صحیح کو گھٹانے کا مطلب اس کے جمعی معکوس کو جوڑنا ہے۔

3- نیچے دیئے گئے ادھورے خاکوں کو خط تشاکل کی مدد سے پورا کیجئے:



14.3- گردش تشاکل



(تصویر:14.4)

گھڑی کی سوئیاں، سائیکل کا پہیہ اور چھت سے لگے پنکھے وغیرہ کو آپ تب حرکت پذیر کہتے ہیں جب وہ گھومتے ہیں۔ کچھ چیزوں میں یہ گردش دونوں طرف ہوتی ہے، جب کہ گھڑی کی سوئیوں میں یہ صرف ایک سمت میں ہوتی ہے۔ گھڑی کی سوئیاں جس سمت میں گھومتی ہیں وہ گھڑی کی سمت(Clock wise) میں گردش کہلاتا ہے۔ باقی گردشوں کو گھڑی کے مخالف(Anti Clock wise) گردش کہتے ہیں۔ سائیکل کا پہیہ دونوں سمت گردش کرتا ہے۔

خود کیجئے:

1- گھڑی کی سمت میں گردش کی تین مثال دیجئے۔

....

2- گھڑی کی مخالف سمت میں گردش کی تین مثال دیجئے۔

....

مثال 12: $\frac{-5}{4}$ میں سے $\frac{-3}{8}$ کو گھٹائیے:

حل: 4، 8 کا مشترک ذو اضعاف اقل = 8

اب ہر ایک عدد کے نسب نما کو مشترک ذو اضعاف اقل (8) کے برابر کرتے ہیں۔

($\because$ قابل پیائش عدد کے نسب نما کو برابر کرنے کے بعد ہی جوڑا / گھٹایا جاتا ہے)۔

$$\therefore \frac{-5}{4} = \frac{-5\times 2}{4\times 2} = \frac{10}{8}; \quad \frac{-3}{8} = \frac{-3\times 1}{8\times 1} = \frac{-3}{8}$$

$$\frac{-5}{4} - \left(\frac{-3}{8}\right) = \frac{-10}{8} - \left(\frac{-3}{8}\right) \qquad = \frac{-10}{8} + \frac{3}{8}$$ ($\because$ $\frac{-3}{8}$ کا جمعی معکوس $\frac{3}{8}$ ہے)

$$= \frac{-10+3}{8} = \frac{-7}{8}$$ جواب

مثال 13: $\frac{-2}{9} - \left(\frac{-5}{18}\right) + \frac{7}{6}$

حل: $\frac{-2}{9} - \left(\frac{-5}{18}\right) + \frac{7}{6}$

$$= \frac{-2}{9} + \frac{5}{18} + \frac{7}{6}$$ ($\because$ گھٹاؤ کے نشان کے بعد والے رقم کے برعکس جوڑے لکھ کر عمل کیا جاتا ہے)۔

9، 18، 6 کا مشترک ذو اضعاف اقل = 18 کسروں کو مشترک نسب نما میں کرتے ہیں۔

$$= \frac{2\times 2}{9\times 2} + \frac{5\times 1}{18\times 1} + \frac{7\times 3}{6\times 3} = \frac{-4}{18} + \frac{5}{18} + \frac{21}{18}$$

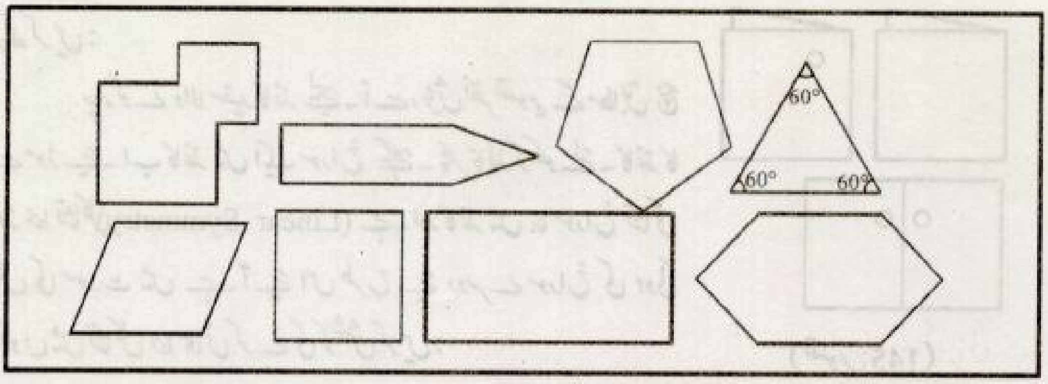
$$= \frac{-4+5+21}{18} + \frac{-4+26}{18} = \frac{22}{18} = \frac{11}{9} = 1\frac{2}{9}$$ Ans.

> **خود کر کے دیکھیے:**
>
> (i) $\frac{9}{7} - \left(\frac{-5}{14}\right)$ (ii) $\frac{5}{18} - \left(\frac{-7}{24}\right)$

12.8.3- قابل پیائش اعداد کا ضرب (Multiplication of Rational numbers)

ہم نے باب 2 میں کسر اعداد کا ضرب سیکھا تھا۔

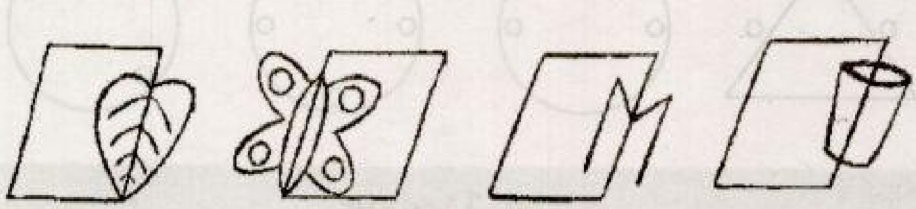
آیئے قابل پیائش عدد $\frac{-5}{7}$ اور 2 کے حاصل ضرب یعنی $\left(\frac{-5}{7}\times 2\right)$ پر غور کریں۔



(تصویر:14.2)

14.2- منعکس تشاکل

ایک ہموار آئینہ لیجئے اور اس کے سامنے مختلف اشیا کو باری باری سے رکھئے۔ آپ پائیں گے کہ اشیا کا عکس آئینہ میں بن رہا ہے۔ کچھ بننے والے عکس کا اعادہ تصویر:14.3 میں کیجئے :



(تصویر:14.3)

تصویر میں آدھا حصہ آئینہ کے سامنے ہے اور آدھا آئینہ میں دونوں کے ملنے سے شکل کی ساخت پوری ہوتی ہے۔ یہ منعکس تشاکل ہے۔ آئینہ کے عکس میں آدھا حصہ ہے اور آئینہ کا کنارا خط تشاکل (Line of Symmetary) کی صورت میں ہے۔ اس طرح خطی تشاکل کہ تصور کا آئینہ منعکس تشاکل سے بہت ہی نزدیک کا رشتہ ہے۔ آئینہ کا کنارا ہمیں ایک خط تشاکل معلوم کرنے میں مدد کرتا ہے۔

تصویر: 14.4 میں R اور P کا آئینہ پر عکس دکھایا گیا ہے۔ یہاں بناوٹ کے آئینہ کے عکس میں اُفقی بدلاؤ ہے۔ دائیں بائیں تبدیلی ہو جاتی ہے۔

(تصویر:14.4)

طریقۂ کار:

1- قابل پیائش کے اعداد کے شمار کنندہ کا ضرب کرتے ہیں۔

2- قابل پیائش کے نسب نما کا ضرب کرتے ہیں۔

3- مطلوبہ حاصل ضرب = $\dfrac{\text{شمار کنندہ کا حاصل ضرب}}{\text{نسب نما کا حاصل ضرب}}$

خود کر کے دیکھئے:

مندرجہ ذیل کا حاصل ضرب معلوم کریں:

(i) $\dfrac{-11}{7}\times 4$ (ii) $\dfrac{-4}{5}\times\dfrac{-8}{11}$

12.8.4- قابل پیائش اعداد کا تقسیم

ہم نے کسر اعداد کے ضربی معکوس (Reciprocal) کے بارے میں دیکھا ہے $\dfrac{5}{4}$ کا ضربی معکوس کیا ہے؟ یہ $\dfrac{4}{5}$ ہے۔ یہ ایسا سمجھا جاتا ہے کہ قابل پیائش اعداد کے ضربی معکوس بھی رائج ہیں۔ اس طرح $\dfrac{-5}{4}$ کا ضربی معکوس $\dfrac{4}{5}$ یا $\dfrac{-4}{5}$ ہوگا اور $\dfrac{-8}{9}$ کا ضربی معکوس $\dfrac{-9}{8}$ یا $\dfrac{9}{-8}$ ہوگا اور $\dfrac{-8}{9}$ کا ضربی معکوس $\dfrac{-9}{8}$ یا $\dfrac{9}{-8}$ ہوگا۔

آیئے مندرجہ ذیل کو دیکھیں۔ ہم جانتے ہیں کہ $4\times 5=20$

اسے دو طریقے سے تقسیم کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے: $20\div 4=5$ یا $20\div 5=4$

$\dfrac{20}{5}=4$	$\Rightarrow\dfrac{20}{4}=5$
$20\times\dfrac{1}{5}=4$	$\Rightarrow 20\times\dfrac{1}{4}=5$

مندرجہ بالا تجزیوں سے نتیجہ نکلتا ہے کہ مقسوم میں مقسوم علیہ سے تقسیم کرتے ہیں تو حاصل تقسیم حاصل ہوتا ہے اور مقسوم میں مقسوم علیہ کے ضربی معکوس سے ضرب کرتے ہیں تو بھی حاصل تقسیم کے ہی برابر عدد حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے ظاہر ہوتا ہے کہ تقسیم کا عمل ضرب کی شکل میں بدلا جا سکتا ہے۔

آیئے اسے دیکھیں: $\dfrac{-25}{14}\div\dfrac{7}{5}=\dfrac{-25}{14}\times\dfrac{5}{7}$ ($\because$ $\dfrac{5}{7}$ کا ضربی معکوس $\dfrac{7}{5}$ ہے)

Ans.

ہم نے سیکھا

اس باب میں ہم نے پیمانہ اور پرکار کی مدد سے کچھ بناوٹوں کے طریقوں کا مطالعہ کیا ہے۔

1- کسی خط کے باہر واقع کسی نقطہ سے اس خط کے متوازی خط کھینچنے کے لیے متبادل زاویوں کے تصور کا استعمال کرتے ہیں

2- مثلث کی بناوٹ میں ہم نے مثلثوں کی مماثلت کے تصور کا بالواسطہ شکل سے استعمال کیا ہے۔ تصورات حسب ذیل ہیں :

(i) SSS : مثلث کا تین اضلاع کی لمبائی دی ہوئی ہو۔

(ii) SAS : کسی دو اضلاع کی لمبائی اور ان اضلاع کے بیچ واقع زاویہ کا ناپ دیا ہوا ہو۔

(iii) ASA : دو زاویوں کی ناپ اور ان کے بیچ واقع ضلع کی لمبائی دی ہوئی ہو۔

(iv) RHS : زاویۂ قائمہ مثلث کے وتر اور باقی دو اضلاع میں سے ایک ضلع کی لمبائی دی ہوئی ہو۔

-3 حاصل ضرب معلوم کیجئے:

(i) $\frac{12}{17}\times 5$ (ii) $\frac{8}{7}\times -2$ (iii) $\frac{-5}{4}\times\frac{7}{3}$

(iv) $\frac{-25}{16}\times\frac{2}{3}$ (v) $\frac{-4}{5}\times\frac{-3}{5}$ (vi) $\frac{-15}{18}\times\frac{5}{6}\times\frac{21}{5}$

-4 درج ذیل کی قیمت معلوم کیجئے:

(i) $\frac{-5}{4}\div 2$ (ii) $\frac{-12}{9}\div\left(\frac{-2}{6}\right)$ (iii) $\frac{19}{21}\div\left(\frac{-3}{38}\right)$

(iv) $-5\div\left(\frac{-25}{7}\right)$ (v) $\frac{-27}{5}\div\left(\frac{-54}{10}\right)$ (vi) $\frac{-1}{2}\div\frac{4}{3}$

(vii) $\frac{-5}{4}\div\frac{15}{8}\div\frac{7}{16}$ (viii) $\frac{5}{16}\div\frac{-20}{32}\div\frac{4}{15}\div\frac{1}{2}$

-12.9 قابل پیائش اعداد کا اعشاریہ کی شکل میں ظاہر کرنا

-12.9.1 مختتم اعشاریہ (Terminating decimal)

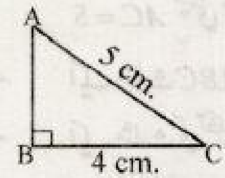
$$\begin{array}{r|l} & 0.625 \\ 8 & 50 \\ & \underline{48} \\ & 20 \\ & \underline{16} \\ & 40 \\ & \underline{40} \\ & \times\times \end{array}$$

ہم نے دیکھا کہ $\frac{p}{q}$ کی شکل کے اعداد جہاں $q \neq 0$, q اور p, q عدد صحیح ہے، قابل پیائش عدد کہلاتا ہے۔ $\frac{p}{q}$ کا معنی ہے p کا q واں حصہ یعنی $\frac{p}{q}$ وہ عدد ہے جو p کو q سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔

اس لیے $\frac{5}{8}$ قابل پیائش عدد کا مطلب ہے 5 کا 8 واں حصہ، یہ 5 کو 8 سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔

اس لیے $\frac{5}{8} = 0.625$

13.2.4- ایک زاویۂ قائمہ مثلث کی تشکیل، جس میں اس کے وتر (Hypotenuse) اور زاویۂ قائمہ بنانے والے کسی ایک ضلع کی لمبائی دی ہو۔ (RHS شرط)



مثال - 4: ایک زاویہ قائمہ ABC □ کی تشکیل کیجئے، جس میں $\angle B$ زاویہ قائمہ ہے اور زاویۂ قائمہ بنانے والے دو اضلاع میں سے ایک ضلع $BC = 4$ سینٹی میٹر اور وتر (دو ہندسہ) $AC = 5$ سینٹی میٹر ہے۔

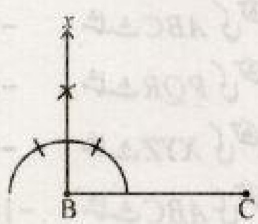
زاویہ قائمہ ABC □ کی تشکیل کے حسب ذیل مرحلے ہو سکتے ہیں:

(تصویر:13.21)

مرحلہ-1 : پہلے ہم دیئے گئے ناپوں کی ساخت پر ایک رَف (Rough) شکل بناتے ہیں۔

مرحلہ-2 : 4 سینٹی میٹر کا ایک قطعہ خط BC کھینچئے۔

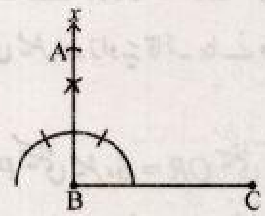
(تصویر:13.22)



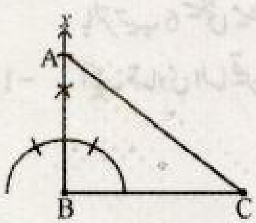
مرحلہ-3 : قطعہ خط BC کے B نقطہ پر 90° کا زاویہ بنایئے۔ زاویہ بنانے والے اس ضلع پر مثلث کا A نقطہ واقع ہوگا۔

(تصویر:13.23)

مرحلہ-4 : اب C نقطہ کو مرکز مان کر $AC = 5$ سینٹی میٹر کا ایک قوس کھینچئے۔ چونکہ A نقطہ اس قوس پر کہیں واقع ہوگا۔ یعنی یہ قوس اور زاویہ قائمہ بنانے والے خط BX منقطع نقطہ پر ہوگا۔



(تصویر:13.24)



مرحلہ-5 : نقطہ A کو نقطہ C سے ملایا۔ اس طرح مطلوبہ زاویۂ قائمہ ABC □ کی تشکیل ہوئی۔

(تصویر:13.25)

پھر بھی پوری طرح تقسیم نہیں ہو پاتا ہے۔ اسے لامحدود تک تقسیم دیتے رہیں تو بھی تقسیم کا عمل پورا نہیں ہوتا ہے۔
اس لیے اس طرح کے اعشاریہ شکل کو غیر مختتم اعشاریہ (Non-terminating Decimal) کہتے ہیں۔

قابل پیمائش عدد $\frac{17}{4}$ کا اعشاریہ شکل 4.25 ہے۔ جو کچھ ہی رقموں میں تقسیم کا عمل پورا ہو جاتا ہے۔ اسے مختتم اعشاریہ کہتے ہیں۔

خود کر کے دیکھئے:

(i) $\frac{1}{16}$ (ii) $\frac{24}{9}$ (iii) $\frac{32}{11}$ (iv) $\frac{31}{4}$ (v) $\frac{5}{8}$

12.9.3- غیر مختتم تکراری (Recurring) اعشاریہ کی شکل

(i) $\frac{1}{7}$

$$\begin{array}{r} 0.14285714... \\ 7\overline{)\;10} \\ -7 \\ \hline 30 \\ 28 \\ \hline 20 \\ 14 \\ \hline 60 \\ 56 \\ \hline 40 \\ 35 \\ \hline 50 \\ 49 \\ \hline 10 \\ 7 \\ \hline 30 \\ -28 \\ \hline 2 \end{array}$$

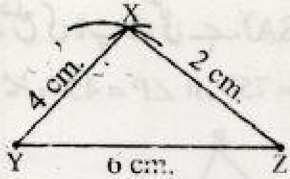
(ii) $\frac{2}{9}$

$$\begin{array}{r} 0.222... \\ 9\overline{)\;20} \\ 18 \\ \hline 20 \\ 18 \\ \hline 20 \\ 18 \\ \hline 2 \end{array}$$

اس لیے $\frac{2}{9} = 0.222...$ غیر مختتم تکراری اعشاریہ ہے۔

اس لیے $\frac{1}{7} = 0.14285714...$ غیر مختتم تکراری اعشاریہ ہے۔

مندرجہ بالا مثالوں کو دیکھنے سے پتا چلتا ہے کہ اعشاریہ کے بعد کا عدد یا مجموعہ دہرایا جاتا ہے۔ یہ عمل

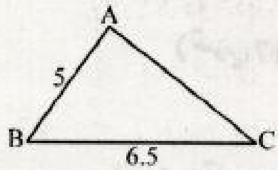


(تصویر:13.10)

مرحلہ-5 : اب نقطہ X کو بالترتیب Y اور Z سے ملائیے۔ یہ مطلوبہ مثلث XYZ ہے۔ (SSS شرط کے تحت مثلث کی تشکیل کرتے وقت ہمیں یہ ہمیشہ دھیان رکھنا ہوگا کہ کس مثلث میں دو ضلع کی لمبائی کا جمع ہمیشہ تیسرے ضلع سے زیادہ ہوتا ہے۔ نہیں تو مثلث کی تشکیل ممکن نہیں ہے۔

13.2.2- جب دو ضلع اور ان کے بیچ کے زاویہ کی ناپ معلوم ہو (SSS شرط)

مثال: 2 ایک مثلث ABC کی تشکیل کریں۔ جب $AB = 5$ سینٹی میٹر، $BC = 6.5$ سینٹی میٹر اور $\angle B = 75°$ دیا ہے۔

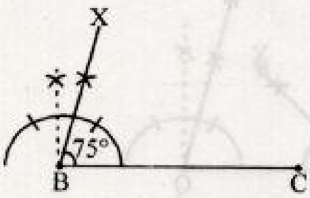


(تصویر:13.11)

حل: مرحلہ-1 : سب سے پہلے ایک رَف (Rough) شکل بنائیں گے۔

مرحلہ-2 : سب سے پہلے 6.5 سینٹی میٹر لمبائی کا ایک قطعہ خط $\bar{BC}$ کھینچئے۔

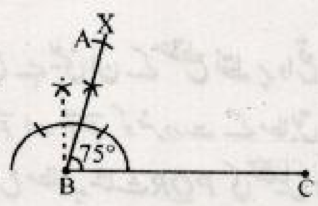
(تصویر:13.12)



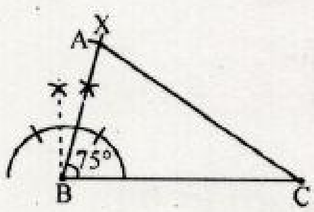
(تصویر:13.13)

مرحلہ-3 : پھر قطعہ خط کے B نقطہ پر $75°$ کا زاویہ بناتے ہیں۔ مثلث کا A نقطہ زاویہ بنانے والے اس ضلع BX پر واقع ہوگا۔

مرحلہ-4 : زاویہ بنانے والے اس ضلع پر واقع نقطہ A کا پتا لگانے کے لیے B کو مرکز مان کر $AB = 5$ سینٹی میٹر کا قوس کھینچئے۔ خط BX کو جس نقطہ پر منقطع کرتا ہے وہی نقطہ A ہے۔



(تصویر:13.14)



(تصویر:13.15)

مرحلہ-5 : نقطہ A کو نقطہ C سے ملائیے۔ اس طرح مطلوبہ مثلث ABC بنا۔

ان نسب نما کے بھی غیر مقسوم اجزائے ضربی یا تو 5 یا 2 یا دونوں ہے۔

کیا کوئی ایسا مختتم اعشاریہ عدد آپ سوچ سکتے ہیں جس کی قابل پیائش عدد (سہل شکل) میں نسب نما میں 2 یا 5 کے علاوہ اور کوئی اجزائے ضربی ہو۔

مندرجہ بالا مثالوں میں مختتم اعشاریہ کے قابل پیائش اعداد کے نسب نما کے غیر مقسوم اجزائے ضربی کو دیکھنے سے پتا چلتا ہے کہ ان کے غیر مقسوم اجزائے ضربی میں 2 یا 5 یا دونوں ہیں۔

پھر مندرجہ بالا مثالوں میں غیر مختتم اعشاریہ کی قابل پیائش اعداد کے نسب نما کے غیر مقسوم اجزائے ضربی ہیں:

$$3 = 3 \times 1$$

$$7 = 7 \times 1$$

$$6 = 2 \times 3$$

$$11 = 1 \times 11$$

$$13 = 1 \times 13$$

$$15 = 3 \times 5$$

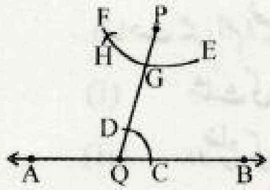
ان کے غیر منقسم اجزائے ضربی میں 2 یا 5 کے علاوہ دوسرے غیر منقسم اجزائے ضربی بھی ہیں۔

اس لیے ظاہر ہے کہ جن قابل پیائش اعداد کے نسب نما کے غیر منقسم اجزائے ضربی میں صرف 2 یا 5 یا دونوں ہو تو اس قابل پیائش عدد کا اعشاریہ شکل مختتم شکل ہوتا ہے اور جن قابل پیائش اعداد کے نسب نما کے غیر منقسم اجزائے ضربی میں 2 یا 5 کے علاوہ دوسرے اعداد بھی ہیں تو اس قابل پیائش عدد کا اعشاریہ شکل غیر مختتم اعشاریہ شکل ہوتا ہے۔

خود کر کے دیکھیے:

ذیل میں کن قابل پیائش اعداد کی اعشاریہ شکل مختتم ہیں اور کن قابل پیائش اعداد کی غیر مختتم۔
(نسب نما کے غیر مقسوم اجزائے ضربی کی بنیاد پر بتائیے)

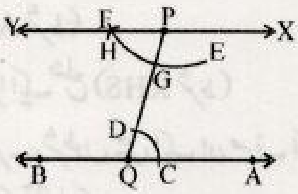
(i) $\frac{16}{125}$ (ii) $\frac{4}{15}$ (iii) $\frac{5}{18}$ (iv) $\frac{11}{8}$ (v) $\frac{4}{9}$



مراحل: 4 CD قوس کی لمبائی کے برابر ایک قوس G نقطہ کو مرکز مان کر (سلسلہ تبادلہ) میں کھینچیے جو EF قوس کو جس نقطہ پر کاٹے اسے H نام دیجیے۔

(تصویر: 13.4)

مراحل: 5 اب P اور H کو ملاتے ہوئے خط XY کھینچیے۔ (شکل 13.5) یہاں $\angle PQA =$ $\angle QPY$ جو تبادلہ زاویہ کے برابر ہوتے ہیں تو خطوط متوازی ہوتی ہے۔ اس لیے $AB \parallel XY$



(تصویر: 13.5)

خود کر کے دیکھیے:

1- تصویر: 13.5 میں P نقطہ سے گزرنے والی کچھ خطوط کو کھینچیے۔ بتایئے XY خط کے علاوہ آپ نے کیا اور کوئی خط کھینچی جو $\overline{AB}$ کے متوازی ہیں۔ اگر نہیں تو XY کے علاوہ P نقطہ سے گزرنے والے خطوط، خط $\overline{AB}$ کے لیے کیسے خطوط ہوں گے؟

2- اوپر کی تشکیل میں تبادلہ زاویہ کے علاوہ اور کون کون زاویہ بنا کر $\overline{AB}$ کے متوازی خط کھینچ سکتے ہیں۔

سوالنامہ

1- $R.\overline{MN}$ خط کے باہر واقع ایک نقطہ ہے۔ R سے گزرتے $\overline{MN}$ کے متوازی ایک دوسرا خط کھینچیے۔

2- پرکار اور اسکیل کی مدد سے $60°$ کا ایک زاویہ $\angle ABC$ بنایئے۔ زاویہ کے راس B سے ضلع AB پر 4 سینٹی میٹر دور ضلع BC کے متوازی ایک خط کھینچیے۔

3- l ایک خط کھینچیے۔ اس کے A نقطہ پر m ایک عمودی خط کھینچیے۔ پھر m پر واقع کسی B نقطہ پر ایک عمودی خط n کھینچیے۔ بتایئے، کیا خط n خط l کے متوازی ہیں۔ اگر ہاں تو کیسے؟

4- AB ایک خط کھینچیے۔ AB سے 5 سینٹی میٹر دور ایک ایسا خط CD کھینچیے جو AB کے متوازی ہو۔

13.2- مثلث کی تشکیل

مماثلت میں ہم نے پڑھا ہے کہ مثلث کے کوئی تین حصہ معلوم ہونے پر متماثل مثلث بنایا جا سکتا ہے۔ اس

آیئے ذیل کی مثال کو دیکھیں :

مثال: 14 $0.\overline{4}$ کو قابل پیائش عدد کی شکل میں لکھئے۔

حل: مانا کہ $x = 0.\overline{4}$

یا $x = 0.444.......(i)$

دونوں حصوں میں 10 سے ضرب کرنے پر

$$10x = 4.444.......(ii)$$

مساوات (ii) میں سے مساوات (i) کو گھٹانے پر

$$10x = 4.444$$
$$\underline{-x = 0.444}$$
$$9x = 4$$
$$\therefore x = \frac{4}{9}$$

اس لیے $0.\overline{4} = \frac{4}{9}$ *Ans.*

مثال: 15 $0.\overline{345}$ کو قابل پیائش عدد کی شکل میں لکھئے :

حل: مانا کہ $x = 0.\overline{345}$

یا $x = 0.345345345.......(i)$

دونوں حصوں میں 1000 سے ضرب کرنے پر

$$1000x = 345.345345345........(ii)$$

مساوات (ii) میں سے مساوات (i) کو گھٹانے پر

$$1000x = 345.345345345...$$
$$-x = 0.345345345...$$
$$999x = 345$$
$$\therefore x = \frac{345}{999}$$

طریقۂ کار: مندرجہ بالا مثالوں کے لیے ذیل کے اصول اپنائے گئے :

(a) دیئے گئے اعشاریہ عدد کو x کے برابر مانا۔

(b) اعشاریہ کے بعد جس عدد کا اعادہ ہو رہا ہے، اُسے دو یا تین بار لکھتے ہیں۔ اسے مساوات (i) کہتے ہیں۔

(c) اعادہ والے اعداد تکراری عدد کو گن کر 1 کے بعد اُتنے ہی صفر

15- ایک قابل پیائش عدد کو ایک دوسرے غیر صفر قابل پیائش عدد سے تقسیم دینے کے لیے ہم پہلے قابل پیائش عدد کو دوسرے قابل پیائش عدد کے ضربی معکوس سے ضرب کرتے ہیں۔ اس طرح سے قابل پیائش عدد کا مطلوبہ حاصل تقسیم حاصل کر لیتے ہیں۔ جیسے:

$$\frac{-15}{8} \div \frac{30}{24} = \frac{\overset{-1}{\cancel{-15}}}{\cancel{8}} \times \frac{\overset{3}{\cancel{24}}}{\underset{2}{\cancel{30}}} = \frac{-3}{2}$$

16- قابل پیائش اعداد کو اعشاریہ میں ظاہر کرنا۔

17- اعشاریہ عدد کو قابل پیائش عدد میں ظاہر کرنا۔

18- مختتم اعشاریہ اور غیر مختتم اعشاریہ کی معلومات۔

19- غیر مختتم تکراری اعشاریہ عدد کو علامتی تکراری شکل میں ظاہر کرنا جیسے ...4.23545454 کو علامتی شکل میں $2.23\overline{54}$ لکھا جاتا ہے۔

20- جس قابل پیائش عدد کے نسب نما کا غیر مقسوم اجزائے ضربی صرف 2 یا 5 ہو تو اس قابل پیائش عدد کا اعشاریہ ظاہر کرنا مختتم اعشاریہ ظاہر ہوتا ہے۔

21- جس قابل پیائش عدد کے نسب نماؤں کا غیر مقسوم اجزائے ضربی 2 یا 5 کے علاوہ دوسرے غیر مقسوم اعداد بھی ہیں تو اس قابل پیائش عدد کا اعشاریہ شکل غیر مختتم اعشاریہ میں ظاہر ہوتا ہے۔

22- منفی قابل پیائش عدد کی اعشاریہ شکل۔

23- غیر مختتم تکراری (Recurring Decimal Number) کو قابل پیائش عدد میں ظاہر کرنا (مفصل اور غیر مفصل شکل سے)۔

حل: مانا کہ $x = 0.15\overline{23}$

یا $x = 0.15232323...(i)$

دونوں حصوں میں 100 سے ضرب کرنے پر

$100x = 15.232323...(ii)$

پھر مساوات (i) میں 10000 سے ضرب کرنے پر

$10000x = 1523.232323...(iii)$

مساوات (iii) میں سے مساوات (ii) کو گھٹانے پر

$$\begin{array}{rl} 1000x = & 15232323 \\ 100x = & 15.2323 \\ \hline 9900x = & 1523-15 \end{array}$$

$$x = \frac{1523-15}{9900} = \frac{1508}{9900} = \frac{377}{2475}$$

اس لیے $0.15\overline{23} = \frac{1523-15}{.9900} = \frac{377}{2475}$

طریقہ کار:

1- سب سے پہلے دیئے گئے اعشاریہ تکراری عدد کو x مانا۔

2- اعشاریہ کے بعد تکراری عدد کو دو یا تین بار لکھتے ہیں۔ اسے مساوات (i) مانتے ہیں۔

3- اعشاریہ کے بعد آئے غیر تکراری عدد کو گن کر اتنا صفر 1 (ایک) پر ڈال کر مساوات (i) کے دونوں حصوں میں ضرب کر لکھتے ہیں، اسے مساوات (ii) مانتے ہیں۔

4- پھر اعشاریہ کے بعد آئے کل تکراری اعداد کو گن کر اتنا صفر 1 (ایک) پر ڈال کر مساوات (i) کے دونوں حصوں میں ضرب کر کے لکھتے ہیں۔ اسے مساوات (iii) مانتے ہیں۔

5- اس کے بعد مساوات (iii) میں سے مساوات (ii) کو گھٹا کر x کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔

مندرجہ بالا مثالوں سے ظاہر ہوتا ہے کہ تکراری عدد والے اعشاریہ عدد کو مختصر میں یا فوری طور پر

6- درج ذیل کو قابل پیائش عدد کی شکل میں اختصار کے ساتھ لکھئے :

(i) $5.4\overline{36}$ (ii) $12.3\overline{25}$ (iii) $9.38\overline{65}$ (iv) $0.32\overline{5}$

7- درج ذیل غیر مختتم اعشاریہ عدد کو علامت میں لکھئے :

(i) 4.3454545... (ii) 82.325555...

(iii) 0.2543543543... (iv) 2.32145145145...

8- درج ذیل اعشاریہ اعداد میں سے غیر مختتم اعشاریہ الگ کیجئے :

(i) 3.252525... (ii) 3.252525... (iii) 325.55555

سوالنامہ

1- ویسے عدد جسے $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیا جاسکے، جہاں p اور q عدد صحیح ہیں اور $q \neq 0$ ہیں۔ قابل پیائش عدد کہلاتا ہے۔ جیسے : $\sqrt{4}, \frac{-2}{9}, \frac{3}{4}, \frac{5}{2}$ وغیرہ قابل پیائش عدد ہیں۔

2- سبھی طبعی اعداد، سبھی مکمل عدد، سبھی عددِ صحیح اور سبھی کسر اعداد قابل پیائش عدد ہیں۔

3- سبھی قابل پیائش عدد کسر اعداد نہیں ہیں۔

4- کسی بھی قابل پیائش میں اوپر کے عدد کو شمار کنندہ اور نیچے کو نسب نما کہتے ہیں۔ جیسے : $\frac{-5}{8}$ میں شمار کنندہ = 5-، نسب نما = 8 ہے۔

5- اگر کسی قابل پیائش عدد کا شمار کنندہ اور نسب نما دونوں مثبت عدد صحیح ہوں یا دونوں منفی عدد صحیح ہوں تو وہ قابل پیائش عدد مثبت قابل پیائش عدد کہلاتا ہے۔

6- اگر قابل پیائش عدد کا شمار کنندہ اور نسب نما دونوں میں سے کوئی ایک منفی عدد صحیح ہو تو وہ قابل پیائش عدد منفی قابل پیائش عدد کہلاتا ہے۔ جیسے : $\frac{7}{-4}$، $\frac{-12}{5}$ وغیرہ۔

7- اگر کسی قابل پیائش عدد کے شمار کنندہ اور نسب نما کو غیر صفر (Non-Zero) عددِ صحیح سے ضرب کیا جائے یا تقسیم کیا جائے تو ہمیں ایک قابل پیائش عدد حاصل ہوتا ہے۔ جو دیئے ہوئے قابل پیائش عدد کے مساوی قابل پیائش عدد کہا جاتا ہے۔ جیسے : $\frac{-9}{5} = \frac{-9\times 2}{5\times 2} = \frac{-18}{10}$ ہے۔ اس لیے ہم کہتے ہیں کہ

سوالنامہ: 15.3

1- (i) 352 ملی میٹر (ii) 44 سینٹی میٹر
(iii) 132 سینٹی میٹر (iv) 176 سینٹی میٹر
2- (i) 24.5 میٹر (ii) 49 سینٹی میٹر
(iii) 56 سینٹی میٹر (iv) 35 میٹر
3- (i) 25.71 سینٹی میٹر (ii) 88 سینٹی میٹر (iii) 44 سینٹی میٹر
4- (i) 44 سینٹی میٹر (ii) 88 سینٹی میٹر (iii) 176 ملی میٹر
(iv) 132 سینٹی میٹر
5- 35 میٹر، 70 میٹر
6- 37.68 سینٹی میٹر
7- 3 چکر (مکمل)
8- 132 سینٹی میٹر
9- 264 میٹر، 1320 روپیہ
10- 2:3
11- 14 سینٹی میٹر، 88 سینٹی میٹر
12-
13- 15 چکر

سوالنامہ: 15.4

1- (i) 616 سینٹی میٹر^2 (ii) 1257.14 سینٹی میٹر^2
(iii) 24.64 سینٹی میٹر^2 (iv) 3850 سینٹی میٹر^2
2- (i) 26026 سینٹی میٹر^2 (ii) 5091.625 سینٹی میٹر^2
(iii) 962.5 سینٹی میٹر^2 (iv) 1386 سینٹی میٹر^2
(v) 3118.5 سینٹی میٹر^2
3- 24.5 سینٹی میٹر، 1886.5 سینٹی میٹر^2
4- 616 سینٹی میٹر^2، 168 سینٹی میٹر^2
5- 462 میٹر^2
6- 616 سینٹی میٹر^2
7- 616 میٹر^2
8- 616 میٹر^2
9- 150.72 سینٹی میٹر^2
10- 123.20 روپے
11- 98 میٹر
12- 769.3 میٹر^2
13- 28 میٹر^2
14- 9:16

باب: 16

سہ سمتی (Three Dimensional) شکلوں کا دو سمتی (Two Dimensional) میں ظاہر کرنا

16.1- تمہید:

اپنے روزمرہ کی زندگی میں اکثر ہم اپنی چاروں جانب مختلف شکلوں کی چیزوں کو دیکھتے ہیں۔ جیسے گیند، دیاسلائی کی ڈبیا، کتاب، گلاس اور مخروط وغیرہ۔ ان سبھی چیزوں میں ایک خاص بات یہ ہے کہ تمام چیزوں کی کچھ لمبائی، چوڑائی، اونچائی یا گہرائی ضرور ہوتی ہے۔

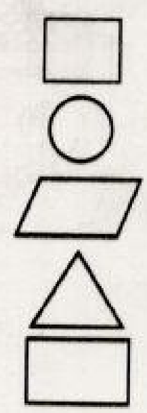
اسی وجہ سے یہ سب چیزیں جگہ گھیرتی ہیں۔ ان کے تین سمت ہوتے ہیں۔ اس لیے یہ سہ سمتی (Three Dimensional Shapes) یا 3-D کہلاتے ہیں۔

کیا آپ دو سمتی شکلوں کے بارے میں جانتے ہیں؟

اسی طرح ایک کاغذ پر کھینچے جا سکنے والے خاکوں (جن کی صرف لمبائی اور چوڑائی ہوتی ہے) کو دو سمتی شکلیں (Two Dimensional Shapes) کہتے ہیں۔ جیسے مربع، مستطیل، دائرہ، مثلث وغیرہ۔

خود کر کے دیکھیے:

دو بُعدی شکلوں کو اس کے ناموں کے ساتھ ملایئے:



(i)		(a)	مربع
(ii)		(b)	مستطیل
(iii)		(c)	دائرہ
(iv)		(d)	ذو اربعۃ الاضلاع
(v)		(e)	مثلث


وَندے ماترم

سُجلام سُفلام مَلَ یَجَ شیتلام،

شسیے۔شیام لام مَاترَم

وَندے ماَترَم!!

شُوبھر۔جیوتسنا۔پُلکِت۔یامینیم،

پھلّ۔کوسُومِت۔دُرم دَل۔شُوبھینیم

سُوہاسنیم،سومدھُر بھاشینیم،

سُوکھدَام،وَردام،مَاترَم!!

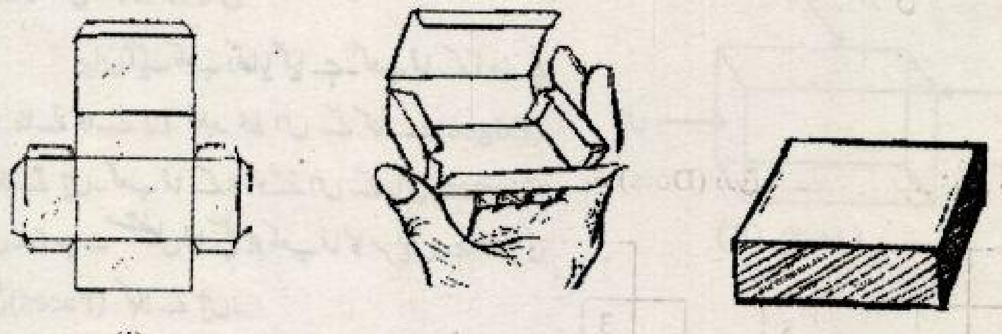
وَندے مَاترَم!!

یہاں پر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ دو سمتی شکلوں کی صورت میں سہ سمتی شکلوں کی سطح کی پہچان کی جا سکتی ہے۔ مثال کے لیے مکعب کی سطح کی شکل مربع نما ہے۔ جب کہ بیلن کی سپاٹ سطح دائرہ نما ہے۔ اب ہم یہ دیکھنے کی کوشش کریں گے کہ کس طرح کچھ 3-D شکلوں کو 2-D شکلوں کی تصویری صورت (یعنی کاغذ پر) میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔

ایسا کرنے کے لیے ہم سہ سمتی چیزوں سے خاص طور سے متعارف ہونا چاہیں گے۔ آیئے ان چیزوں کو ان سے بنانے کی کوشش کریں، جو ان کے جال (Net) کہلاتے ہیں۔

16.3- 3-D شکل بنانے کے لیے جال (Net)

ایک باکس لیجیے۔ اُس کے کچھ کناروں کو کاٹ کر سپاٹ بنا لیجیے۔ اب آپ کے پاس اس باکس کا جال ہے۔ جال 2-D میں ایک طرح کا ایسا ڈھانچہ ہوتا ہے، جسے موڑنے پر نتیجہ کے طور پر ایک 3-D شکل حاصل ہوتی ہے۔



(i) (ii) (iii)

(خاکہ:16.3)

مکعب کے جال: اس طرح ہم ایک مکعب کے جال بنانا چاہیں تو ہمیں حسب ذیل شکل حاصل ہوگی۔

	پیچھے کی سطح	
بائیں طرف کی سطح	پیندے کی سطح	دائیں طرف کی سطح
	سامنے کی سطح	
	اوپر کی سطح	

HISAB
CLASS-VII

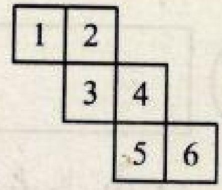
قومی ترانہ

جَن گَن مَن اَدھینایک جیہ ہے
بھارت بھاگیہ وِدھاتا !
پنجاب سندھ گجرات مراٹھا
دراوڑ اُتکل بنگ !
وِندھیہ ہماچل یمنا گنگا
اُچھل جل دھی ترنگ !
تَو شبھ نامے جاگے،
تَو شبھ آشش ماگے،
گاہے تَو جے گا تھا !
جَن گَن منگل دایک جیہ ہے
بھارت بھاگیہ وِدھاتا !
جیہ ہے، جیہ ہے، جیہ ہے،
جیہ جیہ جیہ، جیہ ہے !

सत्र- 2014-15 | हिसाब, वर्ग-7 (उर्दू) | निःशुल्क वितरण हेतु

आवरण मुद्रण – आकाशगंगा प्रेस, बिरला मन्दिर रोड, पटना–4

مثال 2: کیا یہ ڈائس کے لیے ایک جال ہو سکتا ہے؟
اپنے جواب کو واضح کیجیے۔

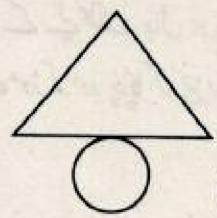


حل: نہیں، کیوں کہ ڈائس کے ایک جوڑے کے مخالف سطح 1 اور 4 ہوں گے، جن کا جمع 7 نہیں آتا ہے۔ اسی طرح مخالف سطح کے دوسرے جوڑے 3 اور 6 ہوں گے۔ جن کی بھی جمع 7 نہیں ہے۔ اس لیے یہ ڈائس کا جال نہیں ہو سکتا۔

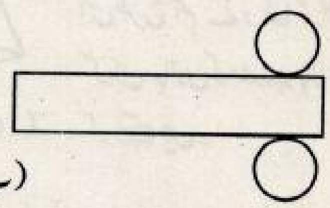
سوالنامہ 16.1:

1- اُن ٹھوس شکلوں کو پہچانیے، جن کے جال نیچے دیئے گئے ہیں:

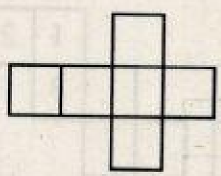
(الف)



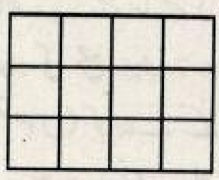
(ب)



(ج)



(د)

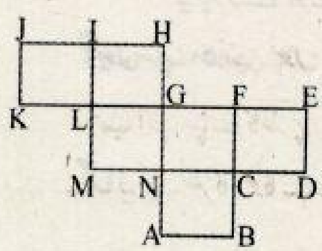


2- ڈائس کے لیے ایک جال کھینچیے اور ہر ایک پہل پر عدد لکھیے۔

3- اگر ایک مکعب بنانے کے لیے نیچے دی گئی جال کو موڑا جائے تو:

(الف) کون سا کنارہ JK سے ملے گا؟

(ب) کون سا کنارہ LM سے ملے گا؟



سوالنامہ: 15.5

1- 700 میٹر^2 2- 2100 میٹر^2

3- 1600 میٹر^2، 0.56 ہیکٹر   4- 40.96 سینٹی میٹر^2

5- 684 میٹر^2، 14022 روپیہ   6- 11900 میٹر^2، 30.81 ہیکٹر

7- (i) 280 میٹر^2 (ii) 154 میٹر^2 (iii) 50.28 میٹر^2 (لگ بھگ)

(iv) 103.72 میٹر^2 (v) 126 میٹر^2

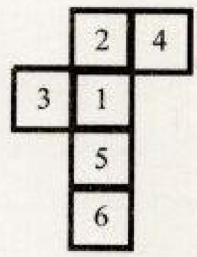
8- 162 سینٹی میٹر^2، 154 سینٹی میٹر^2

9- 414.52 روپیہ

سوالنامہ: 16.1

1- (a) بیلن   (b) ......   (c) مکعب نما   (d) مکعب

2-

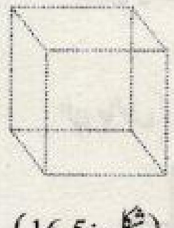


3- (a) AB   (b) LK

4- $x = 2, y = 4, z = 6$

5- (b)، (c)، (d)، (e)، (f) کی جال مکعب بناتا ہے۔

16.4.1- غیر قائمہ خاکہ Oblique Sketch



(شکل: 16.5)

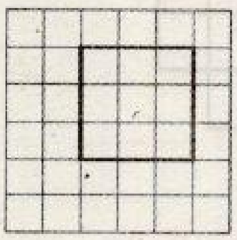
یہاں ایک مکعب کی تصویر دی گئی ہے (شکل: 16.5)۔ جب اسے سامنے سے دیکھا جائے تو اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ ایک مکعب کیسا نظر آتا ہے۔ آپ اس کی سطحوں کو دیکھ نہیں پاتے ہیں۔ کھینچی گئی اس شکل میں لمبائی برابر نہیں ہے۔ جب کہ مکعب میں یہ برابر ہونا چاہیے۔ پھر بھی آپ یہ پہچان کر لیتے ہیں کہ یہ ایک مکعب ہے۔ کسی ٹھوس کی ایسی شکل غیر قائمہ خاکہ Oblique Sketch کہلاتا ہے۔

آپ ایسی شکل کس طرح کھینچ سکتے ہیں؟

آیئے ایسی شکل کھینچنے کی تکنیک کو سیکھنے کی کوشش کریں۔

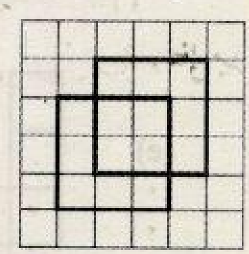
اس کے لیے آپ کو ایک مربع نما (خطی یا نقطہ نما) کاغذ کی ضرورت ہے۔ شروع میں اس طرح کے کاغذ پر شکل بنانے کی مشق کرنے کے بعد آپ بغیر ایسے کاغذ کی مدد کے سفید کاغذ پر بڑی آسانی کے ساتھ یہ شکل بنا سکتے ہیں۔

آیئے ایک 3×3×3 سائز کے مکعب (ایک ایسا مکعب جس کا ہر ایک کنارہ 3 اکائی ہے) کی ایک ترچھی شکل بنانے کی کوشش کریں۔



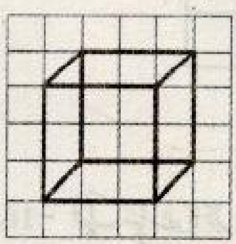
(مرحلہ: 1)

سامنے کا پہلو کھینچئے۔



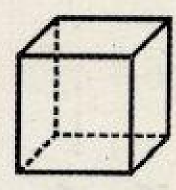
(مرحلہ: 2)

سامنے کی سطح کا مخالف سطح کھینچئے۔ سطحوں کی ناپ برابر ہونی چاہیے۔ لیکن یہ شکل مرحلہ 1 کی شکل کو ہی کچھ کھسکا کر بنایا گیا ہے۔



(مرحلہ: 3)

متعلقہ زاویوں کو ملایئے۔



(مرحلہ: 4)

چھپے ہوئے کناروں کے لیے شکل کو نقطہ والے خطوں کا استعمال کرتے ہوئے پھر بنایئے۔ (یہ ایک رواج یا طریقہ ہے) اب مطلوبہ شکل تیار ہے۔

مندرجہ بالا غیر قائمہ شکل میں کیا آپ مندرجہ ذیل باتوں کو دیکھ رہے ہیں:

(iii) $0.2\overline{543}$ (iv) $2.32\overline{145}$

سوالنامہ: 14.2

-1 (i)،(ii)،(iv) -2 دائرہ اور مربع

-3 ضروری نہیں ہے۔ -4 متوازی الاضلاع، مستطیل وغیرہ

-5 $120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ, 360^\circ$

سوالنامہ: 15.1

-1 50 سینٹی میٹر، 150 سینٹی میٹر^2، 6 روپے -2 20 میٹر

-3 56 مربع سینٹی میٹر

-4 (a) 295 مربع سینٹی میٹر (b) 134 مربع سینٹی میٹر (c) 187 مربع سینٹی میٹر

-5 56 مربع سینٹی میٹر -6 100 سینٹی میٹر -7 63.00 روپے

-8 40 میٹر مربع کا رقبہ زیادہ ہوگا۔

-9 60 سینٹی میٹر -10 1600 میٹر^2

-11 (i) 75 مربع سینٹی میٹر (ii) 6 سینٹی میٹر

سوالنامہ: 15.2

-1 160 سینٹی میٹر^2 -2 8 میٹر

-3 (i) 30000 میٹر^2 (ii) 5600 سینٹی میٹر^2

(iii) 80 سینٹی میٹر (iv) 40 سینٹی میٹر

-4 3 سینٹی میٹر -5 96 سینٹی میٹر^2

-6 (i) 750 سینٹی میٹر^2 (ii) 1200 سینٹی میٹر^2

(iii) 30 میٹر (iv) 30 میٹر

-7 (i) 72 سینٹی میٹر^2 (ii) 20 سینٹی میٹر^2

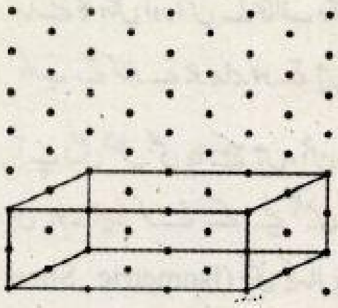
-8 10 سینٹی میٹر -9 10 سینٹی میٹر

-10 85 سینٹی میٹر^2، 20 سینٹی میٹر

-11 (i) 80 سینٹی میٹر^2 (ii) 8 سینٹی میٹر^2 (iii) 8.4 سینٹی

-12 (i) 18.0 سینٹی میٹر (ii) 9 سینٹی میٹر^2

(iii) 10 سینٹی میٹر^2 (iv) 3 سینٹی میٹر^2



(مرحلہ: 3)

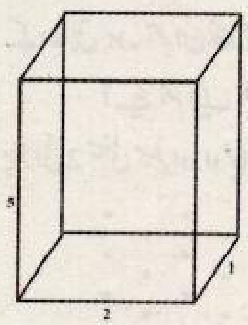
آمنے سامنے کے کناروں کو مناسب قطعہ خطوں کو ملائیے۔

(مرحلہ: 4)

یہ مکعب نما کا ایک ہم فاصلہ شکل ہے۔

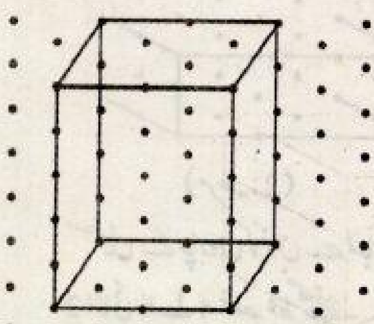
(شکل: 16.8)

دھیان دیجیے کہ ہم فاصلہ شکل میں ناپ ٹھیک (معنی میں) ٹھوس کی دی ہوئی ناپوں کے ہوتے ہیں۔ جب کہ غیر قائمہ شکل کی حالت میں ایسا نہیں ہوتا ہے۔



مثال: 3 یہاں کسی مکعب نما کی ایک غیر قائمہ شکل دی گئی ہے (شکل (i) 16.9)۔ اس شکل سے ملنے والا ایک ہم فاصلہ شکل بنائیے:

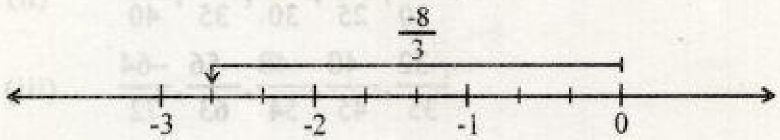
(شکل (i) 16.9)



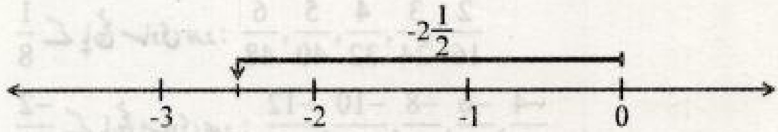
حل: اس کا حل شکل (ii) 16.9 میں شکل بنا کر ظاہر کیا گیا ہے۔ دھیان دیجیے کہ کس طرح ناپوں کے مطابق شکل بنائی گئی ہے۔

(شکل (ii) 16.9)

(iv)



(v)



-7 (i) $\frac{-3}{4}$ (ii) $\frac{-5}{2}$ (iii) $\frac{-5}{8}$ (iv) $\frac{4}{5}$ (v) $\frac{-5}{4}$

-8 (i) < (ii) > (iii) >

(iv) = (v) > (vi) =

-9 (i) $\frac{-5}{4},\frac{-1}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{4}$ (ii) $\frac{-7}{8},\frac{-5}{8},\frac{-3}{8},\frac{1}{8}$

(iii) $\frac{-5}{4},\frac{-2}{9},\frac{1}{3}$ (iv) $-2,\frac{-7}{11},\frac{-2}{15},0,\frac{7}{15}$

-10 (i) $\frac{15}{28},\frac{5}{28},\frac{-1}{28},\frac{-17}{28}$ (ii) $\frac{1}{3},\frac{-2}{3},\frac{-5}{6},\frac{4}{-3}$

(iii) $\frac{-5}{-6},\frac{1}{2},\frac{-2}{3},\frac{-3}{4}$ (iv) $\frac{1}{6},\frac{-5}{6},\frac{-8}{9},\frac{-11}{12}$

سوالنامہ:12.2

-1 (i) 5 (ii) $\frac{11}{5}$ (iii) $\frac{-16}{15}$ (iv) $\frac{-9}{4}$

(v) $\frac{-29}{76}$ (vi) $\frac{41}{24}$ (vii) $\frac{-8}{7}$ (viii) -6

-2 (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{57}{40}$ (iii) $\frac{-29}{26}$

5- مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کے لیے:

(1) ایک غیر قائمہ شکل اور (2) ایک ہم فاصلہ والی شکل بنائیے۔

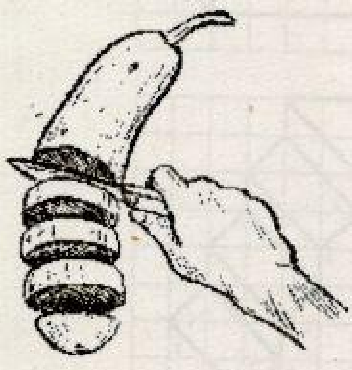
(الف) 6 سینٹی میٹر، 4 سینٹی میٹر اور 3 سینٹی میٹر سمتوں والا ایک مکعب نما

(ب) 5 سینٹی میٹر کنارا والا ایک مکعب

16.5- کسی ٹھوس کے مختلف حصوں کو دیکھنا

آیئے اب اس پر بحث کریں کہ ایک 3-D چیز کو کس طرح مختلف طریقوں سے دیکھا جا سکتا ہے۔

16.5.1 کسی چیز کو دیکھنے کا ایک طریقہ ہے اسے کاٹنا یا اس کے پتلے ٹکڑے کرنا۔



(شکل :16.11)

یہاں ایک کدو (Pumpkin) دیا ہوا ہے۔ آپ چاقو سے اس کے کچھ ٹکڑے کیجئے۔ عمودی شکل میں کاٹنے پر بہت سارے ٹکڑے حاصل ہو سکتے ہیں۔ جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

یہاں کیے گئے ٹکڑے کی ہر ایک سطح ایک دائرہ ہے۔ ہم اس سطح کو کدو کا ایک کراس سیکشن (Cross Section) کہتے ہیں۔ حقیقت میں اس حالت میں کراس سیکشن لگ بھگ ایک دائرہ ہے۔ اگر آپ کا کاٹنا یا کٹاؤ عمودی نہیں ہوگا۔ تو آپ کو ایک دوسرا کراس سیکشن حاصل ہو سکتا ہے۔ اس کے بارے میں غور کیجئے۔

باورچی خانے کا ایک کھیل:

کیا آپ نے دوسری سبزیوں کے کراس سیکشن کی بناوٹوں پر دھیان دیا ہے؟ جب انھیں باورچی خانے میں پکانے کے لیے تراشا جاتا ہے تو ان کے مختلف ٹکڑوں کو دیکھئے اور سبزیوں کے کاٹنے سے حاصل کراس سیکشن کی بناوٹوں سے متعارف ہو جایئے۔

خود کیجئے: مندرجہ ذیل ٹھوسوں کی مٹی کے ماڈل (Models) بنایئے اور ان کو عمودی شکل یا اُفقی شکل میں کاٹئے۔

-8 (i) $x = -1$ (ii) $x = -3$ (iii) $x = 1$

(iv) $x = 1$ اور $x = -3$ (v) $x = -4$

-9 (i) ماں کا قد = $80 \times 2 - 5$

(ii) $40 + 40 + x + x + x + 50 = 250$

سوالنامہ: 11.2

-1 (i) 10 (ii) $x = 6$ (iii) $x = 6$

-2 (i) $x = 2$ (ii) $x = 10$ (iii) $x = 6$ (iv) $x = -8$

-3 3 سے دونوں طرف ضرب (ii) 18

-4 (الف) (i) $x = 8$ (ii) $x = 5$ (iii) $x = \frac{5}{3}$

(iv) $l = 14$ (v) $l = 1$

(ب) (i) $a = 2$ (ii) $x = 14$ (iii) $x = 4$

سوالنامہ: 11.3

-1 -15 -2 $2\frac{1}{6}$ -3 104 -4 21

-5 $50\frac{2}{5}$ -6 8 -7 0 -8 $\frac{2}{9}$

-9 9 -10 $1\frac{1}{5}$ -11 21 -12 5

-13 6, 7, 8 -14 11,13,15 -15 $65^\circ, 65^\circ$

-16 لمبائی 27 میٹر اور چوڑائی 18 میٹر -17 75 سال -18 250 روپیہ

-19 $35^\circ, 55^\circ$ -20 18 -21 آم=45، امرود=88

-22 8 سال

سوالنامہ: 12.1

-1 (i) سے لے کر (vi) تک کا جواب خود نکالیں:

-2 (i) $\frac{-4}{8}, \frac{-5}{10}, \frac{-6}{12}, \frac{-7}{14}, \frac{-8}{16}$

خود کیجیے:

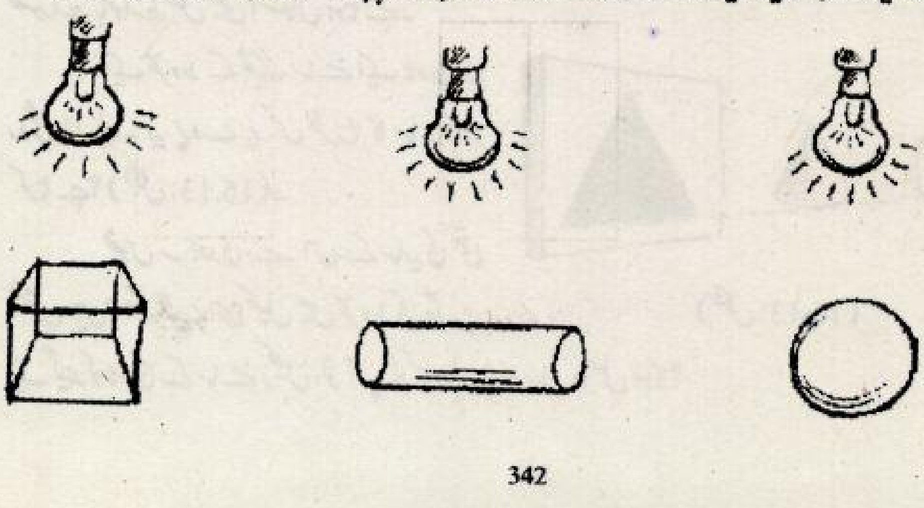
چائے کی ایک دائرہ نما پیالی کو کھلے میں سورج کی روشنی میں کسی دن مختلف اوقات میں صبح، شام اور دوپہر، شام رکھا جاتا ہے۔ سورج کی حالتوں اور تجربوں کے اوقات کے مطابق سایوں کا معائنہ کیجیے۔

صبح   دوپہر   شام

(شکل: 16.14)

سوالنامہ : 16.4

1- مندرجہ ذیل ٹھوسوں کے ٹھیک اوپر ایک جلتا ہوا بلب رکھا گیا ہے۔ ہر ایک حالت میں حاصل سایہ کی شکل کا نام بتایئے۔ اس سایہ کا ایک رَف شکل بنانے کی کوشش کیجیے۔ (پہلے استعمال کیجیے، پھر جواب دیجیے)



(c) 0 (d) $-6a^2+12b^2+13ab$

سوالنامہ: 10.1

1- (a) 5:1 (b) 4:1 (c) 17:20 (e) 75:2

2- (a) 3:4 (b) 12:7 (c) 46:3

3- (a) 7:1 (b) 1:7 (c) نہیں

4- (a) 40:1 (b) 1:40 (c) نہیں

5- (a) 9:21, 6:14 وغیرہ (b) 12:27, 8:18 وغیرہ

6- 20 7- 5 8- 15 روپیہ

9- 28 کیلوگرام 10- 5 کیلوگرام 11- 30,000 روپیہ

سوالنامہ: 10.2

1- (a) 30% (b) 40% (c) 60% (d) $62\frac{1}{2}\%$

2- (a) 45% (b) 125% (c) 320% (d) 37.5%

3- (a) $\frac{1}{4}, 0.25$ (b) $\frac{9}{50}, 0.18$ (c) $\frac{51}{400}, .1275$ (d) $\frac{3}{5}, 0.6$

4- (a) $37\frac{1}{2}\%$ (b) 60% (c) 50%

5- 80% 6- 700 روپیہ 7- 5,40,435

8- 700,315 9- 1050 روپیہ

سوالنامہ: 10.3

1- (ii) نقصان = 21 روپیہ نقصان % = 3% (iii) نفع = 24 روپیہ فیصد نفع = 8%

(iv) نقصان = 22 روپیہ نقصان فیصد = 20%

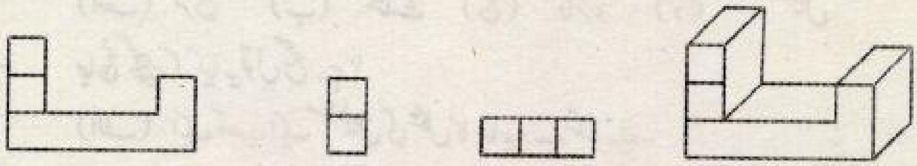
2- (ii) فروخت قیمت = 525 روپیہ نفع فیصد = 5%

(iii) فروخت قیمت = 560 روپیہ نقصان = $\frac{1}{9}\%$

(iv) فروخت قیمت = 360 روپیہ نقصان = 10%

3- (ii) خرید قیمت = 1120 روپیہ نفع = 25%

آپ انھیں مکعبوں کو جوڑنے سے بنی شکلوں کے لیے بھی کر سکتے ہیں۔



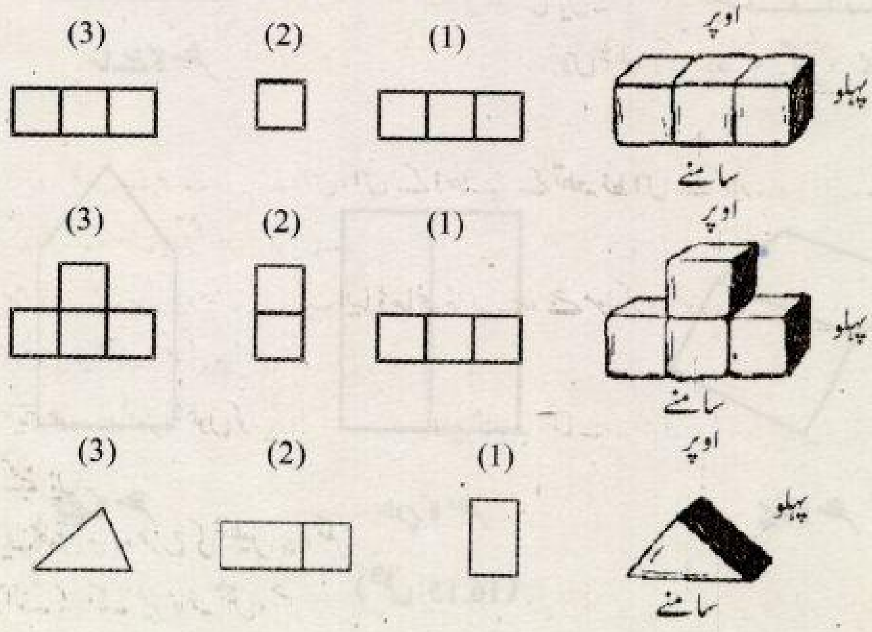
(تصویر:16.16)

مکعبوں کو ایک ساتھ رکھ کر ٹھوس بنائیے اور پھر انھیں مختلف سمتوں سے دیکھ کر ان کے اوپر دیے گئے نمونے کے مطابق شکل بنانے کی کوشش کیجیے۔

سوالنامہ : 16.5

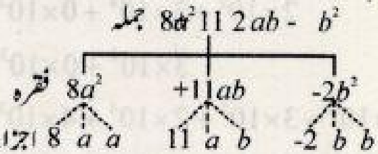
1- ہر ایک ٹھوس کے لیے تین منظر (1)، (2) اور (3) دیے گئے ہیں۔ ہر ایک ٹھوس کے لیے متعلق اوپر کے (Top)، سامنے کے (Front) اور پہلو (Side) کے مناظر کی پہچان کیجیے۔

اس کے مناظر ٹھوس



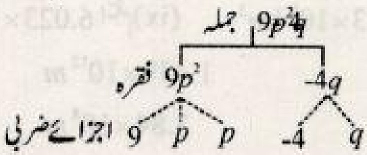
x^2 میں $2x$ جوڑ کر x^2+2x حاصل کیا گیا ہے۔ پھر x^2+2x میں 1 جوڑ کر عبارت x^2+2x+1 حاصل کیا گیا ہے۔

(b)



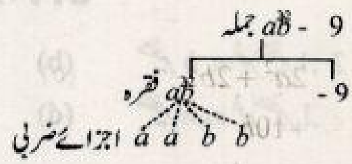
عبارت بنانے کے لیے میں خود سے ضرب کر کے a^2 حاصل کیا ہے۔ پھر a^2 میں 8 سے ضرب کر کے $8a^2$ حاصل کیا گیا ہے۔ پھر a میں b سے ضرب کر کے ab حاصل کیا گیا ہے اور ab میں 11 سے ضرب کر کے $11ab$ حاصل کیا گیا ہے۔ پھر b میں خود سے ضرب کر کے b^2 حاصل کیا گیا ہے۔ پھر 2 سے b^2 میں ضرب کر کے $2b^2$ حاصل کیا گیا ہے۔ اب $8a^2$ میں $11ab$ کو جوڑ کر $2b^2$ کو گھٹا دیا گیا ہے جس سے عبارت $8a^2+11ab-2b^2$ حاصل ہوا ہے۔

(c)



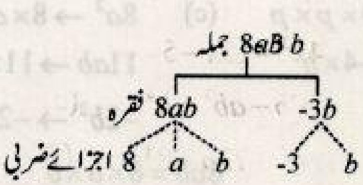
p میں خود سے ضرب کر کے p^2 حاصل کیا گیا ہے، جس سے 9 سے ضرب کر کے $9p^2$ حاصل کیا گیا ہے، پھر q میں 4 سے ضرب کر کے $4q$ حاصل کیا گیا ہے پھر $9p^2$ میں $4q$ گھٹا کر عبارت $9p^2-4q$ حاصل کیا گیا ہے۔

(d)



a میں خود سے ضرب کر کے a^2 اور b میں خود ضرب کر کے b^2 حاصل کیا گیا ہے۔ پھر a^2b^2 حاصل کیا گیا ہے۔ اس a^2b^2 میں سے 9 گھٹا کر عبارت a^2b^2-9 حاصل ہوا ہے۔

(e)



a میں b سے ضرب کر کے ab حاصل کیا گیا ہے، جس میں 8 سے ضرب کر کے $8ab$ حاصل کیا گیا ہے، پھر b میں 3 سے ضرب کر کے $3b$ حاصل کیا گیا ہے۔ آخر میں $8ab$ میں $3b$ گھٹا کر عبارت $8ab-3b$ حاصل کیا گیا ہے۔

-3 (i) 12

(ii) x کا $12xy = ...$

y کا $12x^2 = ...$

سبھی ضروری معلومات فراہم کر دیتا ہے۔

(ب) ایک ہم فاصلہ شکل کو ایک ہم فاصلہ نقطہ نما کاغذ پر کھینچا جاتا ہے۔ کسی ٹھوس کا ہم فاصلہ شکل میں لمبائیوں کو متناسب رکھا جا سکتا ہے۔

7- ٹھوس شکلوں کی تصویر کشی ایک بہت ہی فائدہ مند اہلیت ہے۔ آپ کو ٹھوس شکلوں کا چھپا ہوا حصہ دکھائی دینا چاہیے۔

8- ایک ٹھوس کے مختلف حصوں کو مختلف طریقوں سے دیکھا جا سکتا ہے۔

(الف) ایک طریقہ یہ ہے کہ دی ہوئی شکلوں کو کاٹ لیا جائے۔ اس سے ہمیں ٹھوس کا ایک کراس سیکشن حاصل ہو جاتا ہے۔

(ب) دوسرا طریقہ یہ ہے کہ ایک 3-D شکل کی ایک ٹھوس چیز کو 2-D کی صورت میں اس کا سایہ دیکھا جائے۔

(ج) تیسرا طریقہ یہ ہے کہ ٹھوس ساخت کو مختلف زاویوں سے دیکھا جائے۔

-5 (i) SAS (ii) SSS (iii) RHS -6 ہاں

-7 (i) ہاں، ASA (ii) ہاں، SAS -8 ہاں

سوالنامہ: 8.1

-1 (i) 5^4 (ii) C^3 (iii) $2^2 \times 3^3$ (iv) $6^2 \times b^2$ (v) $a^2 \times b^5 \times d$

-2 (i) 27 (ii) 1296 (iii) 729 (iv) 625 (v) 256

-3 (i) 7^3 (ii) 2^9 (iii) 3^6 (iv) 5^5

-4 (i) 3^4 (ii) 2^5 (iii) 2^8 (iv) 2^{100}

-5 (i) $2^4 \times 3 \times 5^2$ (ii) $2^4 \times 3^2 \times 5$ (iii) $2^3 \times 3^3 \times 5$
(iv) $2 \times 3^2 \times 5^3$ (v) $2^4 \times 3^2 \times 5^2$

-6 (i) 300 (ii) 441 (iii) -343 (iv) 0
(v) 648 (vi) 90000

-7 (i) -27 (ii) 8 (iii) 144 (iv) -80000 (v) 400

-8 (i) $5 \times 10^{14} > 4 \times 10^7$ (ii) $2.6 \times 10^{12} > 1.6 \times 10^8$
(iii) $2.7 \times 10^{11} < 3.0 \times 10^5$ (iv) $1.008 \times 10^{15} < 2.009 \times 10^{28}$

-9 (i) $\frac{2^3}{3^6}$ (ii) $\frac{3^4}{7^3}$ (iii) $\frac{3^5}{2^{10}}$

سوالنامہ: 8.2

-1 (i) 7^{14} (ii) 3^4 (iii) d^5 (iv) 5^{x+2} (v) 5^3
(vi) 15^5 (vii) $(ab)^4$ (viiii) 2^{13} (ix) 9^{p-3}

-2 (i) 3^2 (ii) 5^3 (iii) 5^6
(iv) 3 (v) 1 (vi) 2
(vii) $11^4 \times 13^2$ (viii) 1 یا 50° (ix) 3^{12} (x) $(5a)^2$

-3 (i) $2^7 \times 3^2$ (ii) $2^6 \times 3^4$ (iii) $2^2 \times 3^4 \times 5$

-4 (i) غلط: $10^0 = 1, (1000)^0 = 1$ (ii) غلط: $12^5 = (4 \times 3)^5 = 4^5 \times 3^5$
(iii) غلط: $2^5 = 32; 5^5 = 25$ (iv) غلط: $10 \times 10^6 \times 10^7$

-5 (i) 45 (ii) $\frac{a^2}{3}$ (iii) 1

3- (i) تقسیمی صفت (ii) ضرب کا ترتیبی تبادلہ صفت

(iii) ضرب کا (iv) ....

(v) ....

4- خود ثابت کریں۔

5- (i) -20 (ii) 45 (iii) 0

(iv) -1 (v) 50

6- خود ایک اور مثال لے کر ثابت کریں۔

7- (i) -112 (ii) 0 (iii) 368

(iv) -540 (v) 96726 (vi) 114

8-

x	0	-1	-2	-3	4	6
-2	0	2	4	6	-8	-12
-3	0	3	6	9	-12	-18
4	0	4	8	12	-16	-24
-1	0	1	2	3	-4	-6
5	0	-5	-10	-15	20	30

9- (i) صحیح (ii) غلط (iii) غلط

(iv) صحیح (v) صحیح (vi) صحیح

10- (i) 3 (ii) $5, (-4) \times (+8) = -32$

(iii) 3 (iv) $5, (+3) \times (+4) = +12$

11- $-10^{\circ}C$

12- (i) 8 (ii) 15 (iii) 0

13- (a) 1000 روپیہ نقصان (b) 10240 بوریاں (سلیٹی سیمنٹ)

14- (a) 60000 روپیہ فائدہ (b) 3000 رنگین ٹیلی ویژن

سوالنامہ: 1.3

1- (i) -8 (ii) -150 (iii) 9 (iv) 14

(v) 5 (vi) 8 (vii) 0 (viii) غیر تعریفی

(ix) 1

سوالنامہ: 4.4

-1 (i) یقینی ہے (ii) ہو بھی سکتا ہے، نہیں بھی ہو سکتا ہے
(iii) ناممکن ہے (iv) ناممکن ہے
(v) ہو بھی سکتا ہے، لیکن یقینی طور پر نہیں
(vi) ہو بھی سکتا ہے، لیکن یقینی طور پر نہیں

-2 (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{8}{8}=1$ (iii) $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ (iv) $\frac{3}{8}$

-3 $\frac{1}{2}$

سوالنامہ: 5.1

-1 (i) 60° کے زاویہ کی بناوٹ (ii) 35° کے زاویہ کی بناوٹ

-2 (i) 55° (ii) 36° (iii) 45° (iv) 12°

-3 (i) 70° (ii) 105° (iii) 45°

-4 $45^\circ, 45^\circ$

-5 زاویہ منفرجہ، کیوں کہ دونوں زاویوں کی جوڑ 180° ہوگا۔

-6 120° -7 60° ، 120° اور 60°

سوالنامہ: 5.2

-1 $\angle 2$ اور $\angle 6$ ، $\angle 1$ اور $\angle 5$ ، $\angle 4$ اور $\angle 8$ ، $\angle 3$ اور $\angle 7$

-2 $\angle 4$ اور $\angle 6$ ، $\angle 3$ اور $\angle 5$ -3 $\angle 2$ اور $\angle 8$ ، $\angle 1$ اور $\angle 7$

-4 $\angle 4$ اور $\angle 5$ ، $\angle 3$ اور $\angle 6$

-5 (i) 110° (ii) 50° (iii) 125°

-6 $x = 65^\circ, y = 65^\circ$ -7 $z = 115^\circ$ متوازی الاضلاع

-8 $\angle C = 45^\circ, \angle D = 45^\circ$ ہاں، $AB \parallel DF$ کیوں کہ $AB \parallel CE, CE \parallel DF$

-9 (i) $\angle 2 = \angle 6, \angle 1 = \angle 5, \angle 4 = \angle 8, \angle 3 = \angle 7, \angle 4 = \angle 6, \angle 3 = \angle 5,$
$\angle 1 = \angle 7, \angle 2 = \angle 8$ ،

(ii) ہاں

سوالنامہ: 2.1

-1 (i) $\frac{4}{6},\frac{6}{9},\frac{8}{12},\frac{10}{15}$ (ii) $\frac{12}{14},\frac{18}{21},\frac{24}{28},\frac{30}{35}$

(iii) $\frac{6}{34},\frac{9}{51},\frac{12}{68},\frac{15}{85}$ (سوال 1 کے دوسرے یکساں کسر ہو سکتے ہیں)۔

-2 (i) $\frac{3}{5}<\frac{4}{3}$ (ii) $\frac{6}{7}<\frac{7}{6}$

(iii) $\frac{21}{5}<\frac{18}{4}$ (iv) $\frac{7}{15}>\frac{9}{20}$

-3 (i) $\frac{2}{5}$ (ii) $4\frac{7}{8}$ (iii) $1\frac{11}{14}$

(iv) $1\frac{8}{63}$ (v) $1\frac{2}{5}$ (iv) $\frac{1}{12}$

(vii) $\frac{91}{165}$ (viii) $3\frac{3}{10}$ (ix) $3\frac{7}{10}$

(ix) $2\frac{19}{20}$

-4 ہاں

-5 (i) $\frac{1}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{3}{5}$

-6 $12\frac{1}{3}$ *mtr.*

-7 (i) $8\frac{17}{20}$ *cm.* (ii) $7\frac{5}{6}$ *cm.* مثلث کا

-8 سلیم، $\frac{1}{16}$ گھنٹہ

-9 (i) 1 (ii) $\frac{2}{5}$ (iii) 0

(iv) 2 (v) $\frac{1}{2}$

سوالنامہ: 3.2

1- (i) 2.16 (ii) 0.0864 (iii) 0
(iv) 0.0304 (v) 0.9 (vi) 0.49
(vii) 0.003 (viii) 0.03 (ix) 0.3
(x) 3 (xi) 30 (xii) 0.00000009
(xiii) 0.2 (xiv) -12.5 (xv) 6.25

2- $5.29m^2$ 3- $1.5cm^2$ 4- 2.46.75روپیہ 5- 153.3125 کیلومیٹر

سوالنامہ: 3.3

1- (i) 2.125 (ii) 0.5 (iii) 5
(iv) 0.5 (v) 0.05 (vi) 0.005
(vii) 5.5 (viii) 0.5 (ix) 40.023
(x) 4.0023 (xi) 0.04023 (xii) 175

2- (i) 18.409091 (ii) 0.0405 (iii) 5
(iv) 32 (v) 4 (vi) 0 (vii) 1

3- 10 4- 5.2 میٹر 5- 30 سکنڈ 6- 3 7- 98 گرام

سوالنامہ: 4.1

2- 3

3-

ہندسہ	......	......
1	I	1
2	II	2
3	I	1
4	III	3
5	𝍸	5
6	IIII	4
7	II	2
8	I	1
9	I	1

8- (i) 20 گھنٹہ (ii) 40 منٹ (iii) 2 دن

(vi) 600 گرام (v) 219 دن

9- $12\frac{11}{14}$ میٹر

سوالنامہ: 2.3

1- (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{2}{20}$ (iii) $\frac{5}{16}$ (iv) $\frac{12}{25}$ (v) $\frac{9}{16}$

(vi) $1\frac{7}{9}$ (vii) $2\frac{1}{7}$ (viii) $31\frac{1}{2}$ (ix) $2\frac{1}{10}$ (x) $4\frac{44}{45}$

2- (i) $\frac{3}{4}$ کا $\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{5}{8}$ کا $\frac{3}{5}$

3- 3 میٹر 4- 9 گھنٹے 5- 133 کیلومیٹر

سوالنامہ: 2.4

1- (i) 20 (ii) $14\frac{2}{5}$ (iii) $3\frac{6}{7}$

(iv) 3 (v) $1\frac{1}{8}$ (vi) $2\frac{3}{23}$

2- (i) $\frac{5}{3}$ (ii) $\frac{5}{4}$ (iii) $\frac{7}{9}$

(iv) $\frac{5}{7}$ (v) $\frac{8}{15}$ (vi) 5

(vii) 13

خاص کسر $\frac{7}{9}, \frac{5}{7}, \frac{8}{15}$

مرکب کسر $\frac{5}{4}, \frac{5}{3}$ مکمل عدد 13 ,5