कक्षा-10

उच्च गणित

उच्च गणित

दसवीं कक्षा के लिए ऐच्छिक उच्च गणित की पाठ्य-पुस्तक

(राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार द्वारा विकसित)

बिहार स्टेट टेक्स्टबुक पब्लिशिंग कॉरपोरेशन लिमिटेड, पटना

https://www.studiestoday.com

निदेशक (माध्यमिक शिक्षा), शिक्षा विभाग, बिहार सरकार द्वारा स्वीकृत।

राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार, पटना के सौजन्य से सम्पूर्ण बिहार राज्य के लिए निमित्त।

प्रथम संस्करण : 2014

मूल्य : ₹ 67.00

बिहार स्टेट टेक्स्टबुक पब्लिशिंग कॉरपोरेशन लिमिटेड, बुद्ध मार्ग, पटना - 800 001 द्वारा प्रकाशित तथा बब्लू बाईंडिंग हाउस, पटना कोल्ड स्टोरेज, पटना-800006 द्वारा 5000 प्रतियाँ मुद्रित।

प्राक्कथन

शिक्षा विभाग, बिहार सरकार के निर्णयानुसार अप्रैल 2013 से राज्य के कक्षा IX एवं X हेतु ऐच्छिक विषयों का पाठ्यक्रम लागू किया गया है। इस संदर्भ में एस०सी०ई०आर०टी०, बिहार पटना द्वारा विकसित प्रस्तुत पुस्तक निगम द्वारा आवरण चित्रण कर मुद्रित की जा रही है।

बिहार राज्य में विद्यालयीय शिक्षा के गुणवत्तापूर्ण शिक्षा के लिए माननीय मुख्यमंत्री, बिहार श्री जीतन राम मांझी, शिक्षामंत्री, श्री वृशिण पटेल एवं शिक्षा विभाग के प्रधान सचिव श्री आर०के० महाजन के मार्गदर्शन के प्रति हम हृदय से कृतज्ञ हैं।

एस०सी०ई०आर०टी०, बिहार पटना के निदेशक के भी हम आभारी हैं, जिन्होंने अपना सहयोग प्रदान किया।

बिहार राज्य पाठ्य-पुस्तक प्रकाशन निगम छात्रों, अभिभावकों, शिक्षकों, शिक्षाविदों की टिप्पणियों एवं सुझावों का सदैव स्वागत करेगा, जिससे बिहार राज्य को देश के शिक्षा जगत में उच्चतम स्थान दिलाने में हमारा प्रयास सहायक सिद्ध हो सके।

दिलीप कुमार, आई०टी०एस०
प्रबंध निदेशक
बिहार राज्य पाठ्य-पुस्तक प्रकाशन निगम लि०,

https://www.studiestoday.com

दिशा बोध

- श्री अमरजीत सिन्हा, प्रधान सचिव, शिक्षा विभाग, बिहार, पटना
- श्री राहुल सिंह, राज्य परियोजना निदेशक, बिहार माध्यमिक शिक्षा परिषद्, बिहार, पटना
- श्री हसन वारिस, निदेशक, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार, पटना
- डॉ० सैयद अब्दुल मुईन, विभागाध्यक्ष, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार, पटना
- डॉ० ज्ञानदेव मणि त्रिपाठी, सदस्य पाठ्यक्रम-सह-पाठ्यपुस्तक विकास समिति

समन्वयक

- डॉ० स्नेहाशीष दास, व्याख्याता, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद् बिहार, पटना

लेखक समूह

- डॉ० राकेश कुमार, प्राचार्य, डायट, भागलपुर
- श्री के०के० ठाकुर, अवकाश प्राप्त राज्य साधन सेवी, बिहार शिक्षा परियोजना, पटना
- श्री अलख कुमार वर्मा, शहीद राजेन्द्र प्र० सिंह उच्च माध्यमिक विद्यालय गर्दनीबाग, पटना
- श्री मनोज कुमार झा, टी०जी०टी०, उ०म०वि० नन्दनगढ़, लौरिया, पश्चिमी चम्पारण
- श्री गोविन्द प्रसाद, टी०जी०टी०, म०वि० तुलाराम घाट, चनपटिया, बेतिया
- श्री दिलीप कुमार, टी०जी०टी०, उ०म०वि० भानु बिगहा भगवपुर, हिलसा, नालन्दा
- श्री सुनील कुमार तांती, व्याख्याता, डायट नूरसराय, नालन्दा

समीक्षक

- श्री राम कृष्ण प्रसाद, सेवानिवृत प्रधानाध्यापक, पी० एल० साहु उच्च वि० सोहसराय, नालन्दा

आमुख

यह पुस्तक राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005 एवं बिहार पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2008 के आलोक में निर्मित नवीन पाठ्यक्रम के आधार पर तैयार की गई है। इस पुस्तक के निर्माण में इस बात का ध्यान रखा गया है कि "शिक्षा का मतलब बिहार के स्कूली शिक्षार्थियों को इतना सक्षम बना देना है कि वो अपने जीवन का सही-सही अर्थ समझ सकें, अपनी समस्त योग्यताओं का समुचित विकास कर सकें, अपने जीवन का मकसद तय कर सकें और उसे प्राप्त करने हेतु यथासंभव सार्थक एवं प्रभावी प्रयास कर सकें, साथ ही साथ इस बात को भी समझ सकें कि समाज के दूसरे व्यक्ति को भी ऐसा ही करने का पूर्ण अधिकार प्राप्त है।" राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005 एवं बिहार पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2008 हमें बताती है कि शिक्षार्थी के स्कूली जीवन और स्कूल से बाहर के जीवन में सामंजस्य होना चाहिए। किताब और किताब से बाहर की दुनिया आपस में गूँथी होनी चाहिए।

इस पुस्तक में शिक्षार्थियों की कल्पनाशक्ति के विकास, उनकी गतिविधियों की सृजनशीलता, उनके सवाल करने और उनका उत्तर पाने के मौलिक अधिकार के समुचित संरक्षण और उसे रचनात्मक दिशा देने की कोशिश की गई है। निश्चय ही इसमें शिक्षार्थियों के साथ-साथ शिक्षकों की भी महत्त्वपूर्ण भूमिका होती है। शिक्षार्थियों के प्रति संवेदना और सहानुभूति के साथ उन्हें पुस्तक में सक्रिय सहभागिता दिखानी होगी।

ऐच्छिक विषय की पुस्तक उच्च गणित में दी गई अवधारणाओं को स्पष्ट करने हेतु अवधारणाओं को शिक्षार्थियों के पूर्व अनुभव के साथ जोड़ते हुए विषय-सामग्री से परिचय कराया गया है। संबंधित अवधारणाओं पर आधारित क्रियाकलाप भी पुस्तक का अनिवार्य हिस्सा है। व्यावहारिक में सूचनाओं एवं गणना तथा इनके महत्त्व के कारण गणित हमारे जीवन का अनिवार्य अंग बन गया है। हम नित्य नयी-नयी एवं प्रभावी विधियों द्वारा गणित के ज्ञान को सुदृढ़ करने का प्रयास कर रहे हैं। इसलिए गणित को सभी शिक्षार्थियों के अध्ययन के लिए ऐच्छिक विषय के रूप में विशेष स्थान दिया गया है। वैसे शिक्षार्थी, जिनकी गणित में अभिरुचि अधिक है, गणित को अपने कैरियर में विशेष स्थान देना चाहते हैं, साथ ही अधिक समय देकर गणितीय गणना में अधिक कौशल हासिल करना

चाहते हैं, [illegible] का कारण बनेगा।

दशम वर्ग में शिक्षार्थियों के मस्तिष्क का इतना विकास तो हो ही जाता है कि वे उच्च गणित के विभिन्न स्तरों को समझने हेतु सक्षम बन सके। इस पुस्तक के विकास में यह कोशिश भी की गई है कि शिक्षार्थियों को गणित के बुनियादी प्रश्नों को समझने एवं हल करने में आसानी हो सके। इस पुस्तक की एक महत्त्वपूर्ण विशेषता यह है कि इसमें त्रिकोणमिति, कलन, नियामक ज्यामिति एवं बीजगणित को सरल ढंग से प्रस्तुत करने का प्रयास किया गया है। इस पुस्तक के निर्माण में बिहार स्टेट टेक्स्टबुक पब्लिशिंग कॉरपोरेशन लि0 पटना द्वारा पूर्व में प्रकाशित उच्च गणित की पाठ्यपुस्तक से भी सहयोग लिया गया है, हम उनके प्रति आभारी हैं।

इस पुस्तक का विकास निर्णयानुसार शीघ्रता में किया गया। संभव है कुछ त्रुटियाँ रह गयी हों, जिन्हें विद्वत्‌जनों के सुझाव से अगले संस्करण में सुधारने का प्रयास किया जायेगा।

हम विशेष रूप से विभागाध्यक्ष, अध्यापक शिक्षा विभाग, संकाय सदस्य, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद् तथा विद्वत्‌जनों के प्रति आभार व्यक्त करते हैं जिनके मार्गदर्शन में इस कार्य को सफलतापूर्वक सम्पन्न कराया गया। हम उन सभी कर्मचारियों को धन्यवाद देते हैं जिनकी एकनिष्ठ सक्रियता ने कार्य को सुगम बना दिया।

हसन वारिस
निदेशक
राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्,
बिहार, पटना-800006

विषय-सूची

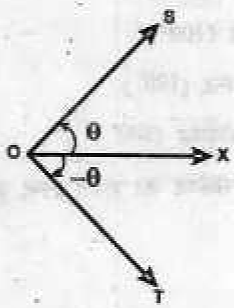
इकाई- 4 बीजगणित

त्रिकोणमिति (TRIGONOMETRY)

1.1 कोण एवं मापन पद्धति:

आप वर्ग दशम के सामान्य गणित की पुस्तक द्वारा त्रिकोणमिति से परिचित हो चुके हैं। दैनिक जीवन में त्रिकोणमिति का उपयोग त्रिकोणमितीय अनुपात को आधार मानकर गणितीय प्रश्नों के हल में किया जाता है। फलतः कोण एवं उसके मापन की विभिन्न पद्धतियों का अध्ययन सर्वप्रथम आवश्यक प्रतीत होता है।

कोण: एक ही आदि बिन्दु वाली दो किरणों के सम्मिलन को कोण कहते हैं। समतल के किसी बिन्दु पर 360° का कोण बनता है। त्रिकोणमिति में किसी भी परिमाप का कोण (धनात्मक या ऋणात्मक) संभव है।



आकृति–1

चित्र में 'O' आद्य बिन्दु एवं OX भ्रामक किरण है। यह घड़ी की सुई की प्रतिकूल दिशा (वामावर्त) में चलकर कोण $XOS=\theta$ बनाती है। इसे धनात्मक माना जाता है। निम्न रूप में इसे दर्शाते हैं-

$$\angle XOS = +\theta$$

यदि भ्रामक किरण OX घड़ी की सुई की दिशा (दक्षिणावर्त) में चलकर OT पर पहुँचती है तो बनाया गया कोण $TOX = (-\theta)$

कोण की माप की तीन प्रचलित पद्धतियाँ हैं-

https://www.studiestoday.com

(क) षट्दशांशक (अंग्रेजी पद्धति)

(ख) शतांशक (फ्रांसीसी पद्धति)

(ग) वृत्तीय (रेडियन पद्धति)

(क) षट्दशांशक पद्धति में 90° को एक समकोण के बराबर माना गया है। 1° को 60 बराबर भागों में बाँटा गया है एवं प्रत्येक भाग एक मिनट कहलाता है।

प्रत्येक मिनट को 60 बराबर भागों में बाँटा जाता है और प्रत्येक भाग एक सेकेण्ड कहलाता है।

1 समकोण $= 90^\circ$

1 डिग्री(1°) $=$60 मिनट ($60'$)

1 मिनट ($1'$)$=$ 60 सेकेण्ड($60''$)

(ख) शतांशक पद्धति में एक समकोण को 100 ग्रेड, 1 ग्रेड को 100 मिनट एवं प्रत्येक मिनट को 100 सेकेण्ड में बाँटा जाता है।

1 समकोण $=$ 100 ग्रेड (100^g)

1 ग्रेड (1^g)$=$ 100 मिनट ($100'$)

1 मिनट ($1'$)$=$ 100 सेकेण्ड ($100''$)

विभिन्न पद्धतियों में मिनट तथा सेकेण्ड का संकेत निम्न प्रकार होना चाहिए-

शतांशक में ($`$,$''$)

षट्दशांशक में ($'$,$''$)

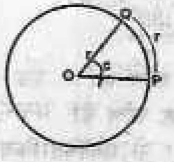
वृत्तीय पद्धति में कोण की माप का मात्रक रेडियन है।

$$1 \text{ रेडियन} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$1 \text{ रेडियन} = \frac{200}{\pi} \text{ ग्रेड}$$

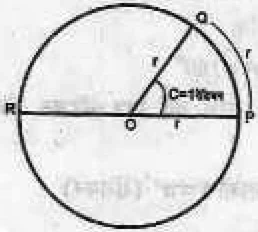
समतल पर किसी वृत्त की त्रिज्या के बराबर उस वृत्त की परिधि पर काटे गये चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण एक रेडियन के बराबर होता है।

$\angle POQ = 1$ रेडियन



आकृति-2

रेडियन अचर कोण:



आकृति-3

मान लीजिए कि PQR वृत्त का केन्द्र O है एवं त्रिज्या r है। वृत्त में चाप PQ त्रिज्या r के बराबर लिया गया। बिन्दु O से P तथा Q को मिलाया गया। OP को O की तरफ परिधि के R बिन्दु तक बढ़ाया गया है।

रेडियन की परिभाषा से $\angle POQ = 1$ रेडियन

ज्यामिति से हम जानते हैं कि "किसी वृत्त के केन्द्र पर बना कोण संगत चापों के समानुपाती होते हैं।"

$$\therefore \quad \frac{\angle POQ}{\angle POR} = \frac{\text{चाप } PQ}{\text{चाप } PQR}$$

या, $$\frac{\angle POQ}{2\text{समकोण}} = \frac{r}{\text{अर्द्धपरिधि}} = \frac{r}{\pi r}$$

या, $$\frac{\angle POQ}{2\text{समकोण}} = \frac{1}{\pi}$$

या, $$\angle POQ = \frac{2\text{समकोण}}{\pi} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$\therefore$ 1रेडियन $= \frac{180^0}{\pi}$

$\because$ 180^0एक नियत कोण एवं π एक अचर अपरिमेय संख्या है

$\therefore$ रेडियन एक अचर कोण है।

1 रेडियन को 1^c से संबोधित किया जाता है।

$$\boxed{\pi \text{ रेडियन} = \pi^c \Rightarrow \pi = 180^0}$$

रेडियन, ग्रेड एवं डिग्री में संबंध:

हम जान चुके हैं कि

$$\pi^c = 200^g = 180^0$$

मान लिया किसी कोण की माप रेडियन, ग्रेड एवं डिग्री में क्रमशःC,G,D से दर्शाया गया है।

$\because 180^0 = 2$ समकोण$= \pi^c$ (रेडियन)

या, $1^0 = \frac{\pi}{180}$ रेडियन

या, D डिग्री$= \frac{\pi \times D}{180}$ रेडियन

$\therefore \frac{\pi D}{180} = c$

या $\frac{D}{180} = \frac{C}{\pi}$ ——(1)

इसी प्रकार,

2 समकोण= 200 ग्रेड

180^0 =200 ग्रेड

$1^0 = \frac{200}{180}$ ग्रेड

$D^0 = \frac{200 \times D}{180}$ ग्रेड

$\therefore \frac{200D}{180} = G$

या, $\frac{D}{180}=\frac{G}{200}$ ———— (2)

अब (1) और (2) से

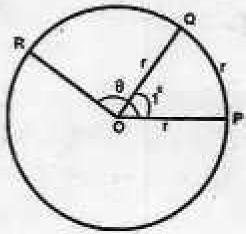
$$\therefore \frac{D}{180}=\frac{C}{\pi}=\frac{G}{200}$$

$$\frac{2D}{180}=\frac{2C}{\pi}=\frac{2G}{200}$$

$$\therefore \frac{D}{90}=\frac{2C}{\pi}=\frac{G}{100}$$

अब सिद्ध करना है कि कोण की वृत्तीय माप उस वृत्त के चाप और त्रिज्या का अनुपाती होता है।

अर्थात् $\theta=\frac{\ell}{r}$ रेडियन



मान लिया कि O केन्द्र तथा r त्रिज्या का एक वृत्त PQR है। एक चाप PR लम्बाई ℓ के बराबर लिया गया। चाप ℓ द्वारा केन्द्र पर बना कोण POR$=\theta$ (माना)

रेडियन की परिभाषा से, $\angle POQ=1^c$

ज्यामिति से,

वृत्त के केन्द्र पर का कोण संगत चापों का समानुपाती होता है।

$$\therefore \quad \frac{\angle POQ}{\angle POR}=\frac{\text{चाप } PQ}{\text{चाप } PQR}$$

$$\frac{1^c}{\theta}=\frac{r}{l}$$

या, $\quad r\theta=l^c$

$$\therefore \quad q = \left(\frac{l}{r}\right)^c$$

$$\text{वृत्त के केन्द्र पर कोण} = \frac{\text{संगत चाप की लम्बाई}}{\text{संबंधित वृत्त की त्रिज्या}}$$

सावधानी:

$q = \left(\frac{l}{r}\right)^c$, का प्रयोग करने में यह ध्यान रखना अनिवार्य है कि θ रेडियन माप में हो। डिग्री (अंश) θ रहने पर रेडियन में बदल लेना अनिवार्य होगा।

π **की परिभाषा:** - किसी वृत्त की परिधि तथा इसके व्यास का अनुपात सभी वृत्त के लिए एक समान होता है। इसी अचर राशि का मान ग्रीक (यूनानी) अक्षर π (पाई) द्वारा उच्चरित है।

साधित प्रश्न: -

1. 80° को रेडियन में बदलें -

हल:-

$\because 180^0 = \pi$ रेडियन

$$\therefore 1^0 = \frac{\pi^c}{180}$$

$$\therefore 80^0 = \frac{\pi \times \overset{4}{\cancel{80}}}{\underset{9}{\cancel{180}}} = \frac{4\pi^c}{9} = \frac{4\pi}{9} \text{ रेडियन}$$

2. 300 ग्रेड को रेडियन में बदलें-

हल: $\because 200$ ग्रेड $= \pi$ रेडियन

$$\therefore 1^g = \frac{\pi^c}{200}$$

$$\therefore 300^g = \left(\frac{\pi}{200} \times 300\right)^c = \frac{3\pi^c}{2}$$

3. यदि किसी कोण की माप डिग्री एवं ग्रेड में क्रमश:D एवं G हो तो दिखायें कि $\frac{G+D}{G-D}=19$

हल:-

सूत्र से-

$$\frac{G}{200}=\frac{D}{180}$$

या, $$\frac{G}{D}=\frac{200}{180}$$

या, $$\frac{G}{D}=\frac{10}{9}$$

योगान्तर निष्पत्ति से,

$$\frac{G+D}{G-D}=\frac{10+9}{10-9}=\frac{19}{1}=19$$

प्रश्नावली-1

. रेडियन मे बदलें-

(i) 45° (ii) $67^\circ30'$ (iii) $2^g4'4.5''$

. शतांशक पद्धति में बदलें-

(i) 45° (ii) $50^\circ37'57''$ (iii) 2π रेडियन

. षटदशांशक पद्धति मे बदले।

(i) 40^g (ii) $56^g87'50''$ (iii) $\frac{\pi}{9}$ रेडियन

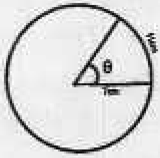
. सुबह के ठीक 5 बजे घड़ी के दोनों सूइयों के बीच जो कोण बनता है उसे रेडियन में बदलें।

. किसी समषट्भुज के एक अंत: कोण का मान रेडियन में ज्ञात कीजिए।

. एक समबहुभुज का एक बहिष् कोण $\frac{\pi}{4}$ रेडियन है, तो भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

साधित प्रश्न

1. 7 सेमी त्रिज्या के वृत्त के केन्द्र पर 11 सेमी लम्बाई के चाप द्वारा बने कोण की माप डिग्री में ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$)



आकृति-5

हल:- $\theta = \frac{l}{r}$ रेडियन

$\theta = \frac{11}{7}$ रेडियन $= \frac{11}{7} \times \frac{180^\circ}{\pi}$

$\theta = \frac{11}{7} \times \frac{180^\circ}{22} = 90^\circ$

प्रश्नावली-2

1. एक वृत्त की त्रिज्या 7 मी0 है, उसके एक चाप से बना हुआ केन्द्र पर का कोण रेडियन माप में $\frac{3}{7}$ है, तो चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

2. किसी वृत्त का 75° का चाप दूसरे वृत्त के 60° के चाप के बराबर है, तो दोनों वृत्तों की त्रिज्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।

1.2 कोण की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ

धन और ऋण रेखाखण्ड:

आकृति-6

यहाँ दो लम्बवत सरल रेखाएँ XX' और YY' एक दूसरे को O पर प्रतिच्छेद करती हैं।

क्षैतिज रेखा XOX' तथा उदग्र रेखा YOY' क्रमशः X –अक्ष और Y –अक्ष एवं O को मूल बिन्दु कहते हैं।

(i) क्षैतिज रेखा खण्ड की लम्बाई YY' की दाईं ओर है धनात्मक,

(ii) क्षैतिज रेखा खण्ड की लम्बाई जो YY' की बाईं ओर है ऋणात्मक,

(iii) उदग्र रेखा खण्ड की लम्बाई जो XX' के ऊपर है धनात्मक,

(iv) उदग्र रेखा खण्ड की लम्बाई जो XX' के नीचे है, ऋणात्मक मानी जाती है।

त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों के मानों की सीमाएँ:-

(i) $\sin\theta$ और $\cos\theta$ का मान (+) से (–) के बीच होता है।

(ii) $\tan\theta$ तथा $\cot\theta$ का मान $(-\infty)$ से $(+\infty)$ के बीच होता है।

(iii) $\sec\theta$ तथा $\operatorname{cosec}\theta$ का मान $(-\infty)$ से (-1) तक तथा $(+1)$ से $(+\infty)$ के बीच होता है।

(iv) $\sec\theta$ तथा $\operatorname{cosec}\theta$ का मान (-1) तथा $(+1)$ के बीच नहीं होगा।

उदाहरण:-

1. निम्नलिखित त्रिज्यक रेखाखण्ड किस पाद में होगा?

(i) 30^0 (ii) 130^0 (iii) 230^0 (iv) -200^0

(v) -500^0 (vi) -1240^0 (vii) 1240^0

हल:-

(i) प्रथम पाद

(ii) द्वितीय पाद

(iii) तृतीय पाद

(iv) द्वितीय पाद

(v) $-500=-2\times 360^0+220=220^0$ (तृतीय पाद)

(vi) $-1240^0=-4\times 360^0+200^0=200^0$ (तृतीय पाद)

(vii) $-1240^0=3\times 360^0+160^0=160^0$ (द्वितीय पाद)

सूत्र

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(-\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(-\theta)=-\tan\theta$$

$90^\circ\mp\theta, 180^\circ\mp\theta, 270^\circ\mp\theta, 360^\circ\mp\theta$

त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ छह है-

sin
cos
tan
cot
sec
cosec

त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों $90^\circ\mp\theta$ या $270^\circ\mp\theta$ के साथ संलग्न रहने पर निम्न प्रकार का सूत्र प्राप्त होता है।

जैसे-sin,tan,cot रहने पर क्रमशः cos,cot,tan के समान तथा निष्पति एवं कोण समान एक ही पाद मे रहने पर धनात्मक मान भिन्न पाद मे रहने पर ऋणात्मक मान होगा। यथा $\sin(90^\circ+\theta)$ में sin तथा $90^\circ+\theta$ दोनों द्वितीय पाद में है अतः $\cos\theta$ के बराबर होगा और धनात्मक होगा।

पुनः sin $(270^\circ-\theta)$ में sin द्वितीय $270^\circ-\theta$ तृतीय पाद में रहने के कारण ऋणात्मक मान $\cos\theta$ के बराबर होगा।

अर्थात् $\sin(270^\circ-\theta)=-\cos\theta$

इसी प्रकार $180^\circ\mp\theta, 360^\circ\mp\theta$ के लिए जो निष्पति संलग्न होगा वही निष्पति के

बराबर होगा परन्तु चिह्न धनात्मक ऋणात्मक दोनों के पाद क्रमशः समान असमान होने पर निर्भर करेगा। जैसे- $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$

यहाँ cos चतुर्थ एवं $180^\circ - \theta$ द्वितीय पाद में है। दोनों का पाद भिन्न है। इसलिए ऋणात्मक में समान निष्पत्ति $-\cos\theta$ लिखा गया है।

उपर्युक्त सूत्र को सिद्ध करने की विधि ऊपर के कक्षा में मिलेगी।

सारणी

निष्पत्ति	$270^\circ - \theta$	$270^\circ + \theta$	$360^\circ - \theta$	$360^\circ + \theta$	$n \times 360^\circ + \theta$	$n \times 360^\circ - \theta$
sin	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$+\sin\theta$	$+\sin\theta$	$-\sin\theta$
cos	$-\sin\theta$	$+\sin\theta$	$+\cos\theta$	$+\cos\theta$	$+\cos\theta$	$+\cos\theta$
tan	$+\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$+\tan\theta$	$+\tan\theta$	$-\tan\theta$
cot	$+\tan\theta$	$-\tan\theta$	$-\cot\theta$	$+\cot\theta$	$+\cot\theta$	$-\cot\theta$
sec	$-\operatorname{cosec}\theta$	$+\operatorname{cosec}\theta$	$+\sec\theta$	$+\sec\theta$	$+\sec\theta$	$+\sec\theta$
cosec	$-\sec\theta$	$-\sec\theta$	$-\operatorname{cosec}\theta$	$+\operatorname{cosec}\theta$	$+\operatorname{cosec}\theta$	$-\operatorname{cosec}\theta$

उदाहरण 1: $\cos(-585^\circ)$ का मान ज्ञात कीजिए।

$\cos(-585^\circ)$

$= \cos 585^\circ$

$= \cos(360^\circ + 225^\circ)$ $\{\cos(360^\circ + \theta) = \cos\theta\}$

$= \cos 225^\circ$ $\{\because \cos(-\theta) = \cos\theta\}$

$= \cos(180^\circ + 45^\circ)$

$= -\cos 45^\circ$

$= -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

उदाहरण 2.

यदि $\alpha = 2220^\circ$ तो $\sin\alpha - \cos\alpha$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:.

$\sin\alpha = 2220^\circ$

$= \sin(360^\circ \times 6 + 60^\circ)$

$$= \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\alpha = \cos 2220^\circ = \cos\{360^\circ \times 6 + 60^\circ\}$$

$$= \cos 60^0$$

$$= \frac{1}{2}$$

प्रश्न से,

$$\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{1.732-1}{2}$$

$$= \frac{.732}{2} = .366$$

उदाहरण 3:

किसी त्रिभुज ABC में सिद्ध कीजिए कि –

$$\cos\frac{B-C}{2} = \sin\frac{A+2B}{2} = \sin\frac{A+2C}{2}$$

हल:- किसी त्रिभुज ABC में,

$$A+B+C=180^0$$

$$\cos\frac{B-C}{2} = \cos\frac{B-(180^0-A-B)}{2} = \cos\frac{180^0+A+B+B}{2}$$

$$= \cos -\left\{\frac{180^0-(A+2B)}{2}\right\} = \cos\left\{\frac{180^0-(A+2B)}{2}\right\}$$

$$= \cos\left\{90^0 - \frac{(A+2B)}{2}\right\} = \sin\frac{A+2B}{2}$$

पुन: $$\cos\frac{B-C}{2} = \cos\frac{A+B+C-A-2C}{2}$$

$$= \cos\frac{-180^0-(A+2C)}{2}$$

$$= \cos\left\{90^0 - \frac{A+2C}{2}\right\}$$

$$= \sin\frac{A+2C}{2} \quad \text{...(ii)}$$

(i) और (ii) से

$$\cos\frac{B-C}{2}=\sin\frac{A+2B}{2}=\sin\frac{A+2C}{2}$$

उदाहरण 4: किसी चतुर्भुज $ABCD$ में सिद्ध कीजिए कि-

$\sin(A+B)+\sin(C+D)=0$

हल:- किसी चतुर्भुज के चारों अन्तः कोणों का योग 360^0 होता है।

$\therefore A+B+C+D=360^0$

या, $A+B=360^0-(C+D)$

$\therefore \sin(A+B)+\sin(C+D)$

$=\sin\{360^0-(C+D)\}+\sin(C+D)$

$=-\sin(C+D)+\sin(C+D)=0$

प्रश्नावली-3

1. बताइये कि निम्नलिखित कोण की तल में स्थिति कहाँ होगी?

   (i) 30^0 (ii) -30^0 (iii) 90^0 (iv) -90^0 (v) 180^0 (vi) -1090^0
   (vii) 1090^0 (viii) 120^0 (ix) -120^0 (x) 4420^0 (xi) -4420^0

2. निम्नलिखित के मान निकालिए:

   (i) $2\cos^2 45^\circ+\sin 30^\circ+\frac{1}{2}\cos 0^\circ-\tan 45^\circ$

   (ii) $\sin 120^\circ+\cos 150^\circ+\tan^2 120^\circ+\tan^2 135^\circ+\cos 180^\circ$

   (iii) $\sin^2 135^0+\cos^2 120^0-\sin^2 120^0+\tan^2 150^0$

   (iv) $\sin 112^0+\cos 74^0-\sin 68^0+\cos 106^0$

   (v) $\sin 420^0.\cos 390^0+\cos(-300^0).\sin(-330^0)$

   (vi) $\cos 570^0.\sin 510^0-\sin 330^0.\cos 390^0$

   (vii) $\tan 225^0.\cot 405^0+\tan 765^0.\cos 675^0$

   (viii) $\cot A+\tan(180^0+A)+\tan(90^0+A)+\tan(360^0-A)$

   (ix) $\cos A+\sin(270^0+A)+\sin(270^0-A)+\cos(180^0+A)$

3.(A) निम्नलिखित त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को 45^0 से कम के धनात्मक कोण की निष्पत्तियों के पदों में व्यक्त कीजिए:

   (i) $\cos 1410^0$ (ii) $\sin 843^0$ (iii) $\cos(-928^0)$ (iv) $\tan(-240^0)$

([illegible]) [illegible] (vi) [illegible] (vii) [illegible] (viii) $\sin 470^\circ$

(ix) $\cot(-710^\circ)$ (x) $\operatorname{cosec}1470^\circ$ (xi) $\sec(-1150^\circ)$ (xii) $\tan 500^\circ$

(xiii) $\cot 850^\circ$ (xiv) $\sin(-1332^\circ)$ (xv) $\operatorname{cosec}(-960^\circ)$ (xvi) $\tan 1760^\circ$

3.(B) θ के निम्नलिखित मान के लिए $\sin\theta - \cos\theta$ का चिह्न बताइये:

(i) -457° (ii) 825° (iii) -634°

3.(C) θ के निम्नलिखित मान के लिए $\sin\theta + \cos\theta$ का चिह्न बताइये:

(i) 278° (ii) -356° (iii) 140°

4. सिद्ध कीजिए कि

(i) $\tan x + \tan(-y) - \tan(180^\circ - y) = \tan x$

(ii) $\tan(180^\circ - A) + \tan(180^\circ + A) + \sin(-A) = \sin(180^\circ + A)$

(iii) $\dfrac{\sin(360^\circ - \theta) + \cos(-\theta)}{\tan(-\theta) - \cot(360^\circ - \theta)} = \dfrac{\sin(90^\circ + \theta) + \cos(270^\circ - \theta)}{\cot(180^\circ + \theta) + \tan(-\theta)}$

(iv) $\sin(180^\circ + A).\cos(90^\circ + A) - \cos(180^\circ + A).\sin(90^\circ + A) = 1$

(v) $\cos(90^\circ + A).\cos(180^\circ - A) + \sin(90^\circ + A).\sin(180^\circ + A) = 0$

(vi) $\dfrac{\sin(270^\circ - \theta)\cos(90^\circ + \theta)}{\tan(90^\circ + \theta)} - \dfrac{\sin(270^\circ - \theta)}{\sec(180^\circ + \theta)} = -1$

(vii) $\dfrac{\cos\theta}{\sin(90^\circ + \theta)} + \dfrac{\sin(-\theta)}{\sin(180^\circ + \theta)} - \dfrac{\tan(90^\circ + \theta)}{\cot\theta} = 3$

(viii) $\dfrac{\cos(90^\circ + \theta).\sec(-\theta).\tan(180^\circ - \theta)}{\sec(360^\circ - \theta).\sin(180^\circ + \theta).\cot(90^\circ - \theta)} = -1$

(ix) $\dfrac{\tan(90^\circ + \theta).\sin(180 + \theta).\sin(270^\circ + \theta)}{\cos(270^\circ - \theta).\cos(180^\circ - \theta).\cot(360^\circ - \theta)} = 1$

(x) $\dfrac{\cos^2(180^\circ - \theta)}{\sin(-\theta)} + \dfrac{\cos^2(270^\circ + \theta)}{\sin(180^\circ + \theta)} = -\operatorname{cosec}\theta$

(xi) $\dfrac{\cos(180^\circ - \theta)}{\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta)} - \dfrac{\sin^2(360^\circ - \theta)}{\cos(270^\circ - \theta)} = -1$

5. यदि A,B,C किसी त्रिभुज के तीनों कोण हैं, तो सिद्ध कीजिए कि-

(i) $\cos C + \cos(A + B) = 0$

(ii) $\tan A + \tan(B + C) = 0$

(iii) $\cos\frac{A+B}{2}-\sin\frac{C}{2}=0$

6. यदि ABCD चक्रीय चतुर्भुज हो, तो सिद्ध कीजिए कि-

(i) $\sin(A+B)+\sin(C+D)=0$

(ii) $\cos\frac{A+C}{2}-\cos\frac{B+D}{2}=0$

(iii) $\sin\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C+D}{2}$

7. चक्रीय चतुर्भुज ABCD में सिद्ध कीजिए कि-

(i) $\cos A+\cos B+\cos C+\cos D=0$

(ii) $\sin A+\sin B-\sin C-\sin D=0$

8. मान निकालिए-

(i) $\frac{\cos 150^{\circ}.\tan 300^{\circ}}{\cot 225^{\circ}+\sin(-30^{\circ})}$

(ii) $\sec\left(\frac{7\pi}{6}\right).\cot\left(\frac{14\pi}{3}\right)+\tan\left(\frac{-11\pi}{6}\right).\operatorname{cosec}\left(\frac{-4\pi}{3}\right)$

(iii) $\tan\frac{11\pi}{3}-2\sin\frac{4\pi}{6}-\frac{3}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{6}+4\cos^2\frac{17\pi}{6}$

9. सरल कीजिए-

(i) $\frac{\sin(180^{\circ}-\theta).\cos(180^{\circ}-\theta).\tan\theta}{\cos(90^{\circ}-\theta).\cot(180^{\circ}-\theta).\cot\theta}$

(ii) $\frac{\cos(-\theta).\cos(90^{\circ}+\theta).\sec\theta}{\tan(180^{\circ}-\theta).\cot(180^{\circ}+\theta).\cos(90^{\circ}-\theta)}$

10. सिद्ध कीजिए कि-

(i) $\cot\frac{\pi}{20}.\cot\frac{3\pi}{20}.\cot\frac{5\pi}{20}.\cot\frac{7\pi}{20}.\cot\frac{9\pi}{20}=1$

(ii) $\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}=2$

(iii) $\sin\{(2n+1)\pi-\theta\}=\sin\theta$

(iv) $\cos(n\pi + \theta) = (-1)^n \cos\theta$ (जहाँ n कोई पूर्णांक है)

[संकेत $(-1)^n = 1$ जहाँ n समपूर्णांक या शून्य है $(-1)^n = -1$ जहाँ n विषम पूर्णांक हो]

1.3 संयुक्त कोण

प्रस्तावना:- इस अध्याय में दो या दो से अधिक कोणों के बीजगणितीय योग से बने कोणों के फलन का अध्ययन किया जायगा।

दो या दो से अधिक कोणों के बीजगणितीय योग से बने कोण को संयुक्त कोण कहते हैं।

इस प्रकार $A \pm B, A+B+C, A+B-C$ आदि संयुक्त कोण हैं। दो कोणों के योग के sine , cosine और *tangent* का मान ज्ञात करना

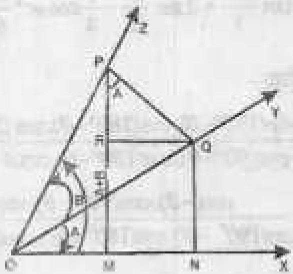
$(A+B) < 90^\circ$, तो सिद्ध कीजिए कि-

(i) $\sin(A+B) = \sin A.\cos B + \cos A.\sin B$

(ii) $\cos(A+B) = \cos A.\cos B - \sin A.\sin B$

(iii) $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A.\tan B}$

हल:-



आकृति-7

माना कि OX एक घूमक किरण धनात्मक दिशा में चलकर OY पर पहुँचती है और ∠XOY=A बनाती है, पुनः उसी दिशा में चलकर OZ पर पहुँचती है जहाँ ∠ YOZ=B बनाती है।

∴ ∠XOZ=A+B (जहाँ $A+B < 90^\circ$)

किरण OZ पर कोई बिन्दु P लिया। P से OX और OY पर क्रमशः PM और PQ लम्ब खींचा। पुनः Q से OX पर QN तथा PM पर QR लम्ब खींचा।

इस प्रकार RQNM एक आयत है।

$\angle$ XOY= $\angle$ OQR=A (एकान्तर कोण)

$\angle$ $QPR = 90^0 - \angle$PQR=A

अब $\Delta\, POM$ में

$$\sin(A+B) = \sin POM = \frac{MR+RP}{OP} = \frac{NQ+RP}{OP}$$

$$= \frac{NQ}{OP} + \frac{RP}{OP} = \frac{NQ}{OQ}.\frac{OQ}{OP} + \frac{RP}{PQ}.\frac{PQ}{OP}$$

या, $\sin(A+B) = \sin A.\cos B + \cos A.\sin B$

इसी प्रकार

$$\cos(A+B) = \frac{OM}{OP} = \frac{ON-MN}{OP} = \frac{ON-RQ}{OP} = \frac{ON}{OP} - \frac{RQ}{OP}$$

$$= \frac{ON}{OQ} \times \frac{OQ}{OP} - \frac{RQ}{PQ} \times \frac{PQ}{OP}$$

या, $\cos(A+B) = \cos A.\cos B - \sin A.\sin B$

पुनः $\tan(A+B) = \dfrac{PM}{OM} = \dfrac{MR+RP}{ON-MN} = \dfrac{NQ+RP}{ON-RQ} = \dfrac{\frac{NQ}{ON} + \frac{RP}{ON}}{\frac{ON}{ON} - \frac{RQ}{ON}}$

$$= \frac{\frac{NQ}{ON} + \frac{RP}{ON}}{1 - \frac{RQ}{ON}}$$

$$= \frac{\frac{NQ}{ON} + \frac{RP}{ON}}{1 - \frac{RQ}{RP} \times \frac{RP}{ON}} = \frac{\tan A + \frac{RP}{ON}}{1 - \tan A \times \frac{RP}{ON}}$$

[$\because \Delta PRQ \sim \Delta ONQ (A-A-A$ शर्त से सदृश्य)

$\frac{PQ}{ON} = \frac{PQ}{OQ} = \tan B$, या, $\frac{PQ}{ON} = \tan B$]

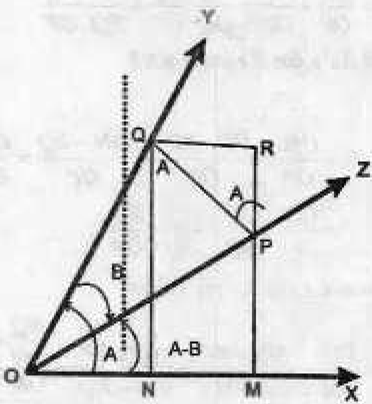
$$\therefore \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A.\tan B}$$

सिद्ध कीजिए कि-

$$\sin(A-B) = \sin A.\cos B - \cos A.\sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A.\cos B + \sin A.\sin B$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A.\tan B}$$ जहाँ $O < B < A \angle 90°$



आकृति-8

हल:- माना कि OX भ्रामक किरण घड़ी की सुई की विपरीत दिशा में चलकर OY पर पहुँचती है जहाँ $\angle XOY = A$ बनाती है। पुनः OY से घड़ी की सुई की दिशा में चलकर OZ पर पहुँचती है जहाँ $\angle YOZ = B$ बनाती है।

$$\therefore \angle XOZ = A - B$$

OZ पर P बिन्दु लिया। P से OX पर PM तथा OY पर PQ लम्ब खींचा। पुनः PM को R तक बढ़ाया। अब Q से OX पर QN तथा PM पर QR लम्ब खींचा।

इस प्रकार QRMN एक आयत है।

$\angle XOY = \angle RQY = A$ (संगत कोण)

$\therefore \angle RPQ = 90^\circ - \angle RQP = 90^\circ - (90^\circ - A) = 90^\circ - 90^\circ + A = A$

अब, $\sin(A-B) = \sin POM = \frac{MP}{OP} = \frac{MR-PR}{OP} = \frac{NQ-PR}{OP} (\because MR = NQ).$

$$= \frac{NQ}{OP} - \frac{PR}{OP}$$

$$\frac{NQ}{OQ} \times \frac{OQ}{OP} - \frac{PR}{PQ} \times \frac{PQ}{OP}$$

$$= \sin A.\cos B - \cos A.\sin B.$$

पुनः $\cos(A-B) = \cos P\hat{O}M = \frac{OM}{OP} = \frac{ON+NM}{OP} = \frac{ON+QR}{OP} (\tilde{N}M - QR$

$$= \frac{ON}{OP} + \frac{QR}{OP}$$

$$= \frac{ON}{OQ} \times \frac{OQ}{OP} + \frac{QR}{PQ} \times \frac{PQ}{OP}$$

$$= \cos A.\cos B + \sin A.\sin B.$$

पुनः $\tan(A-B) \tan P\hat{O}M = \frac{PM}{OM} = \frac{MR-PR}{ON+NM} = \frac{NQ-PR}{ON+QR}$

या,

$$= \frac{\tan A - \frac{PR}{ON}}{1 + \tan A \times \frac{PR}{ON}}$$

($\because \Delta PRQ \sim \Delta ONQ \angle A - A - A$ सदृश्यता शर्त)

$\therefore \frac{PR}{ON} - \frac{PQ}{OQ} = \tan B$

$\frac{PR}{ON} = \tan B$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A.\tan B}$$

उदाहरण 1. $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ.\cos 30^\circ + \cos 45^\circ.\sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

उदाहरण 2. $\sin(A+B).\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

हल:- बायाँ पक्ष: $\sin(A+B).\sin(A-B)$

$$= (\sin A.\cos B + \cos A.\sin B)(\sin A.\cos B - \cos A \cdot \sin B)$$

$$= (\sin A.\cos B)^2 - (\cos A.\sin B)^2$$

$$= \sin^2 A.\cos^2 B - \cos^2 A.\sin^2 B$$

$$= \sin^2 A(1-\sin^2 B) - (1-\sin^2 A)\sin^2 B$$

$$= \sin^2 A - \sin^2 A.\sin^2 B - \sin^2 B + \sin^2 A.\sin^2 B$$

$$= \sin^2 A - \sin^2 B$$

उदाहरण 3. $5\sin\theta + 12\cos\theta$ का महत्तम एवं न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

हल:- $5\sin\theta + 12\cos\theta$

$$\because \sqrt{5^2+12^2} = 13$$

अत: 13 से भाग देने पर

$$13\left\{\frac{5}{13}\sin\theta + \frac{12}{13}\cos\theta\right\}$$

माना कि $\frac{5}{13} = \cos\alpha$

$$\therefore \frac{12}{13} = \sin\alpha$$

अत: $13\{\cos\alpha.\sin\theta + \sin\alpha.\cos\theta\}$

$$13\{\sin(\theta+\alpha)\} = 13\sin(\theta+\alpha)$$

$\because$ $\sin(\theta+\alpha)$ का महत्तम मान $+1$, न्यूनतम मान $=-1$

$\therefore 5\sin\theta + 12\cos\theta$ महत्तम मान $13 \times 1 = 13$ तथा न्यूनतम मान $13(-1) = -13$

प्रश्नावली-4

1. मान ज्ञात कीजिए:

(i) $\sin 15^\circ$ (ii) $\cos 15^\circ$ (iii) $\tan 75^\circ$ (iv) $\sin 105^\circ$

(v) $\tan 105^\circ$ (vi) $\cot 15^\circ$

2. यदि $\sin A = \frac{12}{13}$ और $\sin B = \frac{15}{17}$ तो $\sin(A+B)$ और $\sin(A-B)$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. यदि $\sin A = \frac{3}{5}$ और $\sin B = \frac{4}{5}$ तो $\sin(A+B)$ और $\sin(A-B)$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि $\tan A = \frac{4}{3}$ तथा $\angle B = 45^\circ$ तो $\tan(A-B)$ का मान ज्ञात कीजिए।

5. यदि $\cot A = \frac{11}{2}$, $\tan B = \frac{7}{24}$ तो $\cot(A-B)$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. निम्नलिखित को विस्तारित करें:

(i) $\sin(A+B+C)$ (ii) $\cos(A+B+C)$ (iii) $\tan(A+B+C)$

7. सिद्ध कीजिए कि:

(i) $\tan(45^\circ + A) = \frac{1+\tan A}{1-\tan A}$

(ii) $\tan(45^\circ - A) = \frac{1-\tan A}{1-\tan A}$

(iii) $\sin(A+45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin A + \cos A)$

(iv) $\sin(30^\circ - A) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A - \sqrt{3}\cos A)$

(v) $\cos(45^\circ + A) + \sin(A - 45^\circ) = 0$

(vi) $\cos(A+B) + \sin(A-B) = (\cos A + \sin A)(\cos B - \sin B)$

(vii) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+A\right).\tan\left(\frac{\pi}{4}-A\right)=1$

(viii) $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+A\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-A\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+A\right)-\tan\left(\frac{\pi}{4}-A\right)}=\operatorname{cosec}2A$

8. सिद्ध कीजिए कि:

(i) $\dfrac{\tan 4A-\tan 3A}{1+\tan 4A.\tan 3A}=\tan A$

(ii) $2\sin(A+45^\circ).\sin(A-45^\circ)=\sin^2 A-\cos^2 A$

(iii) $\cos(30^\circ+A).\cos(30^\circ-A)-\sin(30^\circ+A).\sin(30^\circ-A)=\frac{1}{2}$

(iv) $\sin(60^\circ-A).\cos(30^\circ+A)+\cos(60^\circ-A).\sin(30^\circ+A)=1$

(v) $\dfrac{\cot(\alpha+\beta).\cot\alpha+1}{\cot\alpha-\cos(\alpha+\beta)}=\cot\beta$

(vi) $\cot^2 A+\tan A=\operatorname{cosec}2A$

(vii) $\cos 4\theta.\cos\theta+\sin 4\theta.\sin\theta=\cos 2\theta.\cos\theta-\sin 2\theta.\sin\theta$

(viii) $\tan 5A-\tan 3A-\tan 2A=\tan 5A.\tan 3A.\tan 2A$

(ix) $\sin(n+1)\theta.\cos(n-1)\theta-\cos(n+1)\theta.\sin(n-1)\theta=\sin 2\theta$

9. सिद्ध कीजिए कि-

(i) $\sin(A+B).\sin(A-B)+\sin(B+C).\sin(B-C)+\sin(C+A).\sin(C-A)$
$=0$

(ii) $\sin A.\sin(B-C)+\sin B.\sin(C-A)+\sin C.\sin(A-B)=0$

(iii) $\dfrac{\sin(B-C)}{\cos B.\cos C}+\dfrac{\sin(C-A)}{\cos C.\cos A}+\dfrac{\sin(A-B)}{\cos A.\cos B}=0$

(iv) $\tan 40^\circ+\tan 5^\circ+\tan 40^\circ.\tan 5^\circ=1$

(v) $\cot 27^\circ + \cot 32^\circ + \cot 31^\circ = \cot 27^\circ.\cot 32^\circ.\cot 31^\circ$

(vi) $\sqrt{3} + \tan 40^\circ + \tan 80^\circ = \sqrt{3}\tan 40^\circ.\tan 80^\circ$

10. यदि $A+B=\frac{\pi}{4}$ तो सिद्ध कीजिए कि $(\cot A-1)(\cot B-1)=2$

11. निम्नलिखित का न्यूनतम एवं महत्तम मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta$

(ii) $7\cos\theta+24\sin\theta$

12. यदि $\tan\alpha=\frac{1}{2}, \tan\beta=\frac{1}{3}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

1.4 अनुपरिवर्तन सूत्र

प्रस्तावना: योग एवं गुणनफल से संबंधित सूत्र जिसे $A\pm B$ से हल कर सकते हैं-

सूत्र:

1. $2\sin A.\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$
2. $2\cos A.\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$
3. $2\cos A.\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$
4. $2\sin A.\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$
5. $\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}.\cos\frac{C-D}{2}$
6. $\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}.\sin\frac{C-D}{2}$
7. $\cos C+\cos D=\cos\frac{C+D}{2}.\cos\frac{C-D}{2}$
8. $\cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}.\sin\frac{D-C}{2}=-2\sin\frac{C+D}{2}.\sin\frac{C-D}{2}$

उदाहरण 1. सिद्ध कीजिए कि-

$$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}.\cos\frac{C-D}{2}$$

हल:-

$\because \sin(A+B) = \sin A.\cos B + \cos A.\sin B$ ....(1)

पुन: $\sin(A-B) = \sin A.\cos B - \cos A.\sin B$ ....(2)

(1)+(2) से

$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A.\cos B$ ....(3)

मान लिया कि-

$$A+B=C$$

$$A-B=D$$

जोड़ने पर- $2A = C+D$

$$A = \frac{C+D}{2}$$

घटाने पर- $2B = C-D$

$$B = \frac{C-D}{2}$$

(3) में मान रखने पर-

$$\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}.\cos\frac{C-D}{2}$$

उदाहरण 2. सिद्ध कीजिए कि-

$$\frac{\sin 4A + \sin 10A - \sin 2A}{\cos 4A + \cos 10A + \cos 2A} = \tan 4A$$

हल:- बायाँ पक्ष $= \dfrac{\sin 4A + \sin 10A - \sin 2A}{\cos 4A + \cos 10A + \cos 2A}$

$$= \frac{\sin 4A + 2\cos\frac{10A+2A}{2}.\sin\frac{10A-2A}{2}}{\cos 4A + 2\cos\frac{10A+2A}{2}.\cos\frac{10A-2A}{2}}$$

$$= \frac{\sin 4A(1+2\cos 6A)}{\cos 4A(1+2\cos 6A)} = \tan 4A$$ = दायाँ पक्ष

उदाहरण 3. सिद्ध कीजिए कि-

$$\sin 20^\circ.\sin 40^\circ.\sin 60^\circ.\sin 80^\circ = \frac{3}{16}$$

बायाँ पक्ष $= \sin 20^\circ.\sin 40^\circ.\sin 60^\circ.\sin 80^\circ$

$$= \sin 60^\circ.\sin 80^\circ.\sin 40^\circ.\sin 20^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{2}2\sin 80^\circ.\sin 40^\circ)\times\sin 20^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(2\sin 80^\circ.\sin 40^\circ)\times\sin 20^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\{\cos(80^\circ-40^\circ)-\cos(80^\circ+40^\circ)\}\times\sin 20^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\{\cos 40^\circ-\cos 120^\circ\}\sin 20^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\{\cos 40^\circ.\sin 20^\circ-\cos 120^\circ.\sin 20^\circ\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\frac{1}{2}\times 2\cos 40^\circ.\sin 20^\circ-\cos 120^\circ.\sin 20^\circ\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\frac{1}{2}(\sin 60^\circ-\sin 20^\circ)-(-\frac{1}{2})\sin 20^\circ\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\frac{1}{2}\sin 60^\circ-\frac{1}{2}\sin 20^\circ+\frac{1}{2})\sin 20^\circ\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\frac{1}{2}\sin 60^\circ\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3}{16} = \text{ दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 4. $\left(\dfrac{\cos A+\cos B}{\sin A-\sin B}\right)^n+\left(\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A-\cos B}\right)^n$

$= 2\cot^n\dfrac{A-B}{2}$ जहाँ n, समपूर्णांक है।

$= 0$ जहाँ n, विषमपूर्णांक है।

हल:- बायाँ पक्ष- $\left(\frac{\cos A+\cos B}{\sin A-\sin B}\right)^n+\left(\frac{\sin A+\sin B}{\cos A-\cos B}\right)^n$

$$=\left\{\frac{2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}.\sin\frac{A-B}{2}}\right\}^n+\left\{\frac{2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}.\sin\frac{B-A}{2}}\right\}^2$$

$$=\left(\cot\frac{A-B}{2}\right)^2+\left(-\cot\frac{A-B}{2}\right)^2$$

$$=\cot^n\frac{A-B}{2}+(-1)^n\cot^n\frac{A-B}{2}$$

माना कि $n=$ सम पूर्णांक

तब $(-1)^n=1$

$$=\cot^n\left(\frac{A-B}{2}\right)+\cot^2\frac{A-B}{2}=2\cot^n\frac{A-B}{2}$$

माना कि $n=$ विषम पूर्णांक

तब $(-1)^2=-1$ तब बायाँ पक्ष $=\cot^2\frac{A-B}{2}-\cot^n\frac{A-B}{2}=0$

प्रश्नावली-5

सिद्ध करें कि-

1. $\sin 40^0+\sin 20^0=\cos 10^0$
2. $\sin 60^0+\cos 20^0=2\sin 65^0.\sin 85^0$
3. $\sin 80^0-\sin 20^0=\cos 50^0$
4. $\sin 50^0+\sin 10^0=\sin 70^0$
5. $\cos 55^0+\cos 65^0+\cos 175^0=0$
6. $\cos 43^0+\cos 77^0=\cos 17^0$

7. $\cos(A+B).\cos(A-B)=\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)$

8. $\frac{\sin 9A-\sin 7A}{\cos 7A-\cos 9A}=\cot 8A$

9. $\frac{\sin(4A-2B)+\sin(4B-2A)}{\cos(4A-2B)+\cos(4B-2A)}=\tan(A+B)$

10. $\frac{\cos\theta-\cos 3\theta}{\sin 3\theta-\sin\theta}=\tan 2\theta$

11. $\frac{\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta}{\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta}=\tan 2\theta$

12. $\frac{\sin A+\sin 3A+\sin 5A+\sin 7A}{\cos A+\cos 3A+\cos 5A+\cos 7A}=\tan 4A$

13. $\frac{\sin 3\theta+\sin 5\theta+\sin 7\theta+\sin 9\theta}{\cos 3\theta+\cos 5\theta+\cos 7\theta+\cos 9\theta}=\tan 6\theta$

14. $\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cos 6\theta+\cos 8\theta=4\cos\theta.\cos 2\theta.\cos 5\theta$

15. $\cos A+\cos B+\cos C+\cos(A+B+C)$

$$=4\cos\frac{B+C}{2}.\cos\frac{C+A}{2}.\cos\frac{A+B}{2}$$

16. $\cos(\theta-120^\circ)+\cos(\theta+120^\circ)+\cos\theta=0$

17. $\sin(\theta-120^\circ)+\sin(\theta+120^\circ)+\sin\theta=0$

18. $\sin(60^\circ+\theta)+\sin(60^\circ-\theta)=\sqrt{3}\cos\theta$

19. $\sin(45^\circ+\theta)+\sin(45^\circ-\theta)=\sqrt{2}\cos\theta$

20. (i) $\cos 10^\circ.\cos 30^\circ.\cos 50^\circ.\cos 70^\circ=\frac{3}{16}$

(ii) $\cos 20^\circ.\cos 40^\circ.\cos 60^\circ.\cos 80^\circ=\frac{1}{16}$

(iii) $\sin 20^\circ.\sin 30^\circ.\sin 40^\circ.\sin 80^\circ=\frac{\sqrt{3}}{16}$

(iv) $\tan 20^\circ . \tan 40^\circ . \tan 80^\circ = \sqrt{3}$

21. $\cos 18^\circ - \sin 18^\circ = \sqrt{2} \sin 27^\circ$

22. $\dfrac{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ + \sin 10^\circ} = \tan 35^\circ$

23. $\cos A + \cos B = a$ तथा $\sin A + \sin B = b$ तो सिद्ध कीजिए कि-

$$\tan \frac{A+B}{2} = \frac{b}{a}$$

24. $\operatorname{cosec} A + \sec A = \operatorname{cosec} B + \sec B$ तो $\tan A . \tan B . = \cot \dfrac{A+B}{2}$ सिद्ध कीजिए।

25. $\sin \theta = n \sin(\theta + 2\alpha)$ तो $\tan(\theta + \alpha) = \dfrac{1+n}{1-n} \tan \alpha$ सिद्ध कीजिए।

1.5 अपवर्त्य कोण (Multiple angle)

प्रस्तावना:

कोण nA (जहाँ $n=2,3,4.....$) को कोण A का अपवर्त्य कोण कहते हैं। हम यहाँ अपने को मुख्यत: n=2 और 3 पर सीमित रखेंगे।

आप जान चुके हैं कि-

$$\sin(A+B)=\sin A\cdot\cos B+\cos A\cdot\sin B$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cdot\cos B-\sin A\cdot\sin B$$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}$$

अब मान लें कि $B=A$

$\therefore \quad \sin(A+A)=\sin A\cdot\cos A+\cos A\cdot\sin A$

या, $\quad \sin 2A=2\sin A\cdot\cos A$

इसी तरह $\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$

$$=2\cos^2 A-1$$

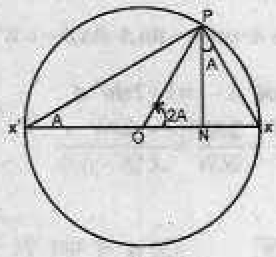
$$=1-2\sin^2 A$$

तथा $\quad \tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

$(A+B)$ का सूत्र A तथा B के किसी भी मान के लिए सत्य है, अत: $2A$ वाला सूत्र भी A के किसी भी मान के लिए सत्य होगा।

अब हम $2A$ सूत्र को स्वतंत्र रूप से ज्यामितीय विधि द्वारा स्थापित करेंगे। यहाँ हम सुविधा के लिए $2A$ का मान $90°$ से कम रखेंगे।

$2A$ कोण को त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ ज्ञात करना जहाँ $2A<90°$



आकृति–9

मान लें कि O केन्द्र तथा XOX' व्यास वाला XPX' एक वृत्त है। वृत्त के केन्द्र O पर $\angle XOP = 2A$ का कोण बना है (जहाँ $2A < 90°$)

PX, PX' को मिलाकर, P से PN लम्ब XX' पर डालें।

अब $\angle XX'P = \dfrac{\angle XOP}{2} = A$ (क्यों?)

$\because$ $\angle XPX' = 90°$ (अर्द्धवृत्त का कोण)

$\therefore$ $\angle X'XP = 90° - A$

$\because$ $\angle PNX = 90°$; $\therefore$ $\angle XPN = A$

अब समकोण ΔPON में,

$$\sin 2A = \frac{PN}{OP} = \frac{2PN}{2OP}$$

$$= \frac{2PN}{XX'} \quad (OP = \text{अर्धव्यास})$$

$$= \frac{2PN}{XX'} \times \frac{PX'}{XX'} = 2\sin A \cdot \cos A$$

पुनः $$\cos 2A = \frac{ON}{OP} = \frac{2ON}{2OP} = \frac{ON + ON}{XX'}$$

$$= \frac{(X'N - OX') + (OX - NX)}{XX'} = \frac{X'N - NX}{XX'}$$

$$= \frac{X'N}{XX'} - \frac{NX}{XX'}$$

$$= \frac{X'N}{PX'} \times \frac{PX'}{XX'} - \frac{NX}{PX} \times \frac{PX}{XX'}$$

$$= \cos A \cdot \cos A - \sin A \cdot \sin A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$= 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$$

पुनः $$\tan 2A = \frac{PN}{ON} = \frac{2PN}{2ON} = \frac{2PN}{X'N - NX}$$

$$= \frac{\frac{2PN}{X'N}}{\frac{X'N}{X'N} - \frac{NX}{X'N}} \quad (X'N \text{ से भाग देने पर})$$

$$= \frac{\frac{2PN}{X'N}}{1-\frac{NX}{PN}\times\frac{PN}{X'N}} = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

यहाँ सूत्र की स्थापना में $2A\angle 90^\circ$ माना गया है। छात्रों को समझना चाहिए कि ये सूत्र $2A$ या A के किसी भी मान के लिए सत्य है।

उदाहरण:सिद्ध करें-

(i) $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

(ii) $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

हल:- (i) बायाँ पक्ष $= \sin 2A$

$$= 2\sin A\cdot\cos A$$

$$= \frac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A+\sin^2 A}$$

$$= \frac{\frac{2\sin A\cdot\cos A}{\cos^2 A}}{\frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}+\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}$$

($\cos^2 A$ से भाग देने पर जहाँ $A \neq 90^\circ$)

$$= \frac{2\tan A}{1+\tan^2} = \text{दायाँ पक्ष}$$

(ii) बायाँ पक्ष $= \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$$= \frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos^2 A+\sin^2 A}$$

$$= \frac{\frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}-\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}{\frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}+\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}$$

($\cos^2 A$ से भाग देने पर जहाँ $A \neq 90^\circ$)

$$= \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

उपरोक्त दोनों संबंध आगे सूत्र का कार्य करेगा।

3A कोण का सूत्र ज्ञात करना:

अब हम 2A तथा (A+B) सूत्र की मदद से 3A का A के रूप में सूत्र ज्ञात करेंगे।

(i) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

(ii) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

(iii) $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

हल:

(i) $\sin 3A = \sin(2A + A)$

$= \sin 2A \cdot \cos A + \cos 2A \cdot \sin A$

$= 2\sin A \cdot \cos A \cdot \cos A + (1 - 2\sin^2 A) \cdot \sin A$

($\sin 2A$ तथा $\cos 2A$ का मान बैठाने पर)

$= 2\sin A \cdot \cos^2 A + \sin A(1 - 2\sin^2 A)$

$= 2\sin A(1 - \sin^2 A) + \sin A(1 - 2\sin^2 A)$

$= 3\sin A - 4\sin^3 A$

(ii) $\cos 3A = \cos(2A + A)$

$= \cos 2A \cdot \cos A - \sin 2A \cdot \sin A$

$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin A \cdot \cos A \cdot sonA$

$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin^2 A \cdot \cos A$

$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2(1 - \cos^2 A)\cos A$

$= 4\cos^3 A - 3\cos A$

(iii) $\tan 3A = \tan(2A + A)$

$$= \frac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A \cdot \tan A}$$

$$= \frac{\dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} + \tan A}{1 - \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} \times \tan A}$$

$$=\frac{2\tan A+\tan A(1-\tan^2 A)}{(1-3\tan^2-2\tan^2 A)}$$

$$=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$$

उपरोक्त सूत्र को $(A+B+C)$ के सूत्र से भी ज्ञात कर सकते हैं।

$\because \quad \sin(A+B+C)=\sin A\cdot\cos B\cdot\cos C+\sin B\cdot\cos A\cdot\cos C$

$+\sin C\cdot\cos A\cdot\cos B-\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$

$\cos(A+B+C)=\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C-\sin B\cdot\sin C\cdot\cos A$

$-\sin A\cdot\sin C\cdot\cos B-\sin A\cdot\sin B\cdot\cos C$

$$\tan(A+B+C)=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C}{1-\tan A\cdot\tan B-\tan B\cdot\tan C-\tan C\cdot\tan A}$$

अब इन सूत्रों में $B=C=A$ रखने पर,

$\sin 3A=\sin A\cdot\cos^2 A+\sin A\cdot\cos^2 A+\sin A\cdot\cos^2 A-\sin^3 A$

$=3\sin A(1-\sin^2 A)-\sin^3 A$

$=3\sin A-4\sin^3 A$

इसी प्रकार, $\cos 3A=\cos^3 A-\sin^2 A\cdot\cos A-\sin^2 A\cdot\cos A-\sin^2 A\cdot\cos^2 A$

$=\cos^3 A-3\sin^2 A\cdot\cos A$

$=\cos^3 A-3(1-\cos^2 A)\cos A$

$=4\cos^3 A-3\cos A$

तथा $\quad \tan 3A=\dfrac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

प्रमुख–सूत्र

(i) $\sin 2A = 2\sin A \cdot \cos A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

(ii) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

(iii) $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

(iv) $1+\cos 2A = 2\cos^2 A$

(v) $1-\cos 2A = 2\sin^2 A$

(vi) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

(vii) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

(viii) $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

उदाहरण: 2 यदि $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$ (जहाँ $\alpha < 90°$) तो $\sin 2\alpha$ का मान बतावें।

हल: $\because \quad \sin\alpha = \dfrac{4}{5}$

$\therefore \quad \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ ($\because \cos\alpha$ धनात्मक है।)

$= \dfrac{3}{5}$

अब $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$= 2 \times \dfrac{4}{5} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{24}{25}$

उपरोक्त प्रश्न में $\alpha < 90°$ अत: $\cos\alpha$ का धनात्मक मान लिया गया है। यदि α में शर्त नहीं रहता, $\cos\alpha$ का धनात्मक तथा ऋणात्मक दोनों मान संभव है। हम यहाँ सुविधा के लिए सिर्फ धनात्मक मान लेंगे।

उदाहरण: 3 सिद्ध करें कि-

$$\frac{\sin\theta+\sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta}=\tan\theta$$

हल: बायाँ पक्ष $=\dfrac{\sin\theta+\sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta}$

$$=\frac{\sin\theta+2\sin\theta\cdot\cos\theta}{2\cos^2\theta+\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta(1+2\cos\theta)}{\cos\theta(2\cos\theta+1)}$$

$$=\tan\theta$$

उदाहरण: 4 मान बतायें-

(i) $\sin 18^\circ$ (ii) $\cos 18^\circ$

(iii) $\cos 36^\circ$ (iv) $\sin 36^\circ$

(v) $\sin 22\frac{1^\circ}{2}$ (vi) $\cos 22\frac{1^\circ}{2}$

(vii) $\tan 22\frac{1^\circ}{2}$

हल: (i) मान लें कि-

$A=18^\circ$

या, $5A=90^\circ$

या, $2A=90^\circ-3A$

या, $\sin 2A=\sin(90^\circ-3A)=\cos 3A$

या, $2\sin A\cdot\cos A=4\cos^3 A-3\cos A$

या, $2\sin A=4\cos^2 A-3$

($\because \cos A=\cos 18^\circ\neq 0$, $\therefore \cos$ से भाग देने पर)

या, $2\sin A=4(1-\sin^2 A)-3$

या, $4\sin^2 A+2\sin A-1=0$

या, $\sin A=\dfrac{-2\pm\sqrt{(2)^2-4\cdot 4(-1)}}{2\times 4}$

$$=\frac{-2\pm2\sqrt{5}}{8}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

$$=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \quad \text{या;} \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

$\because$ $\sin A=\sin 18^\circ$ का मान धनात्मक है,

$\therefore$ ऋणात्मक मान को छोड़ते हुए,

$$\sin A=\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$=\cos 72^\circ \quad (\text{क्यों?})$$

(ii) $\cos 18^\circ=+\sqrt{1-\sin^2 18^\circ}$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{16-(5+1-2\sqrt{5}}{16}}$$

$$=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}=\sin 72^\circ \quad (\text{क्यों?})$$

(iii) $\cos 36^\circ=\cos 2(18^\circ)$

$$=1-2\sin^2 18^\circ$$

अब $\sin 18^\circ$ का मान रखने पर,

$$\cos 36^\circ=1-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$$

$$=\frac{8-6+2\sqrt{5}}{8}=\frac{2+2\sqrt{5}}{8}$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1}{4}=\sin 54^\circ \quad (\text{क्यों?})$$

(iv) $\sin 36^\circ=+\sqrt{1-\cos^2 36^\circ}$ ($\because \sin 36^\circ$ का मान धनात्मक है।)

$$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{16-(5+1+2\sqrt{5}}{16}}$$

$$=\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}$$

$$=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$=\cos 54^\circ$$ (क्यों?)

(v) $$2\sin^2 22\frac{1^\circ}{2}=1-\cos 2\times(22\frac{1^\circ}{2})$$

$$=1-\cos 45^\circ=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

या, $$\sin^2 22\frac{1^\circ}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

या, $$\sin 22\frac{1^\circ}{2}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$ ($\because \sin 22\frac{1^\circ}{2}$ का मान धनात्मक है)

(vi) $$2\cos^2 22\frac{1^\circ}{2}=1+\cos 45^\circ$$

$$=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

या, $$\cos^2 22\frac{1^\circ}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

या, $$\cos 22\frac{1^\circ}{2}=+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$ ($\because \cos 22\frac{1^\circ}{2}$ का मान धनात्मक है)

(vii) $$\tan^2 22\frac{1^\circ}{2} = \frac{\sin^2 22\frac{1^\circ}{2}}{\cos^2 22\frac{1^\circ}{2}}$$

$$= \frac{2\sin^2 22\frac{1^\circ}{2}}{2\cos^2 22\frac{1^\circ}{2}} = \frac{1-\cos 45^\circ}{1+\cos 45^\circ}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

$$= \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{1}$$

$$\therefore \tan 22\frac{1^\circ}{2} = \sqrt{2}-1$$

($\because \tan 22\frac{1^\circ}{2}$ का मान धनात्मक है।)

उदाहरण: 5 सिद्ध करें कि-

$$\cot 3A = \frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}$$

हल: $\because$ $$\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$$

या, $$\cot 3A = \frac{1}{\tan 3A} = \frac{1-3\tan^2 A}{3\tan A - \tan^3 A}$$

$$= \frac{1-\frac{3}{\cot^2 A}}{\frac{3}{\cot A} - \frac{1}{\cot^3 A}} = \frac{\frac{\cot^2 A - 3}{\cot^2 A}}{\frac{3\cot^2 A - 1}{\cot^3 A}}$$

$$= \frac{\cot^2 A - 3}{\cot^2 A} \times \frac{\cot^3 A}{3\cot^2 A - 1}$$

$$= \frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}$$

उदाहरण: 6 सिद्ध करें कि-

(i) $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$

(ii) $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$

(iii) $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$

(iv) $\tan A \cdot \tan(60^\circ - A) \cdot \tan(60^\circ + A) = \tan 3A$

हल:

(i) $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$

$$= \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cdot cis 10^\circ}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ}{\frac{1}{2}\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ}$$

$$= \frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 10^\circ - \cos 30^\circ . \sin 10^\circ}{\frac{1}{4} \times 2\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ}$$

$$= \frac{\sin 20^\circ}{\frac{1}{4}\sin 20^\circ} = 4$$

(ii) $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ \cdot \sin(60^\circ - 20^\circ) \cdot \sin(60^\circ + 20^\circ)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ \{\sin^2 60^\circ - \sin^2 20^\circ\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ \left\{\frac{3}{4} - \sin^2 20^\circ\right\}$$

https://www.studiestoday.com

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\frac{3\sin 20^\circ-4\sin^3 20^\circ}{4}\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sin 3\times 20^\circ}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 60^\circ=\frac{3}{16}$$

(iii) $\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 60^\circ\cdot\cos 80^\circ$

$$=\frac{1}{2}\cos 20^\circ\{\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ\}$$

$$=\frac{1}{2}\cos 20^\circ\{\cos(60^\circ-20^\circ)\cdot\cos(60^\circ+20^\circ)\}$$

$$=\frac{1}{2}\cos 20^\circ\left\{\cos^2 60^\circ-\sin^2 20^\circ\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cos 20^\circ\left\{\frac{1}{4}-1+\cos^2 20^\circ\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cos 20^\circ\left\{\cos^2 20^\circ-\frac{3}{4}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{4\cos^3 20^\circ-3\cos 20^\circ}{4}$$

$$=\frac{1}{8}\times\cos 60^\circ=\frac{1}{16}$$

(iv) $\tan A\cdot\tan(60^\circ-A)\cdot\tan(60+A)$

$$=\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\sin(60^\circ-A)}{\cos(60^\circ-A)}\cdot\frac{\sin(60^\circ+A)}{\cos(60^\circ+A)}$$

$$=\frac{\sin A(\sin^2 60^\circ-\sin^2 A)}{\cos A(\cos^2 60^\circ-\sin^2 A)}$$

$$=\frac{\sin A\left(\frac{3}{4}-\sin^2 A\right)}{\cos A\left(\frac{1}{4}-1+\cos^2 A\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{3\sin A-4\sin^3 A}{4}}{\dfrac{4\cos^3 A-3\cos A}{4}}$$

$$=\frac{\sin 3A}{\cos 3A}=\tan 3A$$

उदाहरण 7 यदि $A=\dfrac{\pi}{13}$, हो तो सिद्ध करें कि-

$$\cos A\cdot\cos 2A\cdot\cos 3A\cdot\cos 4A\cdot\cos 5A\cdot\cos 6A=\frac{1}{64}$$

हल: बायाँ पक्ष $=\cos A\cdot\cos 2A\cdot\cos 3A\cdot\cos 4A\cdot\cos 5A\cdot\cos 6A$

$$=\frac{2\sin A\cdot\cos A\cdot\cos 2A\cdot\cos 3A\cdot\cos 4A\cdot\cos 5A\cdot\cos 6A}{2\sin A}$$

($\because \sin A\neq 0, \therefore 2\sin A$ से गुणा तथा भाग करने पर)

$$=\frac{\sin 2A\cdot\cos 2A\cdot\cos 3A\cdot\cos 4A\cdot\cos 5A\cdot\cos 6A}{2\sin A}$$

$$=\frac{2\sin 2A\cdot\cos 2A\cdot\cos 3A\cdot\cos 4A\cdot\cos 5A\cdot\cos 6A}{4\sin A}$$

$$=\frac{\sin 4A\cdot\cos 4A\cdot\cos 3A\cdot\cos 5A\cdot\cos 6A}{4\sin A}$$

$$=\frac{2\sin 4A\cdot\cos 4A\cdot\cos 3A\cdot\cos 5A\cdot\cos 6A}{8\sin A}$$

$$=\frac{\sin 8A\cdot\cos 3A\cdot\cos 5A\cdot\cos 6A}{8\sin A}$$

($\because 13A=\pi, \therefore 8A=\pi-5A$ या, $\sin 8A=\sin 5A$)

$$=\frac{\sin 5A\cdot\cos 5A\cdot\cos 3A\cdot\cos 6A}{8\sin A}$$

$$=\frac{\sin 10A\cdot\cos 3A\cdot\cos 6A}{16\sin A}$$

$$=\frac{\sin 3A\cdot\cos 3A\cdot\cos 6A}{16\sin A}$$

($\because \sin 10A=\sin 3A$)

$$=\frac{\sin 6A\cdot\cos 6A}{32\sin A}$$

$$=\frac{\sin 12A}{64\sin A}$$

$$=\frac{1}{64}\quad (\because \sin 12A=\sin A)$$

= दायाँ पक्ष सिद्ध हुआ।

उदाहरण: 8 सिद्ध करें कि-

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}-\frac{1+\cos 2\alpha}{\cos\alpha}=0$$

हल: बायाँ पक्ष $=\dfrac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{2\cos^2\alpha}{\cos\alpha}$

$$=2\cos\alpha-2\cos\alpha$$

$$=0$$

उदाहरण: 9 सिद्ध करें कि-

$$\sin 5\theta=16\sin^5\theta-20\sin^3\theta+\sin\theta$$

हल: प्रथम विधि:

$$\sin 5\theta=\sin(3\theta+2\theta)$$

$$=\sin 3\theta\cdot\cos 2\theta+\cos 3\theta\cdot\sin 2\theta$$

$$=(3\sin\theta-4\sin^3\theta)(1-2\sin^2\theta)+(4\cos^3\theta-3\cos\theta)\cdot 2\sin\theta\cdot\cos\theta$$

$$=(3\sin\theta-6\sin^3\theta-4\sin^3\theta+2\sin\theta\cdot\cos^2\theta(4\cos^2-3)$$

$$=(3\sin\theta-10\sin^3\theta+8\sin^5\theta)+2\sin\theta(1-\sin^2\theta)\{4(1-\sin^2\theta)-3\}$$

$$=(3\sin\theta-10\sin^3\theta+8\sin^5\theta)+(2\sin\theta-8\sin^3\theta-2\sin^3\theta+8\sin^5\theta)$$

$$=16\sin^5\theta-20\sin^3\theta+5\sin\theta$$

द्वितीय विधि:

$$\sin 5\theta + \sin\theta = 2\sin\frac{5\theta+\theta}{2}\cdot\cos\frac{5\theta-\theta}{2}$$

$$= 2\sin 3\theta\cdot\cos 2\theta$$

$$= 2(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)(1-2\sin^2\theta)$$

$$= 2(3\sin\theta - 6\sin^3\theta - 4\sin^3\theta + 8\sin^5\theta)$$

$$= 6\sin\theta - 20\sin^3\theta + 16\sin^5\theta$$

$$\therefore \sin 5\theta = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$$

उदाहरण: 10 यदि समीकरण $a\cos 2\theta + b\sin 2\theta = c$ के दो असमान मूल α तथा β हो, तो सिद्ध करें कि-

(i) $\tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{2b}{c+a}$

(ii) $\tan\alpha\cdot\tan\beta = \dfrac{c-a}{c+a}$

हल: दिए हुए समीकरण $a\cos 2\theta + b\sin 2\theta = c$ में,

$$\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$a\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right) + b\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = c$$

या, $(a+c)\tan^2\theta - 2b\tan\theta + (c-a) = 0$

यह $\tan\theta$ में एक द्विघात समीकरण है,

$\therefore$ इसके दो मूल $\tan\alpha$ एवं $\tan\beta$ होंगे।

$\therefore$ $\tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{2b}{c+a}$

एवं $\tan\alpha\cdot\tan\beta = \dfrac{c-a}{c+a}$

प्रश्नावली–6

1. यदि $\sin\alpha = \frac{12}{13} (\alpha < 90°)$ तो $\sin 2\alpha$ का मान बतावें।

2. यदि $\tan\alpha = \frac{16}{63}$ तो $\cos 2\alpha$ का मान बतावें।

3. यदि $\tan\theta = \frac{b}{a}$ तो $a\cos 2\theta + b\sin 2\theta$ का मान बतावें।

4. यदि $\sin A = 0{\cdot}1$ तो $\sin 3A$ का मान बतावें।

5. यदि $\cos A = \frac{1}{3}$ तो $\cos 3A$ का मान बतावें।

6. सिद्ध करें कि–

(i) $1 + \tan A \cdot \tan 2A = \sec 2A$

(ii) $\cot\theta - \tan\theta = 2\cot 2\theta$

(iii) $\frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \tan A$

(iv) $\frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \tan^2 A$

(v) $\frac{\sin 2A}{1 - \cos 2A} = \cot A$

(vi) $\frac{1 + \tan^2(45° - \theta)}{1 - \tan^2(45° - \theta)} = \operatorname{cosec} 2\theta$

(vii) $\frac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A} - \frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = 2\tan 2A$

(viii) $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$

(ix) $\sin 8\theta = 8\sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 4\theta$

(x) $\sin A \cdot \sin(60° - A) \cdot \sin(60° + A) = \frac{1}{4}\sin 3A$

(xi) $\cos A \cdot \cos(60° - A) \cdot \cos(60° + A) = \frac{1}{4}\cos 3A$

(xii) $\tan 15° + \cot 15° = 4$

(xiii) $\cos^3\theta\cdot\sin^3\theta-\sin^3\theta\cdot\cos\theta=\frac{1}{4}\sin 4\theta$

(xiv) $4(\cos^3 10^\circ+\sin^3 20^\circ)=3(\cos 10+\sin 20^\circ)$

(xv) $\cos^3 A\cdot\cos 3A+\sin^3 A\cdot\sin 3A=\cos^3 2A$

(xvi) $\cos^3 A\cdot\sin 3A+\sin^3 A\cdot\cos 3A=\frac{3}{4}\sin 4A$

(xvii) $\cos\frac{2\pi}{15}\cdot\cos\frac{4\pi}{15}\cdot\cos\frac{8\pi}{15}\cdot\cos\frac{14\pi}{15}=\frac{1}{16}$

(xviii) $\cos\theta\cdot\cos 2\theta\cdot\cos 3\theta\cdot\cos 4\theta\cdot\cos 5\theta=\frac{1}{32}$ $\left(\text{जहाँ}\,\theta=\frac{\pi}{11}\right)$

(xix) $\frac{\cot A}{\cot A-\cot 3A}+\frac{\tan A}{\tan A-\tan 3A}=1$

(xx) $\frac{1}{\tan 3A+\tan A}-\frac{1}{\cot 3A+\cot A}=\cot 4A$

(xxi) $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}=4\cos 2\alpha$

(xxii) $\cot\theta\cdot\cot(60^\circ+\theta)\cdot\cot(60^\circ-\theta)=\cot 3\theta$

(xxiii) $8\cos^3 40^\circ=6\cos 40^\circ-1$

7. यदि $\cos A+\cos B+\cos C=0$ तो सिद्ध करें कि-

$$\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=12\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$$

(यदि $a+b+c=0$ तो $a^3+b^3+c^3=3abc$ की मदद लें)

8. यदि $\tan\theta=\sec 2\alpha$ तो सिद्ध करें कि-

$$\sin 2\theta=\frac{1-\tan^4\alpha}{1+\tan^4\alpha}$$

9. सिद्ध करें कि-

$$(\cos 4\theta-\cos 4\alpha)=8(\cos\theta-\cos\alpha)(\cos\theta+\cos\alpha)$$
$$(\cos\theta-\sin\alpha)(\cos\theta+\sin\alpha)$$

—

1.6 अपवर्तक कोण (Submultiple angles)

प्रस्तावना:

कोण nA (जहाँ $n=\frac{1}{2}$ या $\frac{1}{3}$ या $\frac{1}{4}\cdots$)को कोण A का अपवर्त्तक (Sub-muliple angles) कहते हैं। इस अध्याय में कोण A की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को मुख्यत: कोण $\frac{A}{2}, \frac{A}{3}$, कोणों की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों के पदों में व्यक्त करेंगे।

कोण A की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को कोण $\frac{A}{2}$ की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों में व्यक्त करना (To express the trigonometrical ratios of angle A interms of trigonometrical ratios of angle $\frac{A}{2}$):

सिद्ध करें कि-

(i) $$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}$$

$$=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$$

(ii) $$\cos A = \cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}=2\cos^2\frac{A}{2}-1$$

$$=1-2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$$

(iii) $$\tan A=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$$

हल: (i) आप जानते हैं कि-

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

मान लें कि $2\theta = A$

$\therefore\ \theta = \frac{A}{2}$

2θ तथा θ के मान को रखने पर,

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2} = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$$

(ii) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

$$= \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

मान लें कि $2\theta = A$, $\therefore\ \theta = \frac{A}{2}$

2θ तथा θ का मान उपरोक्त सर्वसमिका (तादात्म्य) में रखने पर,

$$\cos A = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2} = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$$

$$= \frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$$

(iii) इसी प्रकार $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ से आप सिद्ध कर सकते हैं कि-

$$\tan A = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$$

उदाहरण:1 सिद्ध करें कि-

(i) $1+\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2}$

(ii) $1-\cos A = 2\sin^2\frac{A}{2}$

हल: (i) $1+\cos A = A + 2\cos^2\frac{A}{2} - 1$

https://www.studiestoday.com

$\frac{}{2}$

(ii) $1-\cos A = A-\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)$

$= 2\sin^2\frac{A}{2}$

उदाहरण:2 $\cos A$ के मान से $\sin\frac{A}{2}$ तथा $\cos\frac{A}{2}$ का मान ज्ञात करना:

हल: $\because \quad 2\cos^2\frac{A}{2} = 1+\cos A$

or $\quad \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ ......(i)

पुन: $\quad 2\sin^2\frac{A}{2} = 1-\cos A$

या, $\quad \sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$ ......(ii)

यहाँ $\sin\frac{A}{2}$ तथा $\cos\frac{A}{2}$ के मान के चिह्न में संशयात्मक(Ambiguous)स्थिति है।

जब A का खास मान दिया रहेगा तब हम आसानी से जान जाएंगे कि $\frac{A}{2}$ किस पाद में होगा और उसी के अनुरूप $\sin\frac{A}{2}$ या $\cos\frac{A}{2}$ के मान में उचित चिह्न (sign) का उपयोग करेंगे।

उदाहरण: 3 $\sin\frac{A}{2}\pm\cos\frac{A}{2}$ के चिह्न को ज्ञात करना

$$\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2} = \sqrt{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{A}{2}\right\}$$

$$= \sqrt{2}\left\{\cos 45^\circ\cdot\sin\frac{A}{2}+\sin 45^\circ\cdot\cos\frac{A}{2}\right\}$$

$$= \sqrt{2}\left\{\sin\left(\frac{A}{2}+45^\circ\right)\right\}$$

$\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}$ का चिह्न वही होगा जो $\sqrt{2}\left\{\sin\left(\frac{A}{2}+45^\circ\right)\right\}$ का चिह्न होगा।

$\sqrt{2}$ एक धनात्मक अपरिमेय संख्या है अतः चिह्न का निर्धारण $\sin\left(\frac{A}{2}+45^\circ\right)$ निर्भर करेगा।

$\sin\left(\frac{A}{2}+45^\circ\right)$ **का मान धनात्मक तभी होगा, जब कोण का मान 0° से 180°** **च हो।**

[किसी भी कोण 0° से 360° के बीच (धनात्मक या ऋणात्मक कोण में) बदला सकता है। अतः हम अपने अध्ययन को यहाँ इसी के बीच सीमित रखते हैं।]

अर्थात् $\sin\left(\frac{A}{2}+45^\circ\right)\geq\sin 0^\circ$

$\sin\left(\frac{A}{2}+45^\circ\right)\leq\sin 180^\circ$

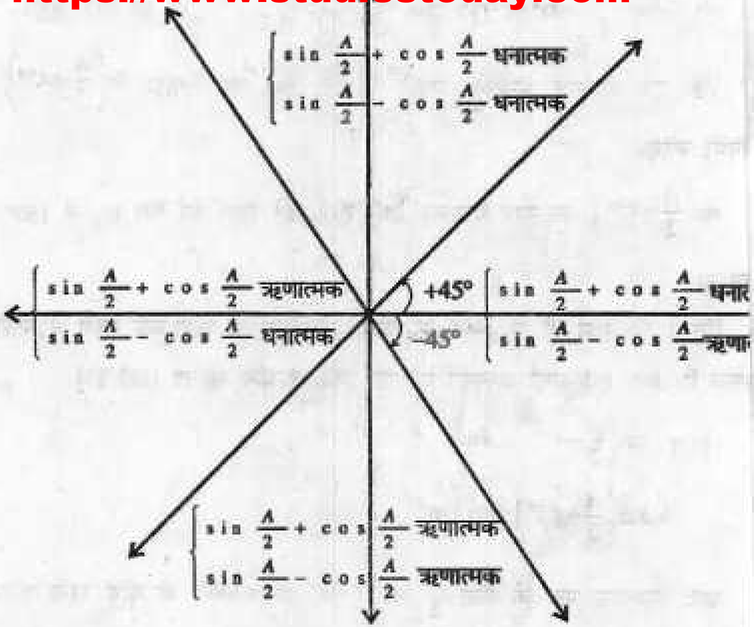
अतः धनात्मक मान के लिए $\frac{A}{2}$ को -45° से $+135^\circ$ के बीच रहना होगा था मान ऋणात्मक होंगे।

इसी प्रकार हम दिखला सकते हैं कि-

$$\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}-45^\circ\right)$$

इस धनात्मक होने के लिए $\frac{A}{2}$ को 45° से 225° के बीच रहना होगा अन्यथा ऋणात्मक होंगे।

इन निष्कर्षों को हम निम्न आलेख से समझ सकते हैं:



उदाहरण: 4 कोण A की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को कोण $\frac{A}{3}$ की त्रिकोण निष्पत्तियों में व्यक्त करना:

सिद्ध करें कि-

(i) $\sin A = 3\sin\frac{A}{3} - 4\sin^3\frac{A}{3}$

(ii) $\cos A = 4\cos^3\frac{A}{3} - 3\cos\frac{A}{3}$

(iii) $\tan A = \dfrac{3\tan\frac{A}{3} - \tan^3\frac{A}{3}}{1 - 3\tan^2\frac{A}{3}}$

हल: (i) $\because \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

मान लें कि $3\theta = A$

$\therefore \theta = \frac{A}{3}$

3θ तथा θ का मान रखने पर,

$\sin A = 3\sin\frac{A}{3} - 4\sin^3\frac{A}{3}$

इसी प्रकार $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ तथा

$\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3}{1 - 3\tan^2\theta}$ की मदद से

(ii) तथा (iii) को सिद्ध करें।

https://www.studiestoday.com

प्रमुख सूत्र

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}$$

$$= \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$$

$$\cos A = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}$$

$$= 2\cos^2\frac{A}{2} - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$$

$$\tan A = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$$

$$1-\cos A = 2\sin^2\frac{A}{2}$$

$$1+\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

$$\sin A = 3\sin\frac{A}{3} - 4\sin^3\frac{A}{3}$$

$$\cos A = 4\cos^3\frac{A}{3} - 3\cos\frac{A}{3}$$

$$\tan A = \frac{3\tan\frac{A}{3} - \tan^3\frac{A}{3}}{1-3\tan^2\frac{A}{3}}$$

https://www.studiestoday.com

उदाहरण: 5 $\sin 15°$ तथा $\cos 15°$ का मान ज्ञात करें।

हल: $\because \; 2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A$

मानें कि $\frac{A}{2} = 15°$

$\therefore \quad A = 30°$

अब $\quad 2\sin^2 15° = 1 - \cos 30°$

या, $\quad \sin^2 15° = \dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$

या, $\quad \sin 15° = \dfrac{\pm\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{\pm\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}$

$$= \frac{\pm\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{2\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

पुन: $\quad \cos 15° = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos 30°}{2}} = \dfrac{\pm\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$$= \frac{\pm\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$\because$ 15° प्रथम पाद में है। अत: $\sin 15°$ तथा $\cos 15°$ के मान धनात्मक होंगे। अत: ऋणात्मक चिह्न को अमान्य करते हुए-

$$\sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

द्वितीय विधि-

$$\because \sin\frac{A}{2} + \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\sin^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}}$$

$= \pm\sqrt{1+\sin A}$ ....(i)

और $\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{1-\sin A}$ ....(ii)

मान लें कि $A = 30°$

$\therefore \quad \sin 15° + \cos 15° = \pm\sqrt{1+\sin 30°} = \pm\sqrt{1+\frac{1}{2}}$

$= \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\because \quad \sin 15°$ तथा $\cos 15°$ धनात्मक है।

$\therefore \quad \sin 15° + \cos 15° = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ ....(iii)

पुनः $\quad \sin 15° - \cos 15° = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\because \quad \sin 15° < \cos 15°$

$\therefore \quad \sin 15° - \cos 15°$ का मान ऋणात्मक होगा।

$\therefore \quad \sin 15° - \cos 15° = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ ....(iv)

अब $\quad \sin 15° + \cos 15° = +\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\sin 15° - \cos 15° = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

दोनों को जोड़ने पर, $2\sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

या, $\quad \sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

प्रथम में दूसरे को घटाने पर,

$2\cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$

या, $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

विधि- $\sin 15^\circ = \sin(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

रण 6: जब $\theta = 310^\circ$ तब $\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}$ का चिह्न बतावें।

$$\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}$$
$$= \sin 155^\circ + \cos 155^\circ$$
$$= \sqrt{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 155^\circ + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 155^\circ\right\}$$
$$= \sqrt{2}\{\sin 155^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 155^\circ \cdot \sin 45^\circ\}$$
$$= \sqrt{2}\{\sin(155^\circ + 45^\circ)\}$$
$$= \sqrt{2}\sin 200^\circ$$

200°, तृतीय पाद में है जिसमें $\sin\theta$, ऋणात्मक होता है।

$\therefore$ $\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}$ का चिह्न इस खास स्थिति में ऋणात्मक होगा।

हरण 7: $\sin 22\frac{1^\circ}{2}$ का मान बतावें।

: $\because$ $2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A$

मान लें कि $A = 45^\circ$

$\therefore$ $2\sin^2\frac{45^\circ}{2} = 1 - \cos 45^\circ$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

या, $\sin^2 22\frac{1^\circ}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

या, $\sin 22\frac{1^\circ}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

उदाहरण 8: सिद्ध करें कि

$$\cos A = \frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$$

हल: $\cos A = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}$

$$= \frac{\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$$ ($\cos^2\frac{A}{2}$ से अंश तथा हर में भाग देने)

उदाहरण 9: $\tan\frac{A}{2}$ को $\tan A$ के रूप में व्यक्त करें।

हल: $\because$ $\tan A = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$

या, $1-\tan^2\frac{A}{2} = 2\tan\frac{A}{2}/\tan A$

या, $1+\frac{1}{\tan^2 A} = \frac{1}{\tan^2 A} + 2\tan\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{\tan A} + \tan^2\frac{A}{2}$

या, $\frac{\tan^2 A + 1}{\tan^2 A} = \left(\frac{1}{\tan A} + \tan\frac{A}{2}\right)^2$

या, $\left(\frac{1}{\tan A} + \tan\frac{A}{2}\right) = \pm\frac{\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}$

या, $\tan\frac{A}{2} = \frac{\pm\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A} - \frac{1}{\tan A}$

$$= \pm\frac{\sqrt{1+\tan^2 A} - 1}{\tan A}$$

उदाहरण 10: $\tan 15^\circ$ तथा $\tan 7\frac{1^\circ}{2}$, के रूप में व्यक्त करें।

हलः $\because$ $$\tan\frac{A}{2} = \pm\frac{\sqrt{1+\tan^2}-1}{\tan A}$$

मान लें कि $A = 30^\circ$

$\therefore$ $$\tan 15^\circ = \pm\frac{\sqrt{1+\tan^2 30^\circ}-1}{\tan 30^\circ}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{1+\frac{1}{3}}-1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \pm\left(\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}-1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right) = \pm\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{1}\right)$$

$$= \pm(2-\sqrt{3})$$

$\because$ 15° प्रथम पद में होता है।

$\therefore$ 15° का मान धनात्मक होगा।

$\therefore$ $\tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}$

पुनः सूत्र से, $$\tan\frac{A}{2} = \pm\frac{\sqrt{1+\tan^2 A}-1}{\tan A}$$

मानें कि $A = 15^\circ$

$\therefore$ $$\tan 7\frac{1^\circ}{2} = \pm\frac{\sqrt{1+\tan^2 15^\circ}-1}{\tan 15^\circ}$$

या, $$\tan 7\frac{1^\circ}{2} = \pm\frac{\sqrt{1+(2-\sqrt{3})^2}-1}{2-\sqrt{3}}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{1+4+3-4\sqrt{3}}-1}{2-\sqrt{3}}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{8-4\sqrt{3}}-1}{2-\sqrt{3}}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2-2\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}-1}}{2-\sqrt{3}}$$

$$=\pm\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})-1}{2-\sqrt{3}}$$

$\because$ $\tan 7\frac{1^\circ}{2}$ का मान धनात्मक है। इसलिए ऋणात्मक चिह्न को अमान्य करते हुए-

$$\tan 7\frac{1^\circ}{2}=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})-1}{2-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2}-1)(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2}{4-3}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{1}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{1}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$$

दूसरी विधि: हम जानते हैं कि $\tan\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{\sin A}$

मान लें कि $A=15^\circ$

$$\therefore \quad \tan\frac{15^\circ}{2}=\frac{1-\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}$$

$$=\frac{1-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}} \qquad (\sin 15^\circ \text{ तथा } \cos 15^\circ \text{ का मान बैठाने पर})$$

$$=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$$

$$=\frac{2\sqrt{6}-4+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3-1}$$

$$=\frac{2(\sqrt{6}-2+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2}$$

$$=\sqrt{6}-\sqrt{3}-2+\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{3}(\sqrt{2}-1) - \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$$

$$= (\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

$$= (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$$

उदाहरण 11: सिद्ध करें कि

$$\frac{1-\cos A}{\sin A} = \tan\frac{A}{2}$$

हल: बायाँ पक्ष $= \dfrac{1-\cos A}{\sin A}$

$$= \frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}} = \tan\frac{A}{2}$$

= दायाँ पक्ष

उदाहरण 12: सिद्ध करें कि

$$\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = \tan^2(45^\circ + \frac{\theta}{2})$$

हल: बायाँ पक्ष $= \dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$

$$= \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2})^2}{(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2})^2}$$

$$= \left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}+\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}-\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\tan\frac{\theta}{2}+1}{\tan\frac{\theta}{2}-1}\right)^2=\left(\frac{1+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\theta}{2}}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\tan 45^\circ+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan 45^\circ\cdot\tan\frac{\theta}{2}}\right)^2=\tan^2(45^\circ+\frac{\theta}{2})$$

= दायाँ पक्ष

उदाहरण 13: सिद्ध करें कि

$$\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}=\tan\frac{\theta}{2}$$

हल: बायाँ पक्ष $=\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$

$$=\frac{(1-\cos\theta)+\sin\theta}{(1+\cos\theta)+\sin\theta}$$

$$=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)}$$

$= \tan\frac{\theta}{2}$

= दायाँ पक्ष

उदाहरण-14 सिद्ध करें कि-

$$\tan 6^0 \cdot \tan 42^0 \cdot \tan 66^0 . \tan 78^0 = 1$$

हल: बायाँ पक्ष $= \tan 6^0 . \tan 42^0 . \tan 66^0 . \tan 78^0$

$$= \frac{\sin 6^0 . \sin 42^0 . \sin 66^0 . \sin 78^0}{\cos 6^0 . \cos 42^0 . \cos 66^0 . \cos 78^0}$$

$$= \frac{\{2\sin 66^0 . \sin 6^0\}\{2\sin 78^0 . \sin 42^0\}}{\{2\cos 66^0 . \cos 6^0\}\{2\cos 78^0 . \cos 42^0\}}$$

$$= \frac{\{\cos(66^0 - 6^0) - \cos(66^0 + 6^0)\}\{\cos(78^0 - 42^0) - \cos(78^0 + 42^0)\}}{\{\cos(66^0 + 6^0) + \cos(66^0 - 6^0)\}\{\cos(78^0 - 42^0) + \cos(78^0 + 42^0)\}}$$

$$= \frac{(\cos 60^0 - \cos 72^0)(\cos 36^0 - \cos 120^0)}{(\cos 72^0 + \cos 60^0)(\cos 120^0 + \cos 36^0)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} - \sin 18^0\right)\left\{\cos 36^0 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\}}{\left(\sin 18^0 + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + \cos 36^0\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{2-\sqrt{5}+1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1+2}{4}\right)}{\left(\frac{\sqrt{5}-1+2}{4}\right)\left(\frac{-2+\sqrt{5}+1}{4}\right)} = \frac{9-5}{5-1}$$

$= 1 =$ दायाँ पक्ष।

उदाहरण-15 सिद्ध करो कि

$$\cos\frac{A}{2^n}=\frac{1}{2}\sqrt{\left\{2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\ldots+\sqrt{2+2\cos A})}}\right\}}$$

(जहाँ करणी चिह्नों की संख्या n है)

हल: $\because \quad 2\cos^2\frac{A}{2}=1+\cos A$

or, $\quad 4\cos^2\frac{A}{2}=2+2\cos A$

or, $\quad 2\cos\frac{A}{2}=\sqrt{2+2\cos A} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(i)$

अब $\quad A=\frac{A}{2},\frac{A}{2^2},\frac{A}{2^3}$ रखने पर

$$2\cos\frac{A}{2^2}=\sqrt{2+2\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos A}}$$

$$2\cos\frac{A}{2^3}=\sqrt{2+2\cos\frac{A}{2^2}}$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos A}}}$$

....

....

इसी प्रकार बढ़ते हुए क्रम में हम लिख सकते हैं कि-

$$2\cos\frac{A}{2^n}=\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots..+\sqrt{2+2\cos A}}}$$

$$\therefore \cos\frac{A}{2^n}=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots..+\sqrt{2+2\cos A}}}}\right\}$$

दायाँ पक्ष $=\frac{1}{2}\sqrt{\left\{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\ldots+\sqrt{2+2\cos A}}}\right\}}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left\{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\ldots+2\cos\frac{A}{2}}}\right\}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left\{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\ldots+\sqrt{2+2\cos\frac{A}{2}}}}\right\}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left\{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\ldots+2\cos\frac{A}{2^2}}}\right\}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left\{2+\sqrt{2+\ldots\ldots+\sqrt{2+2\cos\frac{A}{2^2}}}\right\}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left\{2+\sqrt{2+\ldots\ldots+\sqrt{2+2\cos\frac{A}{2^3}}}\right\}}$$

$\because$ करणी चिह्न की संख्या प्रश्न में n है।

$\therefore$ दायाँ पक्ष $=\frac{1}{2}\times 2\cos\frac{A}{2^n}$

$$=\cos\frac{A}{2^n}=\text{ बायाँ पक्ष}$$

उदाहरण-16

यदि $\sin\alpha-\sin\beta=\frac{1}{6}$ तथा $\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{8}$ हो, तो सिद्ध करें कि-

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\pm\frac{5}{48}$$

हल:

$$(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2$$

$$=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2(\cos\alpha.\cos\beta+\sin\alpha.\sin\beta)$$

$$=2\{1-\cos(\alpha-\beta)\}=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$$

लेकिन $(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2=\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2$

या, $4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{100}{64\times36}$

या, $4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{100}{64\times36}=\left(\frac{10}{48}\right)^2$

$\therefore$ $2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\pm\frac{10}{48}$

या, $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\pm\frac{5}{48}$

उदाहरण-17: यदि α और β, समीकरण $a\cos\theta+b\sin\theta=c$ के दो भिन्न हल हों, तो सिद्ध करें कि-

(i) $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{b}{a}$

(ii) $\sin(\alpha+\beta)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$

(iii) $\cos(\alpha+\beta)=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

(iv) $\tan(\alpha+\beta)=\frac{2ab}{a^2-b^2}$

हल:

प्रथम विधि:

$\because$ α,β समीकरण $a\cos\theta+b\sin\theta=c$ के दो हल हैं।

$\therefore$ $a\cos\alpha+b\sin\alpha=c$ ....(i)

तथा $a\cos\beta+b\sin\beta=c$ ....(ii)

(i) में (ii) को घटाने पर,

$$a(\cos\alpha - \cos\beta) + b(\sin\alpha - \sin\beta) = 0$$

या, $$a2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\beta-\alpha}{2} + b.2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$$

या, $$2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\left\{a\sin\frac{\alpha+\beta}{2} - b\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right\} = 0$$

$\because$ $\alpha \neq \beta$; $\therefore \sin\frac{\beta-\alpha}{2} \neq 0$

या, $$a\sin\frac{\alpha+\beta}{2} - b\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 0$$

या, $$a\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = b\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$\therefore$ $$\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{b}{a}$$

अब $$\sin(\alpha+\beta) = \frac{2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{2\times\frac{b}{a}}{1+\frac{b^2}{a^2}}$$

$$= \frac{2ab}{a^2+b^2}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{1-\frac{b^2}{a^2}}{1+\frac{b^2}{a^2}}$$

$$= \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{2\frac{b}{a}}{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

$$= \frac{2ab}{a^2-b^2}$$

द्वितीय विधि:

दिये हुए समीकरण $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ में,

$$\cos q = \frac{1-\tan^2\frac{q}{2}}{1+\tan^2\frac{q}{2}} \text{ एवं } \sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \text{ रखने पर,}$$

$$a\left(\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)+b\left(\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)=c$$

या, $$(a+c)\tan^2\frac{\theta}{2}-2b\tan\frac{\theta}{2}+(c-a)=0$$

या, $\tan\frac{\theta}{2}$ में एक द्विघात समीकरण है।

$\therefore$ इसके दो मूल $\tan\frac{\alpha}{2}$ एवं $\tan\frac{\beta}{2}$ होंगे।

$\therefore$ $$\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}=\frac{2b}{a+c}$$

या, $$\tan\frac{\alpha}{2}.\tan\frac{\beta}{2}=\frac{c-a}{a+c}$$

$$=\frac{c-a}{c+a}$$

अब $$\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}.\tan\frac{\beta}{2}}$$

$\therefore$ $$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\frac{2b}{a+c}}{1-\frac{c-a}{a+c}}=\frac{b}{a}$$

अब $$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\frac{2\times\frac{b}{2}}{1+\frac{b^2}{a^2}}$$

$$=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$=\frac{1-\frac{b^2}{a^2}}{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$=\frac{2\frac{b}{a}}{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{2ab}{a^2-b^2}$$

उदाहरण18: यदि α और β , समीकरण $a\cos\theta+b\sin\theta=c$ के दो भिन्न हल हो, तो सिद्ध करें कि- $\sin(\alpha+\beta)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$

हल: $\because$ α,β समीकरण के हल हैं।

$\because$ $a\cos\alpha+b\sin\alpha=c$ ....(I)

तथा $a\cos\beta+b\sin\beta=c$ ....(II)

(I) में (I) को घटाने पर,

$a(\cos a-\cos b)+(\sin\alpha-\sin\beta)$ होगा।

$a(\cos\alpha-\cos\beta)+b(\sin\alpha-\sin\beta)=0$

या, $a.2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\beta-\alpha}{2}+b2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0$

या, $2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\left\{a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-b\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right\}=0$

$\because$ $\alpha\neq\beta; \therefore a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-b\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=0$

या, $a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=b\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

या, $\dfrac{a}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{b}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}=k$ (माने)

$\therefore a=k\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ तथा $b=k\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

अब दायाँ पक्ष $=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}=\dfrac{2.k\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.k\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\left(k^2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+k^2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$

$=\dfrac{k^2 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{k^2\left(\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$

$=\sin(\alpha+\beta)=$ बायाँ पक्ष

उदाहरण 19: यदि $\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{\phi}{2}$ तो सिद्ध करें कि-

$$\cos\theta=\frac{a\cos\phi+b}{a+b\cos\phi}$$

हल: $\because$ $\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{\phi}{2}$

या, $\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{\phi}{2}$

अब $\cos\theta = \dfrac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}} = \dfrac{1-\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)\tan^2\dfrac{\phi}{2}}{1+\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)\tan^2\dfrac{\phi}{2}}$

$$= \frac{(a+b)-(a-b)\tan^2\dfrac{\phi}{2}}{a+b+(a-b)\tan^2\dfrac{\phi}{2}}$$

$$= \frac{a\left(1-\tan^2\dfrac{\phi}{2}\right)+b\left\{1+\tan^2\dfrac{\phi}{2}\right\}}{a\left(1-\tan^2\dfrac{\phi}{2}\right)+b\left(1-\tan^2\dfrac{\phi}{2}\right)}$$

अब हर तथा अंश में $\left(1+\tan^2\dfrac{\phi}{2}\right)$ से भाग देने पर,

$$= \frac{a\left(\dfrac{1-\tan^2\dfrac{\phi}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\phi}{2}}\right)+b}{a+b\left(\dfrac{1-\tan^2\dfrac{\phi}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\phi}{2}}\right)}$$

$= \dfrac{a\cos\phi+b}{a+b\cos\phi} =$ दायाँ पक्ष

उदाहरण 20: यदि $\cos\theta+\cos\phi=\dfrac{1}{3}$

और $\sin\theta+\sin\phi=\dfrac{1}{4}$, तो सिद्ध करें कि-

$$\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)=\pm\frac{5}{24}$$

हल: $\because \quad \cos\theta + \cos\phi = \frac{1}{3}$ ....(i)

$$\sin\theta + \sin\phi = \frac{1}{4} \qquad \text{....................(i)}$$

$$\therefore \quad (\cos\theta + \cos\phi)^2 + (\sin\theta + \sin\phi)^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$$

या, $2 + 2\cos\theta.\cos\phi + 2\sin\theta.\sin\phi = \frac{16+9}{144}$

या, $2 + 2\cos(\theta - \phi) = \frac{25}{144}$

या, $2\{1 + \cos(\theta - \phi)\} = \frac{25}{144}$

या, $2.2\cos^2\frac{\theta - \phi}{2} = \frac{25}{144}$

या, $2\cos\frac{\theta - \phi}{2} = \pm\frac{5}{12}$

या, $\cos\frac{\theta - \phi}{2} = \pm\frac{5}{24}$

---

https://www.studiestoday.com

प्रश्नावली-7

1. $\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}$ चिह्न बतायें जबकि (i) $\theta=200^0$ (ii) $\theta=100^0$

2. $\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}$ का चिह्न बतायें जबकि (i) $\theta=200^0$ (ii) $\theta=100^0$

3. $\cos 22\frac{1^0}{2}$ का मान ज्ञात करें।

सिद्ध करें कि-

4. $\frac{1-\cos A}{1+\cos A}=\tan^2\frac{A}{2}$

5. $\frac{1+\cos A}{\sin A}=\cot\frac{A}{2}$

6. $\frac{\sin A}{1-\cos A}=\cot\frac{A}{2}$

7. $\frac{1-\sin A}{\cos A}=\tan\left(45^0-\frac{A}{2}\right)$

8. $\frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{1}{2}\left(1-\cot\frac{\theta}{2}\right)^2$

9. $\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}\times\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}=\tan\frac{\theta}{2}$

10. $\tan\frac{\theta}{2}+\cot\frac{\theta}{2}=2\operatorname{cosec}\theta$

11. $\cot\frac{A}{2}-\tan\frac{\theta}{2}=2\cot A$

12. $1+\tan A.\tan\frac{A}{2}=\sec A$

13. $\frac{\sin\theta+\sin\phi+\sin(\theta+\phi)}{\sin\theta+\sin\phi-\sin(\theta+\phi)}=\cot\frac{\theta}{2}.\cot\frac{\phi}{2}$

14. $\frac{1-\cos\theta+\cos\beta-\cos(\theta+\beta)}{1+\cos\theta-\cos\beta-\cos(\theta+\beta)}=\tan\frac{\theta}{2}.\cot\frac{\beta}{2}$

15. यदि $\sin\theta+\sin\phi=m$ और $\cos\theta+\cos\phi=n$ तो सिद्ध करें कि $\sin(\theta+\phi)=\frac{2mn}{m^2+n^2}$

16. यदि $\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\phi}{2}$ तो सिद्ध करें कि $\cos\theta=\frac{\cos\phi+e}{1+e\cos\phi}$

17. सिद्ध करें कि- $\cot 6^0.\cot 42^0.\cot 66^0.\cot 78^0=1$

18. यदि $\sin\alpha+\sin\beta=a$ और $\cos\alpha+\cos\beta=b$ तो सिद्ध करें कि-

    (i) $\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}(a^2+b^2-2)$

    (ii) $\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$

    (iii) $\sin(\alpha+\beta)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$

19. सिद्ध करें कि-

    (i) $\sin 7\frac{1^0}{2}=\frac{\sqrt{4-\sqrt{2}-\sqrt{6}}}{2\sqrt{2}}$

    (ii) $\cot 7\frac{1^0}{2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{6}$

20. यदि $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ एवं $\cos\beta=\frac{5}{13}$ हो, तो सिद्ध करें कि- $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\pm\frac{8}{\sqrt{65}}$

21. यदि $\sec(\phi+\alpha)+\sec(\phi-\alpha)=2\sec\phi$, तो सिद्ध करें कि $\cos\phi=\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

—

1.7 त्रिकोणमितीय तादात्म्य (सर्वसमिकाएँ)

(Trigonometric identities)

प्रस्तावना:

बीजगणित तथा त्रिकोणमिति में आप तादात्म्य (सर्वसमिका) (Identity) से पूर्व परिचित है। पूर्व के अध्यायों में आपने जितने त्रिकोणमितीय सूत्रों की जानकारी प्राप्त की है, वे सब तादात्म्य (सर्वसमिका) है।

हम यहाँ मुख्यत: तीन या तीन से अधिक कोणों से सम्बंधित प्रतिबंधित तादात्म्यों के विषय में जानकारी प्राप्त करना चाहेंगे। त्रिभुज के तीनों अंत: कोणों का योग 180^0 होता है। अत: $A+B+C=180^0=\pi^c$ पर आधारित तादात्म्यों का त्रिकोणमिति में अपना एक विशेष महत्व है। आगे के अभ्यास त्रिभुज के गुण में भी आप इसकी उपयोगिता का अनुभव करेंगे। $A+B+C=\pi^c$ का अर्थ है π^c।

इस अध्याय में पूर्व में पढ़े विभिन्न सूत्रों का उपयोग होता है। अत: पूर्व के सूत्रों को याद कर लेना चाहिए। इससे इस अध्याय के प्रश्नोत्तर में बड़ी सरलता आ जाएगी।

उदाहरण 1: यदि $A+B+C=\pi$ तो सिद्ध करें कि-

(i) $\sin(B+C)=\sin A$

(ii) $\cos(B+C)=-\cos A$

(iii) $\tan(A+B)=-\tan C$

हल: (i) $\because$ $A+B+C=\pi$

या, $(B+C)=\pi-A$

या, $\sin(B+C)=\sin(\pi-A)$

या, $\sin(B+C)=\sin A$

(ii) $\because$ $A+B+C=\pi$

या, $B+C=\pi-A$

या, $\cos(B+C)=\cos(\pi-A)=-\cos A$

(iii) $\because$ $A+B+C=\pi$

या, $A+B=\pi-C$

या, $\tan(A+B)=\tan(\pi-C)$

या, $\tan(A+B)=-\tan C$

उदाहरण 2: यदि $A+B+C=\pi$ तो सिद्ध करें कि–

(i) $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}$

(ii) $\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}$

(iii) $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cot\frac{C}{2}$

हल: $\because$ (i) $A+B+C=\pi$

या, $A+B+C=\pi-C$

या, $\frac{A+B}{2}=\frac{\pi-C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$

या, $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$

$$=\sin\left(90^0-\frac{C}{2}\right)$$

$$=\cos\frac{C}{2}$$

(ii) $\frac{B+C}{2}=\frac{\pi-A}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$

या, $\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)$

$$=\sin\frac{A}{2}$$

(iii) $\frac{A+B}{2}=\frac{\pi-C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$

या, $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$

$$=\cot\frac{C}{2}$$

उदाहरण 3: यदि $A+B+C+D=360^0$ तो सिद्ध करें कि-

(i) $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)=\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)$

(ii) $\cos\frac{A+B}{2}=-\cos\frac{C+D}{2}$

(iii) $\sin(A+B)=-\sin(C+D)$

(iv) $\cos(A+B)=\cos(C+D)$

हल: (i) $A+B+C+D=360^0$

या, $A+B=360^0-C-D$

या, $\frac{A+B}{2}=180^0-\frac{C+D}{2}$

या, $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)=\sin\left(180^0-\frac{C+D}{2}\right)$

$=\sin\frac{C+D}{2}$

(ii) पुन: $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cos\left\{180^0-\frac{C+D}{2}\right\}$

$=-\cos\frac{C+D}{2}$

(iii) $\sin(A+B)=\sin\{360^0-(C+D)\}$

$=-\sin(C+D)$

(iv) $\cos(A+B)=\cos\{360^0-(C+D)\}$

$=\cos(C+D)$

उदाहरण 4: यदि $A+B+C=\pi$ तो सिद्ध करें कि-

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A.\sin B.\sin C$

हल: बायाँ पक्ष $=\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$

$=2\sin A.\cos A+2\sin\frac{2B+2C}{2}.\cos\frac{2B-2C}{2}$

$= 2\sin A.\cos A + 2\sin(B+C).\cos(B-C)$

$(\because \sin(B+C) = \sin(180^\circ - A) = \sin A)$

$= 2\sin A.\cos A + 2\sin A.\cos(B-C)$

$= 2\sin A\{\cos A + \cos(B-C)\}$

$= 2\sin A\{-\cos(B+C) + \cos(B-C)\}$

(क्योंकि $\cos(B+C) = -\cos A$)

$= 2\sin A\{\cos(B-C)\} - \cos(B+C)$

$= 2\sin A \times 2\sin B.\sin C$

$= 4\sin A.\sin B.\sin C.$

उदाहरण 5: यदि $A+B+C = \pi^c = 180^\circ$ तो सिद्ध करें कि-

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

हल: बायाँ पक्ष $= \cos A + \cos B + \cos C$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 1 + 2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$(\because \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$$

$$\therefore \cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2})$$

$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right\}$$

$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right\}$$

$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)\right.$$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}\times 2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}$$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

उदाहरण 6: यदि $A+B+C=\pi$ तो सिद्ध करें कि-

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A.\cos B.\cos C$$

हल: बायाँ पक्ष $=\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$

$$=\frac{1}{2}\{2\cos^2 A+2\cos^2 B+2\cos^2 C\}$$

$$=\frac{1}{2}\{1+\cos 2A+1+\cos 2B+2\cos^2 C\}$$

$$=\frac{1}{2}\ \{2+\cos 2A+\cos 2B+2\cos^2 C\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{2+2\cos\frac{2A+2B}{2}.\cos\frac{2A-2B}{2}+2\cos^2 C\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\{2+2\cos(A+B).\cos(A-B)+2\cos^2 C\}$$

$$=\frac{1}{2}\{2+2(-\cos C).\cos(A-B)+2\cos^2 C\}$$

($\because$ जब $A+B+C=\pi$ तो $\cos(A+B)=-\cos C$)

$$=1-\cos C.\cos(A-B)+\cos^2 C$$

$$=1+\cos C\{\cos C-\cos(A-B)\}$$

$$=1+\cos C\{-\cos(A+B)-\cos(A-B\}$$

$$=1+(-)\cos C\{\cos(A+B)+\cos(A-B\}$$

$$=1-2\cos A.\cos B.\cos C$$

उदाहरण 7: यदि $A+B+C=\pi$, तो सिद्ध करें कि-

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi-A}{4}.\cos\frac{\pi-B}{4}.\cos\frac{\pi-C}{4}$$

हल: $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$

$$=\sin\frac{B+C}{2}+2\cos\frac{B+C}{4}.\cos\frac{B-C}{4}$$

$$=2\sin\frac{B+C}{4}.\cos\frac{B+C}{4}+2\cos\frac{B+C}{4}.\cos\frac{B-C}{4}$$

$$=2\cos\frac{B+C}{4}\left\{\sin\frac{B+C}{4}+\cos\frac{B-C}{4}\right\}$$

$$=2\cos\frac{B+C}{4}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B+C}{4}\right)+\cos\frac{B-C}{4}\right\}$$

$$=2\cos\frac{B+C}{4}\left\{\cos\frac{2\pi-B-C}{4}+\cos\frac{B-C}{4}\right\}$$

$$=2\cos\frac{B+C}{4}\left\{2\cos\frac{2\pi-B-C+B-C}{8}.\cos\frac{2\pi-B-C-B+C}{8}\right\}$$

$$=2\cos\frac{B+C}{4}.2\cos\frac{\pi-C}{4}.\cos\frac{\pi-B}{4}$$

$$=4\cos\frac{A+B+C-A}{4}.\cos\frac{\pi-B}{4}.\cos\frac{\pi-C}{4}$$

$$=4\cos\frac{\pi-A}{4}.\cos\frac{\pi-B}{4}.\cos\frac{\pi-C}{4}$$

उदाहरण 8: यदि $A+B+C=90^0$ तो सिद्ध करें कि-

$$\cot A+\cot B+\cot C=\cot A.\cot B.\cot C$$

हल: $\because A+B+C=90^0$

या, $A+B=90^0-C$

या, $\cot(A+B)=\cot(90^0-C)$

या, $\dfrac{\cot A.\cot B-1}{\cot A+\cot B}=\tan C=\dfrac{1}{\cot C}$

या, $\cot A+\cot B=\cot A.\cot B.\cot C-\cot C$

या, $\cot A+\cot B+\cot C=\cot A.\cot B.\cot C$

उदाहरण 9: यदि $A+B+C=90^0$, तो सिद्ध करें कि-

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=1-2\sin A.\sin B.\sin C$$

हल: $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$

$$=\frac{1}{2}\{2\sin^2 A+2\sin^2 B+2\sin^2 C\}$$

$$=\frac{1}{2}\{2\sin^2 A+1-\cos 2B+1-\cos 2C\}$$

$$=\frac{1}{2}\{2+2\sin^2 A-(\cos 2B+\cos 2C)\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{2+2\sin^2 A-2\cos\frac{2B+2C}{2}.\cos\frac{2B-2C}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\times 2\{1+\sin^2 A-\cos(B+C).\cos(B-C)\}$$

$$=1+\sin^2 A-\sin A.\cos(B-C)$$

(जब $A+B+C=90^0$, तब $\cos(B+C)=\sin A$)

$$=1+\sin A\{\sin A-\cos(B-C)\}$$

$$=1+\sin A\{\cos(B+C)-\cos(B-C)\}$$

$$=1+\sin A.2\sin\frac{B+C+B-C}{2}.\sin\frac{B-C-B-C}{2}$$

$$=1+\sin A.2\sin B.\sin(-C)$$

$$=1-2\sin A.\sin B.\sin C$$

द्वितीय विधि:

$\because\ A+B+C=90^0$

या, $A+B=90^0-C$

या, $\cos(A+B)=\cos(90^0-C)$

या, $\cos A.\cos B-\sin A.\sin B=\sin C$

या, $\cos A.\cos B=\sin A.\sin B+\sin C$

या, $(\cos A.\cos B)^2=(\sin A.\sin B+\sin C)^2$

या, $\cos^2 A\cdot\cos^2 B=\sin^2 A\cdot\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$

या, $(1-\sin^2 A).(1-\sin^2 B)=\sin^2 A.\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin A.\sin B.\sin C$

या, $1-\sin^2 B-\sin^2 A+\sin^2 A.\sin^2 B$

$=\sin^2 A.\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin A.\sin B.\sin C$

$$1-2\sin A.\sin B.\sin C=\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$$

या, $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=1-2\sin A.\sin B.\sin C$

उदाहरण 10: यदि $x+y+z=xyz$, तो त्रिकोणमिति से सिद्ध करें कि-

$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2x}{1-x^2}.\frac{2y}{1-y^2}.\frac{2z}{1-z^2}$$

हल: $\because\ x+y+z=xyz$

मान लें कि $x=\tan A, y=\tan B$ और $z=\tan C$

$\therefore\quad \tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$

या, $\tan A+\tan B=\tan A.\tan B.\tan C-\tan C$

या, $\tan A+\tan B=\tan C(\tan A.\tan B-1)$

या, $\dfrac{\tan A+\tan B}{\tan A.\tan B-1}=\tan C$

या, $\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A.\tan B}=-\tan C$

या, $\tan(A+B)=\tan(180^0-C)$

या, $A+B=180^0-C$

या, $A+B+C=180^0$

या, $2A+2B+2C=360^0$

या, $\tan(2A+2B)+\tan(360^0-2C)$

या, $\dfrac{\tan 2A+\tan 2B}{1-\tan 2A.\tan 2B}=-\tan 2C$

या, $\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=\tan 2A.\tan 2B.\tan 2C$

या, $\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}+\dfrac{2\tan B}{1-\tan^2 B}+\dfrac{2\tan C}{1-\tan^2 C}$

$$=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\times\frac{2\tan B}{1-\tan^2 B}\times\frac{2\tan C}{1-\tan^2 C}$$

या, $\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2x}{1-x^2}.\frac{2y}{1-y^2}.\frac{2z}{1-z^2}$

उदाहरण 11: यदि $A+B+C+D=360^0$ तो सिद्ध करें कि-

$$\cos A-\cos B+\cos C-\cos D$$

$$=4\sin\frac{C+D}{2}.\sin\frac{B+C}{2}.\cos\frac{A+C}{2}$$

$$=4\sin\frac{A+B}{2}.\sin\frac{A+D}{2}.\cos\frac{A+C}{2}$$

हल: बायाँ पक्ष $=\cos A-\cos B+\cos C-\cos D$

$$=(\cos A+\cos C)-(\cos B+\cos D)$$

$$=2\cos\frac{A+C}{2}.\cos\frac{A-C}{2}-2\cos\frac{B+D}{2}.\cos\frac{B-D}{2}$$

$$=2\cos\frac{A+C}{2}.\cos\frac{A-C}{2}-2\cos\frac{A+B+C+D-A-C}{2}.\cos\frac{B-D}{2}$$

$$=2\cos\frac{A+C}{2}.\cos\frac{A-C}{2}-2\cos\left(\pi-\frac{A+C}{2}\right)\cos\frac{B-D}{2}$$

$$=2\cos\frac{A+C}{2}.\cos\frac{A-C}{2}+2\cos\frac{A+C}{2}.\cos\frac{B-D}{2}$$

$$=2\cos\frac{A+C}{2}\left\{\cos\frac{A-C}{2}+\cos\frac{B-D}{2}\right\}$$

$$=2\cos\frac{A+C}{2}.2\cos\frac{A-C+B-D}{4}.\cos\frac{A-C-B+D}{4}$$

$$=4\cos\frac{A+C}{2}.\cos\frac{A+B+C+D-2C-2D}{4}$$

$$.\cos\frac{A+B+C+D-2C-2B}{4}$$

$$=4\cos\frac{A+C}{2}.\cos\left(90^0-\frac{C+D}{2}\right).\cos\left(90^0-\frac{B+C}{2}\right)$$

$$=4\cos\frac{A+C}{2}.\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{B+C}{2} \quad \text{..............(i)}$$

$$=4\cos\frac{A+C}{2}.\sin\frac{A+B+C+D-(A+B)}{2}.\sin\frac{A+B+C+D-(A+}{2}$$

$$=4\cos\frac{A+B}{2}.\sin\frac{A+B}{2}.\sin\frac{A+D}{2}$$

$$=4\sin\frac{A+B}{2}.\sin\frac{A+D}{2}.\cos\frac{A+C}{2} \qquad \text{.............(ii)}$$

उदाहरण-12 यदि $A+B+C=180^0, \tan A=2, \tan B=3$, तो सिद्ध करें कि- $C=45^0$

हल: $A+B+C=180^0$

या, $A+B=180^0-C$

या, $\tan(A+B)=\tan(180^0-C)$

या, $\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A.\tan B}=-\tan C$

या, $\frac{2+3}{1-2\times3}=-\tan C$

या, $\frac{5}{-5}=-\tan C$

या, $\tan C=1$

या, $\tan C=\tan 45^0$ या $\tan 225^0$

या, $C=45^0$ या 225^0

$\because$ $A+B+C=180^0$

$\therefore$ $C\neq225^0$

$\therefore$ $C=45^0$

प्रश्नमाला-8

1. यदि $A+B+C=\pi(180^0)$ तो सिद्ध करें कि-
   (i) $\sin(A+B)=\sin C$
   (ii) $\sin(A+C)=\sin B$
   (iii) $\cos(A+B)=-\cos C$
   (iv) $\cos(A+C)=-\cos B$
   (v) $\tan(B+C)=-\tan A$
   (vi) $\tan(A+C)=-\tan B$
2. यदि $A+B+C=\pi$ तो सिद्ध करें कि-
   (i) $\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}$
   (ii) $\sin\frac{A+C}{2}=\cos\frac{B}{2}$
   (iii) $\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$
   (iv) $\cos\frac{A+C}{2}=\sin\frac{B}{2}$
   (v) $\tan\frac{(B+C)}{2}=\cot\frac{A}{2}$
   (vi) $\tan\frac{A+C}{2}=\cot\frac{B}{2}$
3. यदि $A+B+C=\pi$ तो सिद्ध करें कि-
   (i) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A.\cos B.\cos C$
   (ii) $\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C=4\cos A.\cos B.\cos C$
   (iii) $\cos 2A-\cos 2B+\cos 2C=1-4\sin A.\sin B.\sin C$
   (iv) $\sin 2A-\sin 2B+\sin 2C=4\cos A.\sin B.\cos C$
   (v) $\sin 2A-\sin 2B-\sin 2C=-4\sin A.\sin B.\sin C$

4. यदि $A+B+C=\pi$ तो सिद्ध करें कि-

(i) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$

(ii) $\cos A+\cos B-\cos C=4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}-1$

(iii) $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$

(iv) $\cos A-\cos B+\cos C=4\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}-1$

5. यदि $A+B+C=\pi$ तो सिद्ध करें कि-

(i) $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$

(ii) $\cos^2 2A+\cos^2 2B+\cos^2 2C=1+2\cos 2A.\cos 2B.\cos 2C$

(iii) $\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=2\sin A.\sin B.\cos C$

6. यदि $A+B+C=\pi$ तो सिद्ध करें कि-

(i) $\cos\frac{A}{2}-\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$

$=4\cos\frac{\pi+A}{4}.\cos\frac{\pi-B}{4}.\cos\frac{\pi+C}{4}$

(ii) $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}$

$=1+4\sin\frac{\pi-A}{4}.\sin\frac{\pi-B}{4}.\sin\frac{\pi-C}{4}$

(iii) $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}=1$

7. यदि $A+B+C=90^0$, तो सिद्ध करें कि-

(i) $\tan A.\tan B+\tan B.\tan C+\tan C.\tan A=1$

(ii) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\cos A.\cos B.\cos C$

(iii) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=1+4\sin A.\sin B.\sin C$

(iv) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=2(1+\sin A.\sin B\sin C)$

https://www.studiestoday.com

8. $x+y+z=xyz$, तो त्रिकोणमिति से सिद्ध करें-

$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}+\frac{3y-y^3}{1-3y^2}+\frac{3z-z^3}{1-3z^2}$$

$$=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\cdot\frac{3y-y^3}{1-3y^2}\cdot\frac{3z-z^3}{1-3z^2}$$

9. यदि $A+B+C+D=360^0$ तो सिद्ध करें कि-

(i) $\cos A+\cos B+\cos C+\cos D$

$$=4\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{B+C}{2}.\cos\frac{C+A}{2}$$

(ii) $\sin A-\sin B+\sin C-\sin D$

$$=-4\cos\frac{A+B}{2}.\sin\frac{A+C}{2}.\cos\frac{A+D}{2}$$

10. यदि किसी त्रिभुज ABC में, $\tan\frac{A}{2}=\frac{5}{6},\tan\frac{B}{2}=\frac{20}{37}$

तो सिद्ध करें कि $\tan\frac{C}{2}=\frac{2}{5}$

1.8 त्रिकोणमितीय समीकरणों का हल

(जब कोण 0° से 360° के बीच हों)

प्रस्तावना

त्रिकोणमितीय समीकरण वह समीकरण है जिसमें एक या एक से अधिक त्रिकोणमितीय अनुपात सम्मिलित हो तथा जो सम्बद्ध (associated) कोण या कोणों के कुछ मानों के लिए सत्य हों।

यहाँ समीकरण के हल करने का अर्थ संबद्ध कोण या कोणों के मान ज्ञात करने हैं जो दिये समीकरण को संतुष्ट करें। अज्ञात कोण के वे मान जो समीकरण को संतुष्ट करते हैं, समीकरण के मूल (Roots) कहलाते हैं।

त्रिकोणमिति में किसी परिमाण(magnitude) का कोण संभव है। अत: किसी समीकरण के अनगिनत हल हो सकते हैं।

$\sin\theta=\frac{1}{2}$ एक सरल त्रिकोणमितीय समीकरण है। यह संबद्ध कोण $\theta=30^\circ$, $150^\circ, 390^\circ, 510^\circ, 750^\circ, 870^\circ, ...$ आदि के लिए सत्य है। अत: ये सभी कोण उपरोक्त समीकरण के हल होंगे। हम यहाँ अपने को सिर्फ उन हलों के लिए सीमित रखेंगे, जो 0° से 360° के बीच हो। इस विशेष स्थिति में $\sin\theta=\frac{1}{2}$ का हल $\theta=30^\circ$, या 150° होगा।

समीकरण हल करने के सामान्य निर्देश:

(i) समीकरण को सरल कर यथसंभव सरलतम रूप में लावें।

(ii) यदि समीकरण द्विघातीय हो तब बीजगणितीय विधि से गुणनखण्ड निकालकर एक घातीय बनावें। जैसे-
$4\sin^2\theta-3\sin\theta-1=0$, को $(4\sin+1)(\sin-1)=0$ में बदलें।

(iii) यदि किसी समीकरण में एक से अधिक त्रिकोणमितीय निष्पतियाँ (Trigonometrical ratios)हों तो उन्हें एक निष्पति में बदलें। जैसे-
$\sin^2\theta-\cos+1=0$, को सरल कर $\cos^2\theta+\cos\theta-2=0$ में बदलें।

(iv) 0° से 360° के बीच के त्रिकोणमितीय अनुपात के मान को याद रखें,

जो 15° के अपवर्त्य हैं। खासकर $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ तथा 0° का मान अवश्य याद रखें।

(v) $\sin\theta, \cos\theta$ वाले समीकरण,

यथा, $\sin\theta + \cos\theta = 1$

$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 2$

$\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta = 2$, तरह के समीकरण को $\sin(A \pm B)$ या $(A \pm B)$ के रूप में बदलकर हल करने में सुविधा होती है। इसके लिए $\sin\theta$ तथा θ के गुणांकों के वर्ग के योग के वर्गमूल से बाएँ तथा दाएँ पक्ष में भाग दें।

जैसे, $\sin\theta + \cos\theta = 1$ को सरल करते समय $\sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ से भाग दें।

$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 2$ को सरल करते समय $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ से भाग दें।

इसे बाद के उदाहरणों में और स्पष्ट किया गया है।

(vi) निम्नांकित सूत्र एक से अधिक मान प्राप्त करने में सहायक होंगे।

$\sin\theta = \sin(180^\circ - \theta)$

$\cos\theta = \cos(360^\circ - \theta)$

$\tan\theta = \tan(180^\circ + \theta)$

(vii) $\cot\theta, \sec\theta, \operatorname{cosec}\theta$ को $\sin\theta, \cos\theta$ के रूप में बदल कर हल करने में अक्सर सुविधा होती है।

(viii) समीकरण को हल करने पर जो हल प्राप्त होते हैं, वे सारे हल समीकरण को संतुष्ट नहीं भी कर सकते हैं। इसकी जाँच अवश्य कर लेनी चाहिए। जो हल अमान्य हों उन्हें छोड़ देना चाहिए।

प्रमुख सूत्र

1. यदि $\sin\theta = \sin\alpha$ तब $\theta = \alpha$ या $180^\circ - \alpha$
2. यदि $\cos\theta = \cos\alpha$ तब $\theta = \alpha$ या $360^\circ - \alpha$
3. यदि $\tan\theta = \tan\alpha$ तब $\theta = \alpha$ या $180^\circ + \alpha$

नोट: याद रखें, $\sin\theta = \sin \times \theta$ नहीं है अत: $\sin\theta = \sin\alpha$ के हल में sin को नहीं काटना चाहिए।

जैसे $\sin\theta = \sin\alpha$; $\therefore\ \theta = \alpha$

इसके बदले sin को छोड़कर अभीष्ट उत्तर लिखना चाहिए।

जैसे- $\sin\theta = \sin\alpha$, $\therefore\ \theta = \alpha$

अब हम उदाहरणों की मदद से समीकरण को हल करेंगे।

उदाहरण 1: हल करें:

(i) $\sin\theta = \sin 30^\circ$

(ii) $\sin 2\theta = \cos 2\theta$

हल:

(i) $\because\ \sin\theta = \sin 30^\circ$

$\therefore\ \theta = 30^\circ$

(ii) $\sin 2\theta = \cos 2\theta$

या, $\sin 2\theta = \sin(90^\circ - 2\theta)$

या, $2\theta = 90^\circ - 2\theta$, या $\theta = 22\frac{1}{2}^\circ$

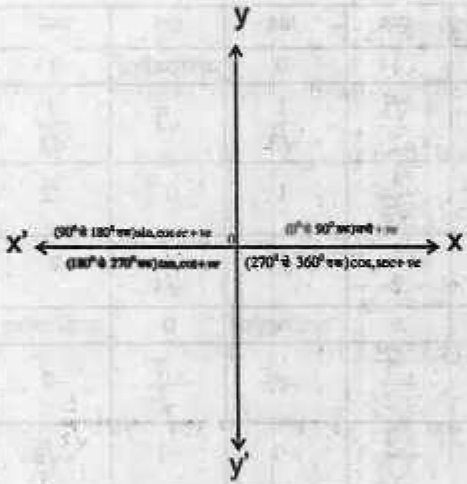
(ii) की जाँच

बायाँ पक्ष $= \sin 2\theta = \sin 2 \times 22\frac{1}{2}^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

दाया पक्ष $= \cos 2\theta = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\because\ \theta = 22\frac{1}{2}^\circ$ समीकरण को संतुष्ट करता है अत: यह मान्य हल है।

कोण निष्पतियाँ	sin	cos	tan	cot	sec	cos ec
0^0	0	1	0	अपरिभाषित	1	अपरिभाषित
30^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
90^0	1	0	अपरिभाषित	0	अपरिभाषित	1
120^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$
135^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
150^0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{-2}{\sqrt{3}}$	2
180^0	0	-1	0	अपरिभाषित	-1	अपरिभाषित
210^0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\sqrt{3}$	$\frac{-2}{\sqrt{3}}$	-2
225^0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+1$	$+1$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
240^0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\sqrt{3}$	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$
270^0	-1	0	अपरिभाषित	0	अपरिभाषित	-1
300^0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+2$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$
315^0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	-1	$+\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
330^0	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{+2}{\sqrt{3}}$	-2
360^0	0	$+1$	0	अपरिभाषित	$+1$	अपरिभाषित



आकृति.11

उदाहरण: निम्नांकित समीकरणों को हल करें-

(i) $\sin\theta = \cos\theta$

(ii) $\tan\theta = 2\sin\theta$

(iii) $\tan + \cot\theta = 2$

हल: (i) $\because \sin\theta = \cos\theta$

या, $\sin\theta = \sin(90^0 - \theta)$

या, $\theta = 90^0 - \theta$

या, $2\theta = 90^0$

या, $\theta = 45^0$

द्वितीय विधि:

$\sin\theta = \cos\theta$

या, $\sin^2\theta=\cos^2\theta$

या, $\sin^2\theta=1-\sin^2\theta$

या, $2\sin^2\theta=1$

या, $\sin^2\theta=\frac{1}{2}$

या, $\sin\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $\theta=45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$

जाँच: $\theta=45^\circ$ रखने पर बायाँ पक्ष $=\frac{1}{\sqrt{2}}$; दायाँ पक्ष $=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta=135^\circ$ रखने पर बायाँ पक्ष $=\frac{1}{\sqrt{2}}$, दायाँ पक्ष $=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta=225^\circ$ रखने पर बायाँ पक्ष $=\frac{-1}{\sqrt{2}}$, दायाँ पक्ष $=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta=315^\circ$ रखने पर बायाँ पक्ष $=\frac{-1}{\sqrt{2}}$, दायाँ पक्ष $=\frac{1}{\sqrt{2}}$

यहाँ 45° तथा 225° समीकरण को संतुष्ट करता है। अतः उपरोक्त समीकरण का हल $=45^\circ$ या 225°

(ii) $\tan\theta=2\sin\theta$

या, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=2\sin\theta$

या, $2\sin\theta.\cos\theta=\sin\theta$

या, $\sin 2\theta=\sin\theta$

या, $\sin 2\theta=\sin(180^\circ-\theta)=\sin(360^\circ+\theta)=\sin\theta$

$\therefore$ $2\theta=180^\circ-\theta$, या, $360^\circ+\theta$ या θ

$\therefore$ $\theta=60^\circ$ या 360° या 0°

द्वितीय विधि-

$$\tan\theta = 2\sin\theta$$

या, $$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 2\sin\theta$$

या, $$\sin 2\theta = \sin\theta$$

या, $$\sin 2\theta - \sin\theta = 0$$

या, $$2\cos\frac{2\theta+\theta}{2}.\sin\frac{2\theta-\theta}{2} = 0$$

या, $$2\cos\frac{3\theta}{2}.\sin\frac{\theta}{2} = 0$$

$\therefore$ या तो $\cos\frac{3\theta}{2} = 0$ या $\sin\frac{\theta}{2} = 0$

जब $$\cos\frac{3\theta}{2} = 0$$

तब, $$\frac{3\theta}{2} = 90^0 \text{ या } 270^0$$

$$\theta = 60^0 \text{ या } 180^0$$

जब $$\sin\frac{\theta}{2} = 0$$

तब, $$\frac{\theta}{2} = 0^0,\ 180^0 \text{ या } 360^0$$

$\therefore$ $$\theta = 0^0,\ 360^0 \text{ या } 720^0$$

720^0 को छोड़ते हुए।

समीकरण का हल $= 0^0, 60^0, 180^0, 360^0$

तृतीय विधि-

$$\tan\theta = 2\sin\theta$$

या, $$2\sin\theta.\cos\theta = \sin\theta$$

या, $$4\sin^2\theta.\cos^2\theta = \sin^2\theta$$

या, $$4\sin^2\theta.\cos^2\theta - \sin^2\theta = 0$$

या, $\sin^2\theta(4\cos^2\theta-1)=0$

या तो $\sin^2\theta=0$ या $4\cos^2\theta-1=0$

या तो $\sin\theta=0$ या $\cos\theta=\pm\frac{1}{2}$

$\theta-0°,180°,360°,60°,320°,120°$ या $240°$

यहाँ 120° या 240° समीकरण को संतुष्ट नहीं करता है।

अत: समीकरण का हल $=0°,60°,180°,320°,360°$

जाँच:

$\theta=0°$ रखने पर बायाँ पक्ष $=0$, दायाँ पक्ष $=0$

$\theta=60°$ रखने पर बायाँ पक्ष $=\sqrt{3}$, दायाँ पक्ष $=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\theta=180°$ रखने पर बायाँ पक्ष $=0$, दायाँ पक्ष $=0$

$\theta=120°$ रखने पर बायाँ पक्ष $=(-\sqrt{3})$, दायाँ पक्ष $=\sqrt{3}$

$\theta=240°$ रखने पर बायाँ पक्ष $=\sqrt{3}$, दायाँ पक्ष $=-\sqrt{3}$

$\theta=320°$ रखने पर बायाँ पक्ष $=-\sqrt{3}$, दायाँ पक्ष $=-\sqrt{3}$

$\theta=360°$ रखने पर बायाँ पक्ष $=0$, दायाँ पक्ष $=0$

(iii) $\tan\theta+\cot\theta=2$

या, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=2$

या, $\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=2$

या, $\sin 2\theta=1$

या, $2\theta=90°$

$\therefore$ $\theta=45°$

द्वितीय विधि-

$2\sin\theta\cdot\cos\theta=1$

या, $4\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta=1$

या, $4\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)=1$

या, $4\sin^2\theta-4\sin^4\theta=1$

या, $4\sin^4\theta-4\sin^2\theta+1=0$

या, $(2\sin^2\theta-1)^2=0$

या, $2\sin^2\theta-1=0$

या, $2\sin^2\theta=1$

या, $\sin^2\theta=\frac{1}{2}$

$\sin\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $\theta=45°,135°,225°,315°$

जाँच:

$\theta=45°$ रखने पर बायाँ पक्ष $=1+1=2$, दायाँ पक्ष $=2$

$\theta=135°$ रखने पर बायाँ पक्ष $=-1-1=-2$, दायाँ पक्ष $=2$

$\theta=225°$ रखने पर बायाँ पक्ष $=1+1=2$, दायाँ पक्ष $=2$

$\theta=315°$ रखने पर बायाँ पक्ष $=-1-1=-2$, दायाँ पक्ष $=2$

अत: समीकरण का हल $=45°$ या $225°$

उदाहरण 3: हल करें:

(i) $\sin\theta=\frac{1}{2}$

(ii) $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(iii) $\sin^2\theta=1$

(iv) $\cot^2\theta=\frac{1}{3}$

(v) $4\cos^2\theta=3$

हल:

(i) $\sin\theta=\frac{1}{2}$

या, $\sin\theta = \sin 30°$ या $\sin 150°$

$\therefore$ $\theta = 30°$ या $150°$

(ii) $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

या, $\cos\theta = \cos 30°$ या $\cos 330°$

$\therefore$ $\theta = 30°$ या $330°$

(iii) $\sin^2\theta = 1$

या, $\sin\theta = \pm 1 = \sin 90°$ या $\sin 270°$

$\therefore$ $\theta = 90°$ या $270°$

(iv) $\cot^2\theta = \dfrac{1}{3}$

या, $\cot\theta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \cot 60°$ या $\cot 240°$

या $\cos 120°$ या $\cot 300°$

$\therefore$ $\theta = 60°$ या $120°$ या $240°$ या $300°$

(v) $4\cos^2\theta = 3$

या, $\cos\theta = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$

या, $\cos 330°$ या $\cos 150$ या $\cos 210$

$\therefore$ $\theta = 30°$ या $150°$ या $210°$ या $330°$

उदाहरण 4: हल करें:

$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

दोनों ओर $\sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ से भाग देने पर,

या, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

या, $\cos 45°\cdot\sin\theta + \sin 45°\cdot\cos\theta = 1$

या, $\sin(\theta + 45°) = \sin 90°$

या, $\theta + 45° = 90°$

या, $\theta = 45°$

द्वितीय विधि:

$$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$$

दोनो ओर वर्ग करने पर,

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta \cdot \cos\theta = 2$$

या, $\sin 2\theta = 1$

या, $\sin 2\theta = \sin 90°$ या, $\sin 450°$

या, $\theta = 45°$ या, $225°$

जाँच:

$\theta = 45°$ मानने पर,

$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ मान्य हल

$\theta = 225°$ मानने पर,

$\sin\theta + \cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0$ अमान्य हल

$\therefore$ मान्य हल $= 45°$

उदाहरण 5: हल करें

$$\cos\theta + \sec\theta = \frac{5}{2}$$

या, $\cos\theta + \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{5}{2}$

या, $\dfrac{\cos^2\theta + 1}{\cos\theta} = \dfrac{5}{2}$

या, $2\cos^2\theta + 2 = 5\cos\theta$

या, $2\cos^2\theta - 5\cos\theta + 2 = 0$

या, $2\cos^2\theta - 4\cos\theta - \cos\theta + 2 = 0$

या, $2\cos\theta(\cos\theta-2)-1(\cos\theta-2)=0$

या, $(\cos\theta-2)(2\cos\theta-1)=0$

या तो $\cos\theta-2=0$ या $2\cos\theta-1=0$

जब $\cos\theta-2=0$

तब $\cos\theta=2$ यह मान असंभव है।

जब $2\cos\theta-1=0$

या, $2\cos\theta=1$

या, $\cos\theta\frac{1}{2}=\cos 60^\circ$ या $\cos 300^\circ$

$\therefore$ $\theta=60^\circ$ या 300°

जाँच:

$$\cos 60^\circ+\sec 60^\circ=\frac{5}{2}$$

$$\cos 300^\circ+\sec 300^\circ=\frac{5}{2}$$

अत: दोनों मान मान्य हैं।

उदाहरण 6: हल करें:

$$\cos^2\theta-\sin\theta=\frac{1}{4}$$

हल:

$$\cos^2\theta-\sin\theta=\frac{1}{4}$$

या, $1-\sin^2\theta-\sin\theta=\frac{1}{4}$

या, $\sin^2\theta+\sin\theta-\frac{3}{4}=0$

या, $4\sin^2\theta+4\sin\theta-3=0$

या, $4\sin^2\theta+6\sin\theta-2\sin\theta-3=0$

या, $2\sin\theta(2\sin\theta+3)-1(2\sin\theta+3)=0$

या, $(2\sin\theta-1)(2\sin\theta+3)=0$

या तो $2\sin\theta+3=0$; या $2\sin\theta-1=0$

यदि $2\sin\theta+3=0$

तब $\sin\theta=-\frac{3}{2}$

यह मान अमान्य है क्योंकि $\sin\theta$ का मान -1 से कम नहीं हो सकता।

यदि $2\sin\theta-1=0$

तब $2\sin\theta=1$

या, $\sin\theta=\frac{1}{2}$

या, $\sin\theta=\sin 30^\circ$ या $\sin 150^\circ$

$\therefore$ $\theta=30^\circ$ या 150°

जाँच:

$\theta=30^\circ$ मानने पर,

$$\cos^2\theta-\sin\theta=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4} \text{ (संतुष्ट)}$$

$\theta=150^\circ$ मानने पर,

$$\cos^2\theta-\sin\theta=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4} \text{ (संतुष्ट)}$$

अतः मान्य हल $=30^\circ$ या 150°

उदाहरण 7: हल करें:

$$4\cos^2\theta+\sqrt{3}=2(\sqrt{3}+1)\cos\theta$$

हल:

$\because$ $4\cos^2\theta+\sqrt{3}=2(\sqrt{3}+1)\cos\theta$

या, $4\cos^2\theta-2\sqrt{3}\cos\theta-2\cos\theta+\sqrt{3}=0$

या, $2\cos\theta(2\cos\theta-\sqrt{3})-1(2\cos\theta-\sqrt{3})=0$

या, $(2\cos\theta-\sqrt{3})(2\cos\theta-1)=0$

$\therefore$ या तो $2\cos\theta-\sqrt{3}=0$ या $2\cos\theta-1=0$

यदि $2\cos\theta-\sqrt{3}=0$

तब $2\cos\theta=\sqrt{3}$

या, $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ$ या $\cos 330^\circ$

$\therefore$ $\theta=30^\circ$ या 330°

यदि $2\cos\theta-1=0$

तब $2\cos\theta=1$

या, $\cos\theta=\frac{1}{2}=\cos 60^\circ$ या $\cos 300^\circ$

$\therefore$ $\theta=60^\circ$ या 300°

$\therefore$ $\theta=30^\circ$ या 60° या 300° या 330°

जाँच:

मान लें कि $\theta=30^\circ$

अब $4\cos^2 30^\circ+\sqrt{3}=4\times\frac{3}{4}=3+\sqrt{3}$

$2(\sqrt{3}+1)\cos 30=2(\sqrt{3}+1)\frac{\sqrt{3}}{2}=3+\sqrt{3}$ (संतुष्ट)

माने लें कि $\theta=60^\circ$

$4\cos^2 60^\circ+\sqrt{3}=4\times\frac{1}{4}+\sqrt{3}=1+\sqrt{3}$

$2(\sqrt{3}+1)\cos 60^\circ=2(\sqrt{3}+1)\times\frac{1}{2}=1+\sqrt{3}$ (संतुष्ट)

यह समीकरण 300° तथा 330° को भी संतुष्ट करता है।

अत: $\theta=30^\circ, 60^\circ, 300^\circ$ या 330° मान्य हल है।

उदाहरण:8 हल करें: $\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta=1$

हल: दोनों पक्षों में $\sqrt{(1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$ से भाग देने पर,

या $\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}$

या, $\cos 60^\circ \cdot \cos\theta - \sin 60^\circ \cdot \sin\theta = \frac{1}{2}$

या, $\cos(\theta + 60^\circ) = \cos 60^\circ$ या $\cos 300^\circ$

या, $\theta = 0^\circ$ या 240°

जाँच:

$\theta = 0^\circ$ मानें

$\cos 0^\circ - \sqrt{3}\sin 0^\circ = 1 - 0 = 1$ मान्य हल

$\theta = 240^\circ$ मानें

$\cos 240^\circ - \sqrt{3}\sin 240^\circ$

$= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$ मान्य हल

अतः हल $= 0^\circ$ या 240°

उदाहरण 9: हल करें: $\cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

प्रथम विधि:

$\because \quad \cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

वर्ग करने पर,

$\cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta \cdot \cos\theta = \frac{1}{2}$

या, $1 - \frac{1}{2} = 2\sin\theta \cdot \cos\theta$

या, $\sin 2\theta = \frac{1}{2}$

या, $\sin 2\theta = \sin 30^\circ$ या $\sin 150^\circ$ या $\sin 390^\circ$ या 510°

या, $\theta = 15^\circ, 75^\circ$ या 195° या $255^\circ, 75^\circ$ तथा 195° मान्य नहीं है।

$\therefore \quad \theta = 15$ तथा 255°

द्वितीय विधि:

$$\cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\sqrt{2}$ से भाग देने पर $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = \frac{1}{2}$

या, $\cos\theta \cdot \cos 45^\circ - \sin\theta \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2}$

या, $\cos(\theta + 45^\circ) = \cos 60^\circ$ या $\cos 300^\circ$

$\therefore$ $\theta + 45^\circ = 60^\circ$; या $\theta + 45^\circ = 300^\circ$

या, $\theta = 15^\circ$ या 255°

तृतीय विधि:

$$\cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\sqrt{2}$ से भाग देने पर $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin = \frac{1}{2}$

या, $\sin 45^\circ \cdot \cos\theta - \cos 45^\circ \cdot \sin\theta \frac{1}{2}$ ....(I)

या, $\sin(45^\circ - \theta) = \sin 30^\circ$ या $\sin 150^\circ$

$\therefore$ $45^\circ - \theta = 30^\circ$ या $45^\circ - \theta = 150^\circ$

$\therefore$ $\theta = 15^\circ$ या -105°

$\theta - 15^\circ$ या $255^\circ(-105^\circ - 255^\circ)$

चतुर्थ विधि:

$$\cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

या, $\sin 45^\circ \cdot \cos\theta - \cos 45^\circ \cdot \sin\theta = \frac{1}{2}$ [समीकरण (I) से]

या, $\sin\theta \cdot \cos 45^\circ - \cos\theta \cdot \sin 45^\circ = -\frac{1}{2}$

या, $\sin(\theta - 45^\circ) = \sin 210^\circ$ या $\sin 330^\circ$

$\therefore \quad \theta - 45° = 210°$ या $330°$

$\therefore \quad \theta = 255°$ या $375°$

$= 255°$ या $15° (375° \Rightarrow 15°)$

जाँच:

$\cos\theta - \sin\theta$

$= \cos 15° - \sin 15°$ (मान लें $\theta = 15°$)

$= \cos(90° - 75°) - \sin 15°$

$= \sin 75° - \sin 15°$

$= 2\cos\frac{75°+15°}{2} \times \frac{75°-15°}{2} = 2\cos 45° \cdot \sin 30°$

$= 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

पुन: $\quad \cos\theta - \sin\theta$

$= \cos 255° - \sin 255°$ (मानें $\theta = 255°$)

$= \cos(360° - 105°) - \sin(360° - 105°)$

$= \cos 105° + \sin 105°$

$= \cos(90° + 15°) + \sin(90° + 15°)$

$= -\sin 15° + \cos 15°$

$= \cos 15° - \sin 15°$

नोट: कभी-कभी विभिन्न विधियों में भिन्न-भिन्न हल आ सकते हैं और वे मान्य भी हो सकते हैं। छात्रों को सलाह दी जाती है कि वे किसी भी विधि से मान्य हल निकालें। हम कम-से-कम दो हल की अपेक्षा करते हैं, यदि यह असंभव हो या कठिनाई से प्राप्त हों तो एक हल ही ज्ञात करें।

उदाहरण 10: हल करें: $\cos 3\theta + \sin 3\theta = \cos\theta + \sin\theta$

हल: $\because \quad \cos 3\theta + \sin 3\theta = \cos\theta + \sin\theta$

या, $\quad \sin 3\theta - \sin\theta = \cos\theta - \cos 3\theta$

या, $\quad 2\cos\frac{3\theta+\theta}{2} \cdot \sin\frac{3\theta-\theta}{2} = 2\sin\frac{\theta+3\theta}{2} \cdot \sin\frac{3\theta-\theta}{2}$

या, $\cos 2\theta \cdot \sin\theta = 2\sin 2\theta \cdot \sin\theta$

या, $2\sin\theta(\cos 2\theta - \sin 2\theta) = 0$

या, $\sin\theta(\cos 2\theta - \sin 2\theta) = 0$

या तो $\sin\theta = 0$ या $\cos 2\theta - \sin 2\theta = 0$

जब $\sin\theta = 0$

तब $\theta = 0^\circ$ या 180° या 360°

पुन: जब $\cos 2\theta - \sin 2\theta = 0$

या, $\cos 2\theta = \sin 2\theta$

या, $\cos 2\theta = \cos(90^\circ - 2\theta)$

या, $2\theta = 90^\circ - 2\theta$

या, $4\theta = 90^\circ$

या, $\theta = \frac{90}{4} = 22\frac{1}{2}^\circ$

$\therefore$ $\theta = 0^\circ, 22\frac{1}{2}, 180^\circ$ या 360°

जाँच:

$\theta = 0^\circ, 22\frac{1}{2}^\circ, 180^\circ$ या 360° को उपरोक्त समीकरण संतुष्ट करता है।

अत: सभी हल मान्य है।

उदाहरण 11: हल करें: $\cos 3\theta \cdot \sin^3\theta + \sin 3\theta \cdot \cos^3\theta = 0$

हल: $\because$ $\cos 3\theta \cdot \sin^3\theta + \sin 3\theta \cdot \cos^3\theta = 0$

या, $(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)\sin^3\theta + (3\sin\theta - 4\sin^3\theta)\cos^3\theta = 0$

या, $4\sin^3\theta \cdot \cos^3\theta - 3\sin^3\theta \cdot \cos\theta + 3\sin\theta \cdot \cos^3\theta - 4\sin^3\theta \cdot \cos^3\theta = 0$

या, $3\sin\theta \cdot \cos^3\theta - 3\sin^3\theta \cdot \cos\theta = 0$

या, $3\sin\theta \cdot \cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$

या, $3\sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \cos 2\theta = 0$

$\therefore$ या तो $\sin\theta = 0$

या, $\cos\theta = 0$

(i) जब $\sin\theta=0$ तब $\theta=0^\circ$ या 180°

(ii) जब $\cos\theta=0$ तब $\theta=90^\circ$ या 270°

(iii) जब $\cos 2\theta=0$ तब $2\theta=90^\circ$ या 270° या $\theta=45^\circ$ या 135°

$\therefore$ $\theta=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 180^\circ, 270^\circ$; ये सभी मान दिए समीकरण को संतुष्ट करते हैं।

अत: ये सभी मान समीकरण के हल हुए।

उदाहरण 12: हल करें: $\cos\theta=\sin 105^\circ+\cos 105^\circ$

हल: $\because$ $\cos\theta=\sin 105^\circ+\cos 105^\circ$

या, $\cos\theta=\sin 105^\circ+\cos(90^\circ+15^\circ)$

या, $\cos\theta=\sin 105^\circ-\sin 15^\circ$

या, $\cos\theta=2\cos\dfrac{105^\circ+15^\circ}{2}\cdot\sin\dfrac{105^\circ-15^\circ}{2}$

या, $\cos\theta=2\cos 60^\circ.\sin 45^\circ=2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

या, $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\cos 45^\circ$ या $\cos 315^\circ$

$\therefore$ $\theta=45^\circ$ या 315°

उदाहरण 13: यदि $\sin(\pi\cos\theta)=\cos(\pi\sin\theta)$

तो सिद्ध करें कि-

$$\sin 2\theta=\pm\frac{3}{4}$$

हल: $\because$ $\sin(\pi\cos\theta)=\cos(\pi\sin\theta)$

या, $\sin(\pi\cos\theta)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\pm\pi\sin\theta\right)$

या, $\pi\cos\theta=\dfrac{\pi}{2}\pm\pi\sin\theta$

या, $\cos\theta\mp\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

या, $\cos^2\theta+\sin^2\theta\mp2\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{1}{4}$

या, $\mp\sin2\theta=-\frac{3}{4}$

या, $\sin2\theta=\pm\frac{3}{4}$

आगे स्वयं करें।

उदाहरण 14: यदि $\sin(\pi\cos\theta)=\cos(\pi\sin\theta)$

तो सिद्ध करें कि-

$$\cos\left(\theta\pm\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

हल: $\because$ $\sin(\pi\cos\theta)=\cos(\pi\sin\theta)$

या, $\sin(\pi\cos\theta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\pi\sin\theta\right)$

या, $\pi\cos\theta=\frac{\pi}{2}\pm\pi\sin\theta$

या, $\cos\theta=\frac{1}{2}\pm\sin\theta$

या, $\cos\theta\mp\sin\theta=\frac{1}{2}$

या, $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

या, $\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta\pm\sin\frac{\pi}{4}\sin\theta=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

या, $\cos\theta\cdot\cos\frac{\pi}{4}\mp\sin\theta\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

या, $\cos\left(\theta\pm\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

उदाहरण 15: यदि $\tan(\cot\theta) = \cot(\tan\theta)$,

तो सिद्ध करें-

$$\sin 2\theta = \frac{4}{\pi} \text{ या } \frac{4}{3\pi}$$

$\because \quad \tan(\cot\theta) = \cot(\tan\theta)$

या, $\quad \tan(\cot\theta) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \tan\theta\right)$

या, $\quad \tan\left(\frac{3\pi}{2}\tan\theta\right)$

$\therefore \quad$ या तो $\cot\theta = \frac{\pi}{2} - \tan\theta$

या, $\quad \cot\theta + \tan = \frac{\pi}{2} \qquad$ ....(I)

या, $\quad \cot\theta = \frac{3\pi}{2} - \tan\theta$

या, $\quad \cot\theta + \tan\theta = \frac{3\pi}{2} \qquad$ ....(ii)

$\because \quad \cot\theta + \tan\theta = \frac{\pi}{2} \qquad$ ....(I)

$\therefore \quad \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\pi}{2}$

या, $\quad \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta \cdot \cos\theta} = \frac{\pi}{2}$

या, $\quad \frac{1}{\sin\theta \cdot \cos\theta} = \frac{\pi}{2}$

या, $\quad \frac{1}{2\sin\theta \cdot \cos\theta} = \frac{\pi}{4}$ या, $\sin 2\theta = \frac{4}{\pi}$

पुनः $\quad \cot\theta + \tan\theta = \frac{3\pi}{2} \qquad$ ....(iii)

या, $\quad \frac{1}{\sin\theta \cdot \cos\theta} = \frac{3\pi}{2}$

या, $\quad \frac{1}{2\sin\theta \cdot \cos\theta} = \frac{3\pi}{4}$

या, $\quad \sin 2\theta = \frac{4}{3\pi}$

प्रश्नावली-9

निम्नलिखित समीकरणों को हल करें (जहाँ $0^\circ \le \theta \le 360^\circ$)

1. (i) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\sec\theta = 2$

(iii) $\tan\theta = -\sqrt{3}$ (iv) $\cos ec\theta \frac{2}{\sqrt{3}}$

(v) $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ (vi) $\sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

(vii) $\cot\theta = -1$ (viii) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

(ix) $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (x) $\cot\theta =$ अपरिभाषित

(xi) $\cot\theta = 1$ (xii) $\sin\theta = \pm 1$

(xiii) $\tan\theta = -1$ (xiv) $\tan^2\theta = \frac{1}{3}$

(xv) $\tan\theta = \sqrt{3}$ (xvi) $\cos^2\theta = \frac{1}{2}$

(xvii) $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ (xviii) $4\sin^2\theta = 3$

2. (i) $\tan\theta = 3\cot\theta$ (ii) $4\sec^2\theta - 7\tan^2\theta = 3$

(iii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 1$ (iv) $2\sin^2\theta + 5\sin\theta = 3$

(v) $\cot\theta = 2\cos\theta$ (vi) $2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$

(vii) $2\sin^2\theta - 3\cos\theta = 0$ (viii) $6\cos^2\theta + 11\sin\theta = 10$

(ix) $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 3$ (x) $\sin^2\theta - 2\cos\theta + \frac{1}{4} = 0$

(xi) $\sin^2 - \cos^2\theta = \cos\theta$ (xii) $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 2$

(xiii) $\cos ec\theta - 2\sin\theta = 1$ (xiv) $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 2$

(xv) $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 1$ (xvi) $\sin\theta + 2\cos\theta = 1$

(xvii) $\cos 2\theta+\sin 3\theta=0$ (xviii) $\tan 4\theta+\cot 6\theta=0$

(xix) $\sin 5\theta+\sin 2\theta=0$ (xx) $\tan^2\theta+\cot^2\theta=2$

(xxi) $3\tan^2\theta+5=2\cot^2\theta$ (xxii) $2\cos\theta+5\tan\theta=4\sec\theta$

(xxiii) $\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta=0$ (xxiv) $\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta=0$

(xxv) $\sin 4\theta=\sin 3\theta+\sin 2\theta$ (xxvi) $\sin 5\theta\cdot\cos 3\theta=\sin 9\theta\cdot\cos 7\theta$

(xxvii) $\cos\theta+\cos 3\theta+\cos 5\theta+\cos 7\theta=0$

(xxviii) $\tan\theta+\tan 2\theta=\tan 3\theta$

(xxix) $\tan\theta+\tan 2\theta+\tan\theta\cdot\tan 2\theta=1$

3. यदि $\tan(\pi\cos\theta)=\cot(\pi\sin\theta)$, तो सिद्ध करें कि-

$$\sin\theta+\cos\theta=\pm\frac{1}{2}$$

4. यदि $\sin(\pi\cos\theta)=\cos(\pi\sin\theta)$, तो सिद्ध करें कि-

$$\sin 2\theta=\pm\frac{3}{4}$$

5. सिद्ध करें कि निम्नांकित समीकरण संभव नहीं है।

(i) $\sin\theta=x+\dfrac{1}{x}$

(ii) $\cos\theta=x+\dfrac{1}{x}$

(जहाँ x वास्तविक संख्या है)

1.9 त्रिभुज के गुण (Properties of triangles)

प्रस्तावना:

किसी त्रिभुज में तीन भुजाएँ एवं तीन कोण होते हैं। यदि इन छः भागों में से कम से कम तीन भाग (जिनमें एक भुजा अवश्य हो) ज्ञात हों, तो त्रिभुज की शेष भुजाएँ एवं कोण त्रिकोणमितीय विधि से ज्ञात किए जा सकते हैं। तीनों कोण ज्ञात रहने पर अनगिनत त्रिभुज संभव हैं, इस स्थिति में उनकी भुजाओं के बीच संबन्ध स्थापित किए जा सकते हैं।

किसी त्रिभुज ABC में $\angle A$ को A, $\angle B$ को B तथा $\angle C$ को C कहा जा सकता है। $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ के सामने की भुजाएँ BC, AC तथा AB को क्रमशः $a, b,$ तथा c कहा जाता है। त्रिभुज के क्षेत्रफल को Δ (डेल्टा) तथा उसके परिवृत्त की त्रिज्या को R माना जाता है।

त्रिभुज के गुण:

त्रिभुज के कोणों की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों और उसकी भुजाओं के पारस्परिक संबन्धों को त्रिभुज के गुण (Properties of triangles) कहते हैं।

ज्ञात भुजाओं या कोणों की मदद से शेष अज्ञात भुजा या कोण को त्रिकोणमितीय विधि से ज्ञात करने को त्रिभुज का निर्धारण (Solution of triangle) कहते हैं।

हम इस अध्याय में त्रिभुज के कुछ प्रमुख गुणों का अध्ययन करेंगे।

त्रिभुज के कुछ प्रमुख गुण:

(i) $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

(ii) $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

(iii) $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ca}$

(iv) $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

(v) $a = b\cos C + c\cos B$

(vi) $b = a\cos C + c\cos A$

(vii) $c = a\cos B + b\cos A$

(viii) $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

(ix) $\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ca}}$

(x) $\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

(xi) $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

(xii) $\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$

(xiii) $\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$

(xiv) $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

(xv) $\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$

(xvi) $\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

(xvii) $\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\sin B = \frac{2}{ac}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\sin C = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$\Delta=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{abc}{4R}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2\sin C\ \sin A}{\sin B}=\frac{1}{2}\cdot\frac{c^2\sin A\cdot\sin B}{\sin C}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2\sin B.\sin C}{\sin A}$$

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{(s-b)(s-c)}{\Delta}$$

$$\tan\frac{B}{2}=\frac{(s-a)(s-c)}{\Delta}$$

$$\tan\frac{C}{2}=\frac{(s-a)(s-b)}{\Delta}$$

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

$$\tan\frac{C-A}{2}=\frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$$

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

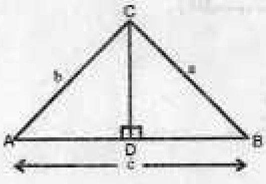
अब हम इन गुणों (सम्बन्धों) को ज्यामितीय या बीजगणितीय विधि से सिद्ध करेंगे।

कोण-भुजा संबंध [त्रिभुज का ज्या सूत्र (sine formula)]:

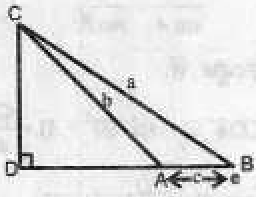
किसी त्रिभुज में कोणा के sines सम्मुख भुजाओं के समानुपाती होते है।

(अर्थात् $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin b}{b}=\frac{\sin c}{c}$)

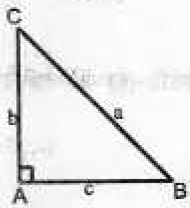
प्रमाण:



आकृति-12(i)



आकृति-12(ii)



आकृति-12(iii)

मानलें कि A B C एक न्यूनकोण, अधिककोण और समकोण त्रिभुज है जिनका कोण A क्रमशः न्यूनकोण, अधिककोण या समकोण है। C से CD लम्ब आधार AB पर डालें। (अधिककोण में आधार को पीछे बढ़ाकर लम्ब डालें, समकोण में लम्ब CA के संपाती होगा।)

स्थिति-(I) न्यूनकोण त्रिभुज में:

$$\triangle ABC, \text{ में}, \sin A = \frac{CD}{AC}$$

$$= \frac{CD}{b}$$

$$\therefore b \sin A = CD \qquad \text{.............(i)}$$

पुनः $\triangle BCD$ में, $\sin B = \frac{CD}{CB}$

या $\quad \sin B = \frac{CD}{a}$

या $\quad a \sin B = CD \qquad$ ....(ii)

समीकरण (i) और (i) से,

$$b \sin A = a \sin B$$

या $\quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \qquad$ ....(iii)

स्थिति-(ii) अधिककोण त्रिभुज में:

$\triangle CDA$ में, $\sin(180^0 - A) = \frac{CD}{AC}$

या, $\quad (+\sin A) = \frac{CD}{b}$

या, $CD = b\sin A$ ....(iv)

पुनः $\triangle CDB$ में, $\sin B = \frac{CD}{BC} = \frac{CD}{a}$

$\therefore CD = a\sin B$ ....(v)

समीकरण (iv) और (v) से,

$$b\sin A = a\sin B$$

या, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ....(vi)

स्थिति-(iii) समकोण त्रिभुज में:

$$\sin B = \frac{b}{a}$$

या, $\frac{a}{1} = \frac{b}{\sin B}$

या, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ $(\because \sin A = \sin 90^\circ = 1)$

अतः किसी भी त्रिभुज में,

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ....(vii)

इसी प्रकार B से AC पर लम्ब डाल कर सिद्ध कर सकते हैं कि.........

$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ ....(viii)

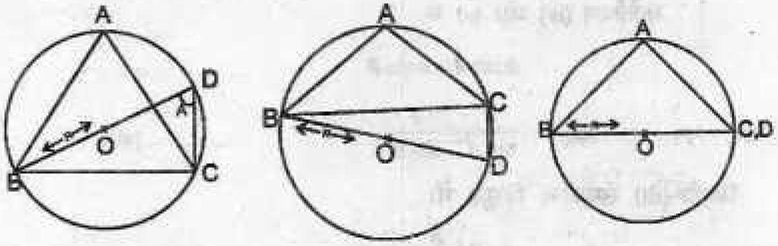
अतः किसी भी त्रिभुज में-

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

या, $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ ....सूत्र

द्वितीय विधि

मानलें कि ABC एक त्रिभुज है जिसमें $\angle A$ क्रमशः न्यूनकोण, अधिककोण या समकोण है। इस त्रिभुज के बाहर एक परिगत वृत्त खींचें। मानलें कि उसका केन्द्र O तथा उसकी त्रिज्या R है। B O को बढ़ाएँ जो परिधि से D पर मिले। C D को मिलावें।



आकृति-13(i) आकृति-13(ii) आकृति-13(iii)

(समकोण त्रिभुज में C तथा D सपाती होंगे)

स्थिति-(i) न्यूनकोण त्रिभुज में.........

$\angle BAC = \angle BDC = A$ (एकही वृत्तखंड के कोण)

ΔBDC में $\angle C = 90^\circ$ (अर्द्ध वृत्त के कोण)

अब ΔBDC समकोण में,

$$\sin BDC = \frac{BC}{BD}$$

या, $$\sin A = \frac{a}{2R}$$

या, $$\frac{a}{\sin A} = 2R \qquad \text{..............(i)}$$

स्थिति-(ii) अधिककोण त्रिभुज में.........

$\angle BDC = 180^\circ - A$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण सम्पूरक होते हैं)

$\angle BCD = 90^\circ$ (अर्द्धवृत्त के कोण)

अब समकोण ΔBCD में,

$$\sin BDC = \frac{BC}{BD}$$

या $\sin(180^0 - A) = \dfrac{a}{2R}$

या, $\sin A = \dfrac{a}{2R}$

या, $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ ....(ii)

स्थिति-(III) समकोण त्रिभुज में.........

समकोण त्रिभुज ABC में,

$$\sin A = \sin 90^0 = 1 = \frac{BC}{BC} = \frac{a}{2R}$$

$(\because BC = 2R)$

या, $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ ....(iii)

अत: किसी भी त्रिभुज में

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

इसी प्रकार CO तथा BO को मिलाकर सिद्ध कर सकते हैं कि-

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

अत: किसी भी त्रिभुज में,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad \text{...............(सूत्र)}$$

किसी त्रिभुज में एक कोण और तीनों भुजाओं के बीच का संबंध:

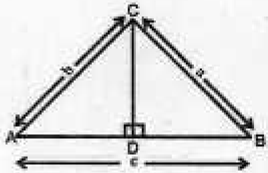
सिद्ध करें कि-

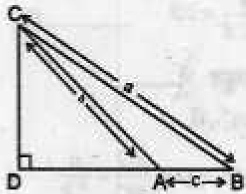
(I) $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

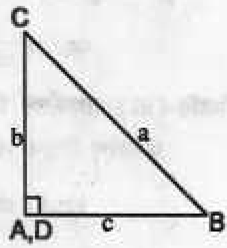
(ii) $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

(iii) $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

प्रमाण:







आकृति–14(i) आकृति–14(ii) आकृति–14(i)

मानलें कि किसी त्रिभुज ABC में क्रमश: न्यून कोण, अधिक कोण या समकोण हैं। C से CD लम्ब भुजा AB पर डालें (अधिक कोण त्रिभुज में लम्ब BA को बढ़ाकर डालें, समकोण त्रिभुज में लम्ब, भुजा CA का संपाती होगा)।

स्थिति-(I) न्यून कोण त्रिभुज में-

$$BC^2 = BD^2 + CD^2$$
$$= (AB - AD)^2 + CD^2$$
$$= AB^2 - 2AB.AD + AD^2 + CD^2$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2AB.AD$$
$$(\because AD^2 + CD^2 = AC^2)$$

या, $a^2 = c^2 + b^2 - 2c.b\cos A$

$$(\because \Delta ACD \text{ में } \cos A = \frac{AD}{b})$$

या $2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$

या $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

स्थिति-(II) अधिक कोण त्रिभुज में-

$$BC^2 = BD^2 + CD^2$$

$$= (AB + AD)^2 + CD^2$$

$$= AB^2 + 2AB.AD + AD^2 + CD^2$$

$$= AB^2 + 2AB.AD + AC^2$$

या $\quad a^2 = b^2 + c^2 + 2c.AD$

$\because \Delta DAC$ में,

$$\cos(180^0 - A) = \frac{AD}{AC}$$

या $\quad (-)\cos A = \frac{AD}{b}$

या, $\quad AD = -b\cos C$

इस AD का मान ऊपर रखने पर

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

या, $\quad 2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$

या, $\quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 -^2}{2bc}$

स्थिति-(III) समकोण त्रिभुज में,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

या, $\quad a^2 = c^2 + b^2$

या, $\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$$\left(\because \angle A = 90^0 \; or \; \cos A = \cos 90^0 = 0 \text{ या} - 2bc\cos A = 0\right)$$

या, $\quad 2bc\cos A = b^2 + c^2 \text{ या } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

इस तरह आपने देखा कि किसी भी त्रिभुज में-

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

या, $\quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

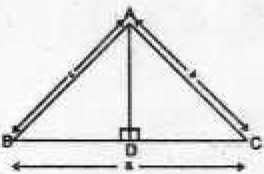
उपरोक्त विधि से $\angle B$ या $\angle C$ को क्रमशः न्यून कोण, अधिक कोण या समकोण मानकर छात्र स्वयं $\cos B$ तथा $\cos C$ का मान प्राप्त करें।

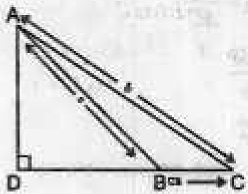
किसी त्रिभुज में तीनों भुजाओं और दो कोणों के बीच का संबंध:

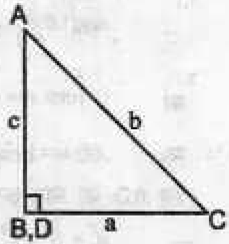
सिद्ध करें कि-

$$a = b\cos C + c\cos B$$
$$b = a\cos C + c\cos A$$
$$c = a\cos B + b\cos A$$

प्रमाणः







आकृति-15(i) आकृति-15(ii) आकृति-15(iii)

मानलें कि ABC क्रमशः न्यूनकोण अधिक कोण या समकोण त्रिभुज हैं, A से AD लम्ब आधार BC पर डालें (अधिक कोण में लम्ब CB को बढ़ाकर डालें, समकोण त्रिभुज में लम्ब AB का संपाती होगा।)

स्थिति-(I) न्यून कोण त्रिभुज में,

$$BC = BD + DC$$

या, $a = c\cos B + b\cos C$

$$(\because \cos B = \frac{BD}{AB} = \frac{BD}{C})$$

या, $BD = c\cos B$

तथा $\cos C = \frac{DC}{AC} = \frac{DC}{b}$

या, $DC = b\cos C)$

या, $a = b\cos C + c\cos B$

स्थिति-(ii) अधिक कोण Δ में,

$$\cos(180^\circ - B) = \frac{BD}{AB} = \frac{BD}{C}$$

या, $(-)\cos B = \frac{BD}{C}$

या, $BD = -c\cos B$ ....(i)

पुन: $\cos C = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{b}$

या, $C = b\cos C$ ....(ii)

अब $a = BC = CD - BD = b\cos C - (-c\cos B)$

या, $a = b\cos C + c\cos B$ $(\because \cos B = \cos 90^\circ = 0$
$\therefore c\cos B = 0)$

स्थिति- (iii) समकोण Δ में,

$\cos C = \frac{a}{b}$

या, $a = b\cos c$

या, $a = b\cos c + c\cos B$

अत: किसी भी त्रिभुज में-

$$a = b\cos C + c\cos B$$

इसी तरह b तथा c का मान प्राप्त करें। यहाँ यह ध्यान दें कि यदि b का मान ज्ञात करना है तब त्रिभुज के नामकरण में B को ऊपर रखें तथा AC को आधार बनावें।

अभी आपने त्रिभुज के Cosines नियम के दो रूपों का अध्ययन किया है। नीचे आप देखेंगे कि ये दोनों रूपों में से प्रत्येक एक-दूसरे की मदद से प्राप्त किये जा सकते हैं। साथ ही sines-सूत्र की मदद से भी ये प्राप्त किए जा सकते हैं। इन्हें हम बारी-बारी से सिद्ध करेंगे।

1. $\because$ $a = b\cos c + c\cos B$ ....(i)

तथा $b = a\cos C + c\cos A$ ....(ii)

समीकरण (i) को a से तथा (iii) को b से गुणा करने पर,

$$a^2 = ab\cos C + ac\cos B \quad ....(iii)$$

$$b^2 = ab\cos C + bc\cos A \qquad \text{..............(iv)}$$

(iii) और (iv) को जोड़ने पर,

$$a^2 + b^2 = 2ab\cos C + C(a\cos B + b\cos A)$$

या, $a^2 + b^2 = 2ab\cos C + C^2 (\because a\cos B + b\cos A = C)$

या, $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos C$

या, $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ ....सूत्र

इस तरह द्वितीय रूप के cosines-सूत्र से प्रथम रूप के cosines-सूत्र प्राप्त किया जा सकते हैं।

2. $\because$ $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ तथा $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

अब $b\cos C + c\cos B$

$$= b \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c \times \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - c^2 + a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \frac{2a^2}{2a} = a$$

इस तरह cosines-सूत्र के प्रथम रूप से इसके रूप प्राप्त किए जा सकते हैं।

Sines-सूत्र से Cosines-सूत्र प्राप्त करना:

किसी त्रिभुज में $A + B + C = \pi$

या, $A = \pi - (B + C)$

या, $\sin A = \sin(B + C)$

या, $\sin A = \sin B.\cos C + \cos B.\sin C$

या, $\dfrac{a}{2R} = \dfrac{b}{2R}\cos C + \cos B \times \dfrac{C}{2R}$

$$\left(\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R\right)$$

या, $a = b\cos C + c\cos B$

इसी प्रकार, $b = a\cos C + c\cos A$

तथा $c = a\cos B + b\cos A$

इन तीनों सूत्रों से पूर्व की तरह Cosines- सूत्र प्राप्त किये जा सकते हैं।

अर्ध कोणों का त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करना

(To find trigonometric ratios of half angles):

यहाँ हम भुजाओं के रूप में अर्ध कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात को व्यक्त करेंगे।

1. सिद्ध करें कि-

(i) $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

(ii) $\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$

(iii) $\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$ (जहाँ $s = \frac{a+b+c}{2}$)

प्रमाणः आप जानते हैं कि-

$$2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A$$

$$= 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad \text{(cos A का मान रखने पर)}$$

$$= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$$

या, $2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$

या, $2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(a+b+c-2c).(a+b+c-2b)}{2bc}$

या, $2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(2s-2c)(2s-2b)}{2bc}$

या, $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(s-b)(s-c)}{bc}$

या, $\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

$\because A<180^\circ; \because \frac{A}{2}<90^\circ$

अत: $\sin\frac{A}{2}$ धनात्मक होगा।

इस कारण ऋणात्मक मान को छोड़ने पर,

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

पुन: $2\sin^2\frac{B}{2}=1-\cos B$

$$=1-\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$=\frac{2ac-a^2-c^2+b^2}{2ac}$$

$$=\frac{(2s-2a)(2s-2c)}{2ac}$$

या, $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$

इसी प्रकार $\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

2. सिद्ध करें कि-

(i) $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

(ii) $\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$

(iii) $\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$

प्रमाण: 2 (i) आप जानते हैं कि-

$$2\cos^2\frac{A}{2}=1+\cos A$$

$$=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(b+c)^2-(a)^2}{2bc}$$

$$=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$=\frac{(b+c+a)(b+c+a-2a)}{2bc}$$

या, $$2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{2s(s-a)}{bc}$$

या, $$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{s(s-a)}{bc}$$

या, $$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{s(s-a)}{bc}$$ $\because A<180^0$; या $\frac{A}{2}<90^0$

$\therefore \cos\frac{A}{2}$ का मान धनात्मक होगा।

$$\therefore \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

छात्र स्वयं $2\cos^2\frac{B}{2}=1+\cos B$ तथा $2\cos^2\frac{C}{2}=1+\cos C$ सूत्रों की मदद से $\cos\frac{B}{2}$ तथा $\cos\frac{C}{2}$ का मान प्राप्त करें।

3. सिद्ध करें कि-

(i) $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

(ii) $\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$

(iii) $\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

प्रमाण: 3 (i) $\tan^2\frac{A}{2}=\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}$

$$=\frac{1-\cos A}{1+\cos A}$$

या, $\tan^2\frac{A}{2}=\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$

$$=\frac{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}}{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$

$$=\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}$$

$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(b+c+a)(b+c-a)}$$

या, $\tan^2\frac{A}{2}=\frac{(2s-2c)(2s-2b)}{2s(2s-2a)}$

$$=\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}$$

या, $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

$(\because A<180^0;$ या $\frac{A}{2}<90^0)$

$\therefore \tan\frac{A}{2}$ का मान धनात्मक होगा। अतः ऋणात्मक मान को छोड़ दें।)

इसी प्रकार, $\tan\frac{B}{2}$ तथा $\tan\frac{C}{2}$ का मान ज्ञात करें।

4. सिद्ध करें कि-

$$\cot\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}$$

प्रमाण:

$$\cot^2\frac{A}{2}=\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{2\cos^2\frac{A}{2}}{2\sin^2\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{1+\cos A}{1-\cos A}$$

$$=\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$

$$=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc-b^2-c^2+a^2}$$

$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{a^2-(b-c)^2}$$

$$=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{(a+b-c)(a-b+c)}$$

$$=\frac{2s.(2s-2a)}{(2s-2c)(2s-2b)}$$

या, $$\cot^2\frac{A}{2}=\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}$$

या, $$\cot\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}$$ (ऋणात्मक मान को अमान्य करते हुए)

इसी प्रकार $\cot\frac{B}{2}$ तथा $\cot\frac{C}{2}$ का मान ज्ञात करें।

त्रिभुज के कोण के sine का मान भुजाओं के पदों में ज्ञात करना:

सिद्ध करें कि-

$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\sin B = \frac{2}{ac}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\sin C = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

प्रमाण:

$$\because \sin A = 2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}$$

अब $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ तथा $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ का मान रखने पर,

$$\sin A = 2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \times \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$= \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

इसी प्रकार, $\sin\frac{B}{2}$ तथा $\sin\frac{C}{2}$ का मान प्राप्त करें।

$\tan\frac{B-C}{2}$ का मान ज्ञात करना:

सिद्ध करें कि:

(i) $\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$

(ii) $\tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cdot\cot\frac{B}{2}$

(iii) $\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$

हल: दायाँ पक्ष $= \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$

$$=\frac{2R\sin B-2R\sin C}{2R\sin B+2R\sin C}\times\cot\frac{A}{2}$$

$$\left(\because \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\right)$$

$$=\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}\times\cot\frac{A}{2}$$

$$=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}.\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2}}\times\cot\frac{A}{2}$$

$$=\frac{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B-C}{2}}\times\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

(जब $A+B+C=180^0$ तब $\cos\frac{B+C}{2}=\sin\frac{A}{2}$

तथा $\sin\frac{B-C}{2}=\cos\frac{A}{2}$)

$$=\tan\frac{B-C}{2}=\text{बायाँ पक्ष}$$

इसी प्रकार अन्य दो को सिद्ध करें।

उपरोक्त सूत्र को नेपियर (Napier) का tangent नियम भी कहते हैं।

त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना:

जबकि (i) दो भुजाएँ एवं उनके बीच के कोण ज्ञात हों।

(ii) तीनों भुजाएँ ज्ञात हों।

(iii) तीनों कोण एवं कोई एक भुजा ज्ञात हों।

(i) सिद्ध करें कि त्रिभुज का क्षेत्रफल

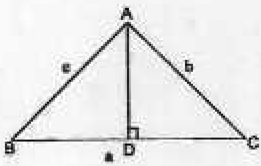
$$(\Delta)=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$$

https://www.studiestoday.com

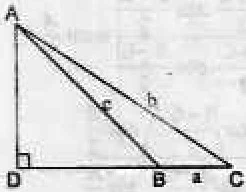
हल: आकृति में A B C क्रमशः न्यून कोण, अधिक कोण एवं समकोण त्रिभुज हैं। A से AD लम्ब आधार BC पर डालें।

स्थिति-I न्यून कोण त्रिभुज में-

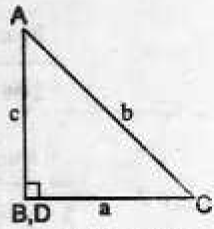
$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल } (\Delta) = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$



आकृति-16(i)



आकृति-16(ii)



आकृति-16(iii)

$$= \frac{1}{2} \times BC \times AD$$

$$= \frac{1}{2} \times BC \times AC \sin C \left(\because \sin C = \frac{AD}{AC} \right)$$

$$= \frac{1}{2} ab \sin C$$

स्थिति-II अधिक कोण त्रिभुज में:

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल } (\Delta) = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$= \frac{1}{2} \times BC \times AD$$

$$= \frac{1}{2} \times BC \times AC \sin C \left(\because \sin C = \frac{AD}{AC} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times a \times b \sin C$$

$$= \frac{1}{2} ab \sin C$$

स्थिति-III समकोण त्रिभुज में:

ΔABC का क्षेत्रफल $(\Delta)=\frac{1}{2}\times BC\times AB$

$$=\frac{1}{2}\times a\times c$$

$$=\frac{1}{2}\times a\times b\sin C\left(\because \sin C=\frac{c}{b}\right)$$

$$=\frac{1}{2}ab\sin C$$

अत: किसी त्रिभुज में $\Delta=\frac{1}{2}ab\sin C$

$$=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A \quad \text{(क्यों?)}$$

(ii) सिद्ध करें कि:

$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{abc}{4R}$$

हल: $\Delta=\frac{1}{2}ab\sin C$

$$=\frac{1}{2}ab2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2}$$

$$=ab\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2}$$

$$=ab\times\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\times\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

$$=\frac{ab}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

पुन: $\Delta=\frac{1}{2}ab\sin C$

$$=\frac{1}{2}ab\frac{c}{2R}\left(\because \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\right)$$

$$=\frac{abc}{4R}$$

(iii) सिद्ध करें कि:

$$\Delta=\frac{1}{2}b^2\frac{\sin C.\sin A}{\sin B}=\frac{1}{2}a^2\frac{\sin B.\sin C}{\sin A}$$

$$=\frac{1}{2}c^2\frac{\sin A.\sin B}{\sin C}$$

हल: $\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A$

$$=\frac{1}{2}b.\frac{b\sin C}{\sin B}\times\sin A\left(\because \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\right)$$

$$=\frac{1}{2}b^2\frac{\sin C.\sin A}{\sin B}$$

इसी प्रकार $\Delta=\frac{1}{2}\frac{a^2\sin B.\sin C}{\sin A}=\frac{1}{2}\frac{c^2\sin A.\sin B}{\sin C}$ को स्वयं सिद्ध करें।

कुछ अन्य सूत्र:

सिद्ध करें कि:

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{(s-b)(s-c)}{\Delta}=\frac{\Delta}{s(s-a)}$$

$$\tan\frac{B}{2}=\frac{(s-a)(s-c)}{\Delta}=\frac{\Delta}{s(s-b)}$$

$$\tan\frac{C}{2}=\frac{(s-a)(s-b)}{\Delta}=\frac{\Delta}{s(s-c)}$$

$$\cot\frac{A}{2}=\frac{\Delta}{(s-b)(s-c)}=\frac{s(s-a)}{\Delta}$$

$$\cot\frac{B}{2}=\frac{\Delta}{(s-a)(s-c)}=\frac{s(s-b)}{\Delta}$$

$$\cot\frac{C}{2}=\frac{\Delta}{(s-a)(s-b)}=\frac{s(s-c)}{\Delta}$$

हल: $$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}\times\frac{(s-b)(s-c)}{(s-b)(s-c)}}$$

$$=\frac{\sqrt{(s-b)^2(s-c)^2}}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$=\frac{(s-b)(s-c)}{\Delta}$$

इसी प्रकार, $\tan\frac{B}{2}$ तथा $\tan\frac{C}{2}$ के संबंध को स्वयं सिद्ध करें।

$$\cot\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}$$

$$=\sqrt{\frac{s(s-a)\times(s-b)(s-c)}{(s-b)(s-c).(s-b)(s-c)}}$$

$$=\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{(s-b)(s-c)}}$$

$$=\frac{\Delta}{(s-b)(s-c)}$$

पुनः $$\cot\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}$$

$$=\sqrt{\frac{s(s-a)(s)(s-a)}{(s-b).s(s-a)}}$$

$$=\frac{s(s-a)}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$=\frac{s(s-a)}{\Delta}$$

इसी प्रकार, $\cot\frac{B}{2}$ तथा $\cot\frac{C}{2}$ के संबंध को सिद्ध करें।

उदाहरण 1: किसी त्रिभुज, A B C में a = 17, b = 21 तथा c = 34, हो तो $\sin\frac{A}{2}, \cos\frac{B}{2}$ और $\tan\frac{C}{2}$ ज्ञात करें।

हल: यहाँ $S = \frac{a+b+c}{2} = \frac{17+21+34}{2} = 36$

अब $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

$$= \sqrt{\frac{(36-21)(36-34)}{21\times 34}}$$

$$= \sqrt{\frac{15\times 2}{21\times 34}} = \sqrt{\frac{5}{119}}$$

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$$

$$= \sqrt{\frac{36\times 15}{34\times 17}} = \frac{3}{17}\sqrt{30}$$

$$\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

$$= \sqrt{\frac{19\times 15}{36\times 2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{95}{6}}$$

उदाहरण 2: सिद्ध करें कि

$$(b-c)\cos\frac{A}{2} = a\sin\frac{B-C}{2}$$

हल: बायाँ पक्ष $= (b-c)\cos\frac{A}{2}$

$$= (2R\sin B - 2R\sin C)\cos\frac{A}{2}$$

$$\left(\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = 2R\right)$$

$$= 2R(\sin B - \sin C)\cos\frac{A}{2}$$

$$= 2R.2\cos\frac{B+C}{2}.\sin\frac{B-C}{2}.\cos\frac{A}{2}$$

$$= 2R.2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B-C}{2}$$

$$= 2R\sin A\sin\frac{B-C}{2} = a\sin\frac{B-C}{2} =$$ दायाँ पक्ष।

उदाहरण 3: यदि $B = 45^0, C = 75^0$ तथा $b = 20$ सेमी तो a ज्ञात करें।

हल: अब $A = 180^0 - B - C = 60^0$

$$\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

या, $$a = \frac{b}{\sin B} \times \sin A$$

$$= \frac{20}{\sin 45^0} \times \sin 60^0$$

$$= \frac{20}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$= 10\sqrt{6}$ सेमी।

उदाहरण 4: यदि किसी त्रिभुज की भुजाएँ 6 सेमी, 10 सेमी तथा 14 सेमी हों तो सबसे बड़ा कोण निकालें।

हल: सबसे बड़ी भुजा के सामने का कोण सबसे बड़ा होगा।

मान लें कि $a = 6$ सेमी

$b = 10$ सेमी

$c = 14$ सेमी

$\therefore \angle C$ सबसे बड़ा कोण होगा।

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{36 + 100 - 196}{2 \times 6 \times 10} = \frac{-60}{120}$$

$$=-\frac{1}{2}=\cos 120^{\circ}$$

या, $c=120^{\circ}$

उदाहरण 5: $\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}=\frac{a^2-b^2}{c^2}$

हल:

$$=\frac{(2R\sin A)^2-(2R\sin B)^2}{(2R\sin C)^2}$$

$$\left(\because \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\right)$$

$$=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin^2 C}$$

$$=\frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin^2 C}$$

$$=\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$$

$$(\because A+B+C=180^{0}\, then, \sin(A+B)=\sin C)$$

$$=\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}$$

उदाहरण 6: सिद्ध करें कि-

$$\Delta=\frac{b^2+c^2-a^2}{4\cot A}$$

हल: दायाँ पक्ष $=\frac{b^2+c^2-a^2}{4\cot A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\times\frac{2bc}{4\cot A}$

$$=\cos A\times\frac{bc}{\frac{2\cos A}{\sin A}}$$

$$=\frac{1}{2}bc.\sin A$$

$=\Delta=$ बायाँ पक्ष

उदाहरण 7: किसी त्रिभुज के कोणों के Cosines सम्मुख भुजाओं के समानुपाती हैं, तो सिद्ध करें कि त्रिभुज समबाहु है।

हल: $\because \dfrac{\cos A}{a} = \dfrac{\cos B}{b} = \dfrac{\cos C}{c}$

या, $\dfrac{\cos A}{2R\sin A} = \dfrac{\cos B}{2R\sin B} = \dfrac{\cos C}{2R\sin c}$

$$\left(\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R\right)$$

या, $\dfrac{\cos A}{\sin A} = \dfrac{\cos B}{\sin B} = \dfrac{\cos C}{\sin C}$

या, $\cot A = \cot B = \cot C$

या, $A = B = C$

अत: त्रिभुज समबाहु है।

उदाहरण 8. किसी त्रिभुज A B C में, $a\tan A + b\tan B = (a+b)\tan\dfrac{A+B}{2}$ तो, सिद्ध करें कि त्रिभुज समद्विबाहु होगा।

हल: $a\tan A + b\tan B = (a+b)\tan\dfrac{A+B}{2}$

या, $a\tan A - a\tan\dfrac{A+B}{2} = b\tan\dfrac{A+B}{2} - b\tan B$

या, $$a\left\{\frac{\dfrac{\sin A}{\cos A} - \sin\dfrac{A+B}{2}}{\cos\dfrac{A+B}{2}}\right\} = b\left\{\frac{\sin\dfrac{A+B}{2}}{\cos\dfrac{A+B}{2}} - \frac{\sin B}{\cos B}\right\}$$

या, $$a\frac{\sin A.\cos\dfrac{A+B}{2} - \cos A.\sin\dfrac{A+B}{2}}{\cos A.\cos\dfrac{A+B}{2}}$$

$$= b\frac{\sin\dfrac{A+B}{2}.\cos B - \sin B.\cos\dfrac{A+B}{2}}{\cos B.\cos\dfrac{A+B}{2}}$$

या, $a\dfrac{\sin\dfrac{A-B}{2}}{\cos A}=b\dfrac{\sin\dfrac{A-B}{2}}{\cos B}$ $\left(\because \cos\dfrac{A+B}{2}\neq 0\right)$

या, $\sin\dfrac{A-B}{2}\left\{\dfrac{a}{\cos A}-\dfrac{b}{\cos B}\right\}=0$

या, तो $\sin\dfrac{A-B}{2}=0$

या, $\dfrac{a}{\cos A}-\dfrac{b}{\cos B}=0$

यदि, $\sin\dfrac{A-B}{2}=0$

तब, $\dfrac{A-B}{2}=0$

या, $A-B=0$

या, $A=B$

यदि $\dfrac{a}{\cos A}-\dfrac{b}{\cos B}=0$

तब $\dfrac{2R\sin A}{\cos A}-\dfrac{2R\sin B}{\cos B}=0$

या, $\dfrac{\sin A}{\cos A}-\dfrac{\sin B}{\cos B}=0$

या, $\tan A=\tan B$

या, $A=B$

दोनों स्थितियों में $A=B$.

उदाहरण 9: किसी त्रिभुज ABC में, सिद्ध करें कि-

$$\frac{\cos 2A}{a^2}-\frac{\cos 2B}{b^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$$

हल: बायाँ पक्ष $=\dfrac{\cos 2A}{a^2}-\dfrac{\cos 2B}{b^2}$

$$=\frac{1-2\sin^2 A}{a^2}-\frac{1-2\sin^2 B}{b^2}$$

$$=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}-\left(\frac{2\sin^2 A}{a^2}-\frac{2\sin^2 B}{b^2}\right]$$

$$=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}-2\left[\frac{\sin^2 A}{a^2}-\frac{\sin^2 B}{b^2}\right)$$

$$=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}-2\left\{\frac{\sin^2 A}{a^2}-\frac{\sin^2 B}{b^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}-2(0)=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=$$ दायाँ पक्ष

उदाहरण 10: यदि किसी त्रिभुज A B C में $\angle C=90^0$

तो सिद्ध करें कि-

$$\sin(A-B)=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

हल: $\because \angle C=90^0; \therefore \angle A+\angle B=90^0$

अब दायाँ पक्ष $=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

$$=\frac{(2R\sin A)^2-(2R\sin B)^2}{(2R\sin A)^2+(2R\sin B)^2}$$

$$\left(\because \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\right)$$

$$=\frac{\sin^2 A-\sin B^2}{\sin^2 A+\sin^2 B}$$

$$=\frac{\sin(A+B).\sin(A-B)}{\sin^2 A+\sin^2(90-A)} \quad (\because \angle B=90^0-A)$$

$$=\frac{\sin 90^0.\sin(A-B)}{\sin^2 A+\cos^2 A}$$

$$=\sin(A-B) \quad (\because \sin^2 A+\cos^2 A=1)$$

= बायाँ पक्ष

उदाहरण 11: यदि किसी त्रिभुज A B C में कोणों का अनुपात 3 : 4 : 5 हो, तो a : b : c ज्ञात करें।

हल: मान लें कि A, B तथा C कोण के मान क्रमश: $3x, 4x, 5x$ है।

$\therefore 3x+4x+5x=180^0$

या, $x=15^0$

$\therefore A=45^0, B=60^0$ और $C=75^0$

अब, $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

$=\sin 45^0:\sin 60^0:\sin 75^0$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}:\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$=2:\sqrt{6}:\sqrt{3}+1$

उदाहरण 12: यदि किसी त्रिभुज A B C में $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$, तब A का मान ज्ञात करें।

हल: $\because (a+b+c)(b+c-a)=3bc$

या, $2s(b+c+a-2a)=3bc$ जहाँ $(a+b+c=2s)$

या, $4s(s-a)=3bc$

या, $\frac{s(s-a)}{bc}=\frac{3}{4}$

या, $\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

या, $\cos\frac{A}{2}=\cos 30^0$ या $\cos 150^0$ या, $A=60^0$ या 300^0

किसी Δ में $A=300^0$ संभव नहीं है। $\therefore A=60^0$

उदाहरण 13: किसी त्रिभुज A B C में, सिद्ध करें कि-

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}$$

हल: बायाँ पक्ष$=\frac{a-b}{c}=\frac{2R\sin A-2R\sin B}{2R\sin C}$

$=\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}$

$$=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}.\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{C}{2}.\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}}$$

$\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}$ से भाग देने पर,

$$=\frac{\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}=\text{ दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 14: किसी त्रिभुज A B C में, सिद्ध करें कि

$$(b^2-c^2)\sin^2 A+(c^2-a^2)\sin^2 B+(a^2-b^2)\sin^2 C=0$$

हल: बायाँ पक्ष $=(b^2-c^2)\sin^2 A+(c^2-a^2)\sin^2 B+(a^2-b^2)\sin^2 C$

मानें कि, $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=k$

$\because \sin A=ak$

$\sin B=bk$

$\sin C=ck$

$\therefore$ बायाँ पक्ष $=(b^2-c^2)a^2k^2+(c^2-a^2)b^2k^2+(a^2-b^2)c^2k^2$

$=a^2b^2k^2-a^2c^2k^2+b^2c^2k^2-a^2b^2k^2+a^2c^2k^2-b^2c^2k^2$

$=0=$ दायाँ पक्ष।

उदाहरण 15: किसी त्रिभुज A B C में, सिद्ध करें कि

(i) $$\frac{a+b-c}{a+b+c}=\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}$$

(ii) $$2\left[a\sin^2\frac{C}{2}+c\sin^2\frac{A}{2}\right]=c+a-b$$

हल: (i) दायाँ पक्ष $=\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}$

$$=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)(s-a)(s-c)}{s^2(s-a)(s-b)}}$$

$$=\frac{s-c}{s}=\frac{\frac{a+b+c}{2}-c}{\frac{a+b+c}{2}}$$

$$=\frac{a+b-c}{a+b+c}=$$ बायाँ पक्ष।

(ii) बायाँ पक्ष $=2\left\{a\frac{(s-a)(s-b)}{ab}+c\frac{(s-b)(s-c)}{bc}\right\}$

$$=2\left\{\frac{(s-a)(s-b)}{b}+\frac{(s-b)(s-c)}{b}\right\}$$

$$=2(s-b)\left\{\frac{s-a+s-c}{b}\right\}$$

$$=2\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c-a-c}{2}\right)$$

$$=(a+c-b)(1)=(c+a-b)=$$ दायाँ पक्ष।

उदाहरण 16: किसी त्रिभुज A B C में सिद्ध करें कि-

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

हल: बायाँ पक्ष $=\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}$

$$=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\times a}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac\times b}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab\times c}$$

$$=\frac{1}{2abc}\{b^2+c^2-a^2+a^2+c^2-b^2+a^2+b^2-c^2\}$$

$$=\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}=\text{ दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 17: किसी त्रिभुज A B C में सिद्ध करें कि-

$$\frac{\cos B}{\cos C}=\frac{c-b\cos A}{b-c\cos A}$$

हल: दायाँ पक्ष $=\dfrac{c-b\cos A}{b-c\cos A}$

$$=\frac{a\cos B+b\cos A-b\cos A}{a\cos C+c\cos A-c\cos A}$$

$$=\frac{a\cos B}{a\cos C}=\frac{\cos B}{\cos C}=\text{ बायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 18: सिद्ध करें कि-

$$\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=0$$

हल: बायाँ पक्ष $=\dfrac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\dfrac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\dfrac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C$

$$=\frac{\sin^2 B-\sin^2 C}{\sin^2 A}.2\sin A\cos A+\frac{\sin^2 C-\sin^2 A}{\sin^2 B}\times 2\sin B.\cos B$$
$$+\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin^2 C}\times 2\sin C.\cos C$$

$$=\frac{\sin(B+C).\sin(B-C)}{\sin A}\times 2\cos A+\frac{\sin(C+A).\sin(C-A)}{\sin B}\times 2\cos B$$
$$+\frac{\sin(A+B).\sin(A-B)}{\sin C}\times 2\cos C$$

$$=2\cos A.\sin(B-C)+2\cos B.\sin(C-A)+2\cos C.\sin(A-B)$$

$$=2\cos A\{\sin B.\cos C-\cos B.\sin C\}+2\cos B$$
$$\{\sin C.\cos A-\cos C.\sin A\}$$
$$+2\cos C\{\sin A.\cos B-\cos A.\sin B\}$$

$=0$ दायाँ पक्ष।

उदाहरण 19: यदि $\frac{\tan A-\tan B}{\tan A+\tan B}=\frac{c-b}{c}$ तो सिद्ध करें कि $\angle A=60^\circ$

हल: $\because \frac{\tan A-\tan B}{\tan A+\tan B}=\frac{c-b}{c}$

या, $\frac{\frac{\sin A}{\cos A}-\frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}}=\frac{c-b}{c}$

या, $\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}=\frac{\sin C-\sin B}{\sin C}$

या, $\sin(A-B)=\sin C-\sin B$

$(\because \sin(A+B)=\sin C\neq 0)$

या, $\sin(A-B)=\sin(A+B)-\sin B$

या, $\sin(A+B)-\sin(A-B)=\sin B$

या, $2\cos A.\sin B=\sin B$ $\quad(\because \sin B\neq 0)$

या, $2\cos A=1$

या, $\cos A=\frac{1}{2}$

या, $A=60^\circ$

उदाहरण 20: यदि $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}$, तब त्रिभुज या तो समकोण होगा या समद्विबाहु।

हल: $\because \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}$

या, $\frac{a^2+b^2+a^2-b^2}{a^2+b^2-a^2+b^2}=\frac{\sin(A+B)+\sin(A-B)}{\sin(A+B)-\sin(A-B)}$

या, $\frac{a^2}{b^2}=\frac{2\sin A.\cos B}{2\cos A.\sin B}$

या, $\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}=\frac{2\sin A.\cos B}{2\cos A.\sin B}$

या, $\sin A.\sin B(\sin 2A-\sin 2B)=0$

या, $\sin 2A - \sin 2B = 0$ $(\because \sin A \neq 0, \sin B \neq 0)$

या, $2\cos(A+B).\sin(A-B) = 0$

$\therefore \cos(A+B) = 0$

या, $\sin(A-B) = 0$

जब, $\cos(A+B) = 0$

तब, $A+B = 90^0$

या, $C = 180^0 - 90^0 = 90^0$

जब, $\sin(A-B) = 0$

तब, $A - B = 0$

या, $A = B$

$\therefore$ या तो त्रिभुज समकोण होगा या समद्विबाहु।

उदाहरण 21: यदि किसी त्रिभुज A B C की ऊँचाइयाँ क्रमशः h_1, h_2, h_3 हों, तो

सिद्ध करें कि $\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} = \frac{\cot A + \cot B + \cot C}{\Delta}$

हल: $\Delta = \frac{1}{2} a h_1, = \frac{1}{2} b h_2 = \frac{1}{2} c h_3$

$$\therefore \quad \frac{1}{h_1} = \frac{a}{2\Delta}$$

$$\frac{1}{h_2} = \frac{b}{2\Delta}$$

$$\frac{1}{h_3} = \frac{c}{2\Delta}$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष $= \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} = \frac{1}{4\Delta^2}(a^2 + b^2 + c^2)$

पुनः दायाँ पक्ष $= \frac{\cot A + \cot B + \cot C}{\Delta}$

$$= \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin C}\right)$$

$$=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\sin A}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca\sin B}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab\sin C}\right)$$

$$=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2.2\Delta}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2.2\Delta}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2.2\Delta}\right)$$

$$=\frac{1}{4\Delta^2}(a^2+b^2+c^2)$$

प्रश्नावली–10

1. किसी त्रिभुज A B C में शेष भागों (भुजाओं तथा कोणों) को ज्ञात करें।

   (i) $a=1, b=\sqrt{3}, A=30^0$ (ii) $b=3\sqrt{2}, c=2\sqrt{3}, C=45^0$

   (iii) $b=\sqrt{6}, c=2\sqrt{3}, B=30^0$ (iv) $a=2\sqrt{3}, c=3\sqrt{2}, C=60^0$

   (v) $b=3, c=6, B=30^0$ (vi) $a=2, b=4, C=60^0$

2. किसी त्रिभुज A B C में $\tan\frac{A}{2}=\frac{5}{6}, \tan\frac{B}{2}=\frac{20}{37}$ हो, तो $\tan\frac{C}{2}$ का मान बतावें।

3. किसी त्रिभुज A B C में सिद्ध करें कि

   (i) $a\sin A-b\sin B=c\sin(A-B)$

   (ii) $(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=a+b+c$

   (iii) $a(b\cos C-c\cos B)=b^2-c^2$

   (iv) $a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0$

   (v) $a\cos\frac{B-C}{2}=(b+c)\sin\frac{A}{2}$

   (vi) $a\sin\frac{B-C}{2}=(b-c)\cos\frac{A}{2}$

   (vii) $(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B+(a^2-b^2)\cot C=0$

(viii) $a^2+b^2+c^2=2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C)$

(ix) $(b^2-c^2)\cos 2A+(c^2-a^2)\cos 2B+(a^2-b^2)\cos 2C=0$

(x) $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$

(xi) $a^3\cos(B-C)+b^3\cos(C-A)+c^3\cos(A-B)=3abc$

(xii) $a^3\sin(B-C)+b^3\sin(C-A)+c^3\sin(A-B)=0$

(xiii) $\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=0$

(xiv) $\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}=0$

(xv) $\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin A+\sin C}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin C+\sin A}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B}=0$

(xvi) $\tan\left(\frac{A}{2}+B\right)=\frac{c+b}{c-b}\tan\frac{A}{2}$

(xvii) $\frac{b^2-c^2}{a^2}=\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)}$

(xviii) $\frac{b^2+c^2-a^2}{c^2+a^2-b^2}=\frac{\tan B}{\tan A}$

(xix) $\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{c-a\cos B}{b-a\cos C}$

4. यदि $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$ हो, तो सिद्ध करें कि $C=60^0$

5. यदि $b+c=2a\cos\frac{b-c}{2}$ हो, तो सिद्ध करें कि $A=60^0$

6. यदि $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$ हो, तो सिद्ध करें कि $A=60^0$

7. यदि किसी त्रिभुज A B C में, $2\cos A=\frac{\sin B}{\sin C}$ हो, तो सिद्ध करें कि वह समद्विबाहु त्रिभुज होगा।

8. किसी त्रिभुज में $a:b:c=4:5:6$ हो, तो सिद्ध करें कि महत्तम कोण लघुत्तम कोण का दूना है।

9. यदि $a=25, b=52, c=63,$ तो $\tan\frac{A}{2}$ तथा का मान बतावें।

10. यदि $a=125, b=123$ और $c=62$ हो तो

(i) $\sin\frac{A}{2}, \cos\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}$ तथा

(ii) $\sin A, \cos B, \tan C$ का मान बतावें।

11. किसी त्रिभुज A B C में, सिद्ध करें कि

(i) $(a+b-c)\cot\frac{B}{2}=(a-b+c)\cot\frac{C}{2}$

(ii) $(a+b+c)\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)=2c\cot\frac{C}{2}$

(iii) $(a+b+c)\sin\frac{A}{2}=2a\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$

कलन (Calculus)

2.1 संबंध एवं फलन

(RELATION AND FUNCTION)

2.1.1 प्रस्तावना

दैनिक जीवन में हम अक्सर संबंध की बात करते हैं, जैसे- रमेश, लड्डू का पिता है, रम्या हर्ष की बहन है, आबिदा जुनैद की खाला है, कलबतिया कुल्लू की चाची है, हसन जिला स्कूल भागलपुर का छात्र है, इम्तयाज टुड्डू के शिक्षक हैं, पप्पू चकसलेम गाँव में रहता है इत्यादि, अर्थात् हम दैनिक जीवन में पिता और पुत्र, भाई और बहन, विद्यालय और छात्र, शिक्षक और शिक्षार्थी, ग्राम और ग्रामवासी आदि संबंधों को चित्रित करनेवाले अनेक पैटर्नों को चिह्नित करते हैं। गणित में भी हमें अनेक संबंध मिलते हैं, जैसे 'संख्या m संख्या n से बड़ी है ($m>n$)', 'संख्याएँ a और b बराबर हैं ($a=b$), 'सरल रेखा ℓ_1 सरल रेखा ℓ_2 पर लम्ब है ($\ell_1 \perp \ell_2$) 'त्रिभुज (Δ_1) और त्रिभुज (Δ_2) समरूप ($\Delta_1 \quad \Delta_2$) हैं', 'समुच्चय X, समुच्चय Y का उपसमुच्चय है' ($X \subset Y$)। इन सभी संबंधों में हम देखते हैं कि किसी संबंध में एक ऐसा युग्म सम्मिलित है जिसके घटक (अवयव) एक निश्चित क्रम का पालन करते हैं अर्थात् एक पैटर्न को मानते हैं। गणित में शब्द 'संबंध (relation)' की संकल्पना को अंग्रेजी भाषा में इस शब्द के अर्थ से लिया गया है जिसके अनुसार दो वस्तुएँ परस्पर संबंधित होती हैं यदि उनके बीच एक अभिज्ञेय (recognisable) कड़ी हो।

इस अध्याय में हम सीखेंगे कि किस प्रकार दो समुच्चयों के सदस्य-युग्मों में आने वाले दोनों सदस्यों के बीच बननेवाले संबंधों को एवं उन संबंधों के प्रकारों को स्पष्ट कर सकेंगे। अन्त में, हम ऐसे विशेष संबंधों के बारे मे जानेंगे जो फलन बनने योग्य हैं। फलन की परिकल्पना गणित में अत्यन्त महत्त्वपूर्ण है क्योंकि यह एक वस्तु से दूसरी वस्तु के बीच गणित के संबंध में यथातथ्य संगतता (recognisable correspondence) के विचार का अभिग्रहण करती है।

2.1.2 समुच्चयों का कार्तीय गुणन (Cartesian Product of sets)

कक्षा IX के उच्चगणित में समुच्चयों का कार्तीय गुणन से परिचय कराया जा चुका है। स्मरण के लिए हमलोग यहाँ इसके बारे में थोड़ी और चर्चा कर लेते हैं।

मान लीजिए कि $A = \{1,2\}$

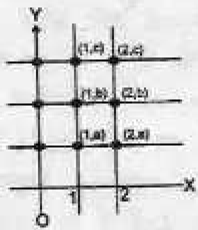
और $B = \{a,b,c\}$

अब समुच्चय A के अवयव के साथ समुच्चय B के अवयव का युग्म बनाने पर $(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)$ कुल छह युग्म बनेंगे। पिछली कक्षा से स्मरण कीजिए कि, एक क्रमित युग्म अवयवों का वह युग्म है जिसे वक्र छोटी कोष्ठक में लिखते हैं और जिनको एक दूसरे से किसी विशेष क्रम में समूहित किया जाता है अर्थात् $\{(x,y): x \in A$ और $y \in B\}$.

अतः $A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$

इसी प्रकार $B \times A = \{(a,1),(b,1),(c,1),(a,2),(b,2),(c,2)\}$

$A \times B$ के अवयवों को आकृति 1.1 के द्वारा भी समझा जा सकता है।



आकृति 1.1

क्रमित युग्मों की समानता की परिभाषा से युग्म $(2,a)$, युग्म $(a,2)$ के समान नहीं है और यह बात कार्तीय गुणन के प्रत्येक युग्म के लिए लागू होती है जिससे हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $A \times B \neq B \times A$, परन्तु दोनों समुच्चयों में अवयवों की संख्या समान है अर्थात् $n(A \times B) = n(B \times A)$.

यहाँ हम पाते हैं कि यदि A और B दो सीमित समुच्चय (finite Sets) हों तो $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$

उदाहरण 1: यदि $\left(\frac{a}{3}+1, b-\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$ तो a तथा b ज्ञात कीजिए।

हल: हम यहाँ देखते हैं कि क्रमित युग्म समान है, इसलिए संगत घटक भी समान होंगे।

अतः $\frac{a}{3}+1 = \frac{5}{3}$

$$\Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{5}{3} - 1 = \frac{5-3}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow a = 2.$$

और $b-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow b=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1$

$\Rightarrow b=1$

उदाहरण 2: यदि समुच्चय A में 4 अवयव हैं तथा समुच्चय $B=\{a,b,c\}$, तो $A\times B$ में अवयवों की संख्या ज्ञात करें।

हल: हम जानते हैं कि जब A और B दो सीमित समुच्चय हों, तो $n(A\times B)=n(A)n(B)$

चूँकि समुच्चय A में 4 अवयव और समुच्चय B में 3 अवयव हैं,

अतः $n(A\times B)=n(A)n(B)=4\times 3=12$

$\Rightarrow A\times B$ में अवयवों की संख्या 12 होगी।

उदाहरण 3: यदि $P\times Q=\{(a,x),(a,y),(a,z),(b,x),(b,y),(b,z)\}$ तो P तथा Q ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ दिया गया है-

$P\times Q=\{(a,x),(a,y),(a,z),(b,x),(b,y),(b,z)\}$

$P=$ युग्म के प्रथम घटकों का समुच्चय $=\{a,b\}$

$Q=$ युग्म के द्वितीय घटकों का समुच्चय $=\{x,y,z\}$

उदाहरण 4: यदि $A=\{1,2,3\}$ और $B=\{3,5\}$, तो $A\times B$ लिखिए। $A\times B$ के कितने उपसमुच्चय होंगे?

हल: $A=\{1,2,3\}$

$B=\{3,5\}$

$A\times B=\{(1,3),(1,5),(2,3),(2,5),(3,3),(3,5)\}$

हम जानते हैं कि यदि समुच्चय X में अवयवों की संख्या n है तो समुच्चय X के उपसमुच्चयों की संख्या 2^n होती है।

यहाँ $A\times B$ में अवयवों की संख्या 6 है, तो $A\times B$ के उपसमुच्चयों की संख्या $2^6=64$ होगी।

उदाहरण 5: कार्तीय गुणन $P\times P$ में 9 अवयव हैं, जिनमें दो अवयव $(-1,0)$ तथा $(0,1)$ भी शामिल हैं। समुच्चय P ज्ञात कीजिए तथा $P\times P$ के शेष अवयव भी ज्ञात कीजिए।

हल: कार्तीय गुणन $P\times P$ में 9 अवयव हैं। स्पष्टत: $P\times P$ में समुच्चय P के अवयवों के द्वारा युग्म बनेगा, अर्थात् $P\times P$ के अवयव $(-1,0),(0,1)$ है, तो $-1,0,1$ P के अवयव होंगे। शर्तानुसार $P\times P$ में 9 अवयव है अत: P में 3 अवयव होंगे।

$\Rightarrow P\times P=\{(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(0,-1),(0,0),(0,1), \Rightarrow P=\{-1,0,1\}$

$\Rightarrow p\times p=\{(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(0,-1),(0,0),(01),(1,-1),(1,0),(1,1)\}$

$P\times P$ के $(-1,0),(0,1)$ के अलावा-

$(-1,-1),(-1,1),(0,-1),(0,0),(1,-1),(1,0),(1,1)$ अवयव हैं।

प्रश्नावली-1

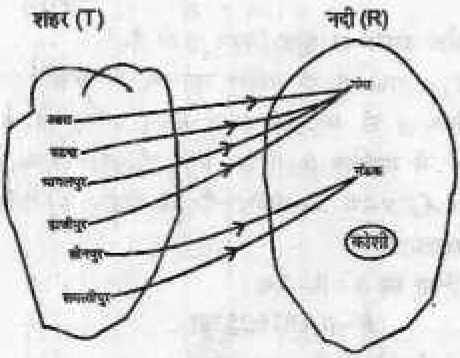
1. यदि $(a+1,b-3)=(2,5)$, तो a और b के मान ज्ञात कीजिए।
2. यदि $A=\{1,2,3\}$ और $B=\{2014\}$, तो $A\times B$ तथा $B\times A$ ज्ञात कीजिए। क्या दोनों कार्तीय गुणन समान हैं?
3. मान लीजिए कि $X=\{a,b\},Y=\{a,b,c,d\},Z=\{e,f\},T=\{e,f,g,h\}$, सत्यापित करें कि (i) $X\times(Y\cap Z)=(X\times Y)\cap(X\times Z)$

   (ii) $X\times Z\subset Y\times T$
4. यदि $A=\{2013,2014\}$ और $B=\{1001,5050,111\}$, तो $A\times B$ और $B\times A$ ज्ञात कीजिए।
5. यदि कार्तीय गुणन $A\times A$ में 16 अवयव हैं जिनमें अवयव $(1,2),(4,1),(3,2)$ भी हैं। समुच्चय A ज्ञात कीजिए तथा $A\times A$ के शेष अवयव भी ज्ञात कीजिए।
6. मान लीजिए कि A और B दो समुच्चय हैं जहाँ $n(A)=3$ और $n(B)=2$। यदि $(a,1),(b,2),(c,1), A\times B$ में हैं, तो A और B ज्ञात करें, जहाँ a,b,c भिन्न-भिन्न अवयव हैं।
7. यदि $A=\{a,b,c\}$, तो $A\times A$ के उपसमुच्चयों की संख्या ज्ञात कीजिए।
8. यदि $(x-y,x+y)=(3,5)$, तो x और y के मान ज्ञात कीजिए।
9. यदि $A=\{a,b,c\},B=\{x,y\}$ और $C=\{b,y\}$ तो जाँच करके बताएँ कि समीकरण $A\times(B\cup C)=(A\cup B)\times(A\cup B)$ सही है या गलत?
10. यदि $M=A\cap B$, तो सिद्ध करें कि-

$$M\times M=(A\times A)\cap(B\times B)$$

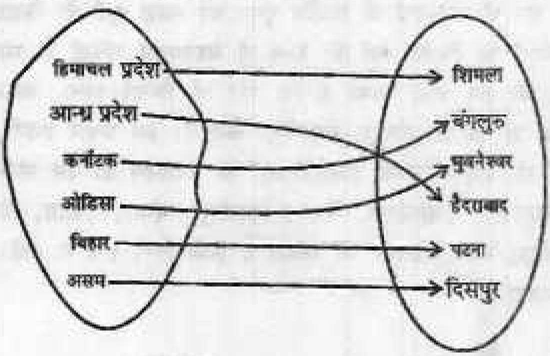
1.3 संबंध (Relation)

अबतक हम दो समुच्चयों के कार्तीय गुणन को समझ चुके हैं। बिहार में बहुत ऐसे हर हैं जो नदियों के किनारे बसे हैं। राज्य में बहनेवाली नदियों से सम्बद्ध शहर को रणीबद्ध करते हैं। हम सभी जानते हैं कि गंगा के किनारे पटना, भागलपुर, हाजीपुर, ारा तथा गंडक के किनारे सोनपुर, समस्तीपुर बसा है। इस प्रकार शहरों के नामों को दियों के नामों से जोड़ना 'संबंध (Relation)' के उदाहरण हैं। इस संबंध को क्रमित ग्मों में (पटना,गंगा), (भागलपुर, गंगा), (हाजीपुर, गंगा), (आरा, गंगा), (सोनपुर, ंडक), (समस्तीपुर, गंडक) लिखा जा सकता है जिसे निम्न रूप से तीरों के चिह्नों द्वारा देखलाया जा सकता है-



समुच्चयों के अवयवों से बने क्रमित युग्म एक संबंध के अवयव हैं। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि संबंध कार्तीय गुणन $T \times R$ का एक उपसमुच्चय है जिसमें क्रमित युग्मों के प्रथम तथा द्वितीय घटकों के मध्य एक संबंध स्थापित करने से होता है। अभी तक आपने संबंध को प्रायः वाक्यांशों में वर्णित होते पढ़ा है। उदाहरण के लिए रामू श्यामू का भाई है, सारिका रमेश की बहन है, मोईन अजहर का अब्बू है, सोरेन टुड्डू का पिता है, रम्या की आयु सत्यम से अधिक है, मनोज और विकास पड़ोसी हैं, इत्यादि। गणित में संबंध, उदाहरण 'बराबर है', 'अधिक है', 'कम है', 'समरूप है', 'एकल गुणनखण्ड है', 'एक अपवर्त्य है' इत्यादि से आप भली-भाँति परिचित हैं। हम कुछ अन्य संबंधों की भी कल्पना कर सकते हैं।

निम्नलिखित चित्र में राज्यों एवं उनकी राजधानियों' में संबंध दर्शाया गया है



उपर्युक्त तीर-आरेख संबंध का दृष्टि-चित्रण करता है।

परिभाषा: मानलिया कि A तथा B दो अरिक्त समुच्चय है कार्तीय गुणन $A\times B$ का उपसमुच्चय R, समुच्चय A से समुच्चय B में संबंध परिभाषित करता है अर्थात् $R\subset A\times B$ समुच्चय A से समुच्चय B में एक संबंध परिभाषित करता है। क्रमित युग्म $(x,y)\in R$ अवयव $x\in A$, $y\in B$ से संबंधित है को दर्शाता है। द्वितीय घटक प्रथम घटक का प्रतिबिम्ब कहलाता है।

उदाहरण के लिए मान लिया कि $A=\{1,2,3,4\}$

$$B=\{1,4,9,16,25,36\}$$

$$R=\{(x,y): y=x^2 \text{ जहाँ}, x\in A\} \subset A\times B$$

$$=\{(1,1),(2,4),(3,9),(4,16)\}\subset A\times B$$

समुच्चय A के अवयवों को समुच्चय B के अवयवों के साथ 'x का वर्ग x^2 है' संबंध के साथ संबंधित करता है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि $A\times B$ का उपसमुच्चय अरिक्त समुच्चय A से अरिक्त समुच्चय B में एक संबंध को परिभाषित करता है। अत: अरिक्त समुच्चय A से अरिक्त समुच्चय B में संबन्धों की कुल संख्या, $A\times B$ के संभव उपसमुच्चयों की संख्या के बराबर होती है। यदि $n(A)=m$ तथा $n(B)=n$ हो, तो $n(A\times B)=mn$ और संबंधों की कुल संख्या 2^{mn} होती है।

मान लिया कि $A=\{a,b,c\}, B=\{1,2\}$, तो

$$n(A\times B)=3\times 2=6$$

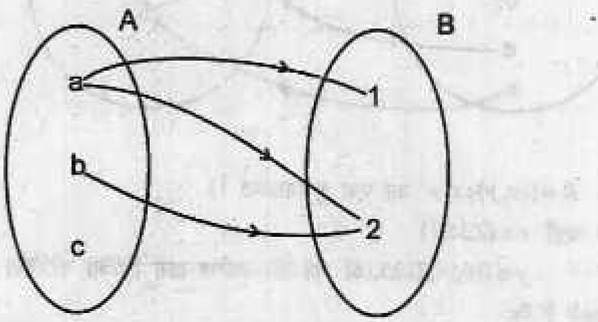
$A \times B$ के उपसमुच्चयों की संख्या $2^6 = 64$ है, अर्थात् A से B के संभव संबंधों की संख्या 64 है।

यदि $A = B$ हो, तो $R \subset A \times A$ समुच्चय A से A में अर्थात A पर संबंध परिभाषित करता है।

परिभाषा: अरिक्त समुच्चय A से अरिक्त समुच्चय B में संबंध R अर्थात् $R \subset A \times B$ के क्रमित युग्मों के सभी प्रथम घटकों के समुच्चय को संबंध R का प्रांत (domain) कहते हैं तथा क्रमित युग्मों के सभी द्वितीय घटकों के समुच्चय को संबंध R का परिसर (range) कहते हैं। समुच्चय B संबंध R का सह-प्रांत (co-domain) कहलाता है। अतः परिसर $\subset$ सह-प्रांत

$R = \{(a,1),(b,2),(a,2)\} \subset A \times B$

समुच्चय $A = \{a,b,c\}$ से समुच्चय $B = \{1,2\}$ में एक संबंध परिभाषित करता है जहाँ संबंध R का प्रांत $(domain) = \{a,b\}$ तथा परिसर $(range) = \{1,2\}$ है। उपर्युक्त संबंध को आरेख द्वारा भी दृष्टि-चित्रण इस प्रकार किया जाता है।



इस प्रकार हम कह सकते हैं कि

(i) एक संबंध का बीजीय निरूपण या तो रोस्टर विधि या समुच्चय-निर्माण विधि द्वारा किया जा सकता है।

(ii) तीर-आरेख किसी संबंध का एक दृष्टि-चित्रण है।

उदाहरण 1: संबन्ध $R = \{(1,3),(2,6),(3,9),(5,15),(6,18)\}$ को समुच्चय-निर्माण विधि में

व्यक्त कीजिए। संबंध का प्रांत और परिसर भी लिखें।

हल:- दिये गये संबंध के कार्तीय युग्म को देखने से पता चलता है कि युग्म का द्वितीय अवयव पहले अवयव का तीन गुना है। अत: समुच्चय-निर्माण विधि Set builder notation) में संबंध R को निम्नानुसार व्यक्त किया जा सकता है-

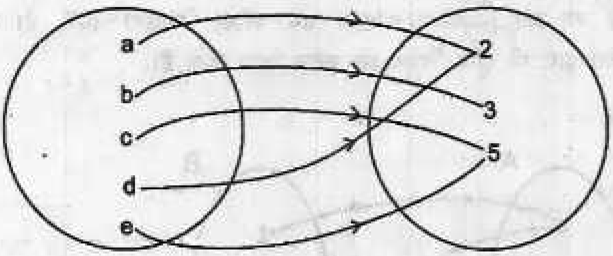
$R=\{(p,q):q=3p$ जहाँ P एक पूर्णांक है; $1\le p<7$ तथा $p\ne 4\}$

संबंध R का प्रांत $=\{1,2,3,5,6\}$

संबंध R का परिसर $=\{3,6,9,15,18\}$

उदाहरण 2: संबन्ध $R=\{(a,2),(b,3),(c,5),(d,2),(e,5)\}$ को तीर-आरेख द्वारा दृष्टि -चित्रण कीजिए।

हल: दिये गये संबन्ध को तीर-आरेख द्वारा निम्न प्रकार दिखाया जा सकता है-



उदाहरण 3: $R=\{(x,y):x,y$ का एक गुणनखंण्ड है}

जहाँ $x\in\{2,3,5,7\}$

$y\in\{10,14,21,15,18\}$ को तीर-आरेख द्वारा चित्रित कीजिए।

हल: हम देखते हैं कि-

2, 10, 14 एवं 18 का एक गुणनखण्ड है, अत: $(2,10),(2,14),(2,18)\in R$.

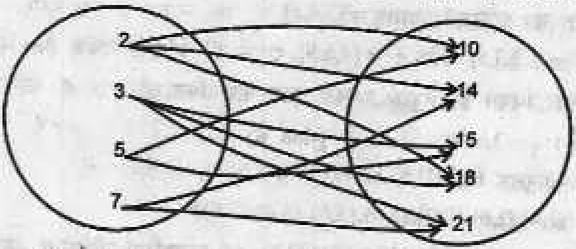
3, 12, 15 एवं 18 का एक गुणनखण्ड है, अत: $(3,15),(3,18),(3,21)\in R$.

5, 10, और 15 का एक गुणनखण्ड है, इसलिए $(5,10),(5,15)\in R$

7, 14 और 21 का एक गुणनखण्ड है, इसलिए $(7,14),(7,21)\in R$

इस प्रकार $R=\{(2,10),(2,14),(2,18),(3,15),(3,18),$
$(3,21),(5,10),(5,15),(7,14),(7,21)\}$

इस संबंध को 'तीर-आरेख' द्वारा निम्न चित्र द्वारा दर्शाया जा सकता है-



उदाहरण 4: संबंध $R=\{(x,y):y=x+1:x$ एक पूर्णांक है तथा $-2<x<3\}$ को सारणी रूप में व्यक्त कीजिए। संबंध का प्रांत एवं परिसर भी ज्ञात करें।

हल: x एक पूर्णांक है तथा $-2<x<3$ को संतुष्ट करने वाले पूर्णांक $-1,0,1,2$ है।

इस प्रकार $x\in\{-1,0,1,2\}$

$\Rightarrow y=\{0,1,2,3\}$

$\Rightarrow R=\{(x,y):y=x+1, x$ एक पूर्णांक है तथा $-2<x<3$

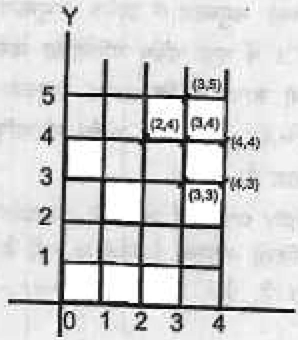
$=\{(-1,0),(0,1),(1,2),(2,3)\}$

संबंध R का प्रांत (*domain*) $=\{-1,0,1,2\}$

संबंध R का परिसर (*Range*) $=\{0,1,2,3\}$

उदाहरण 5: $R=\{(2,4),(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(4,4)\}$ के सदस्यों के भुज-कोटि को दिखाते हुए चित्रित करें। संबंध R के प्रांत (क्षेत्र) एवं परास (विस्तार) ज्ञात कीजिए।

हल: दिये गये संबंधों के सदस्यों की भुज-कोटि को निम्न चित्रानुसार दिखाया जा सकता है-



संबंध R का प्रांत (क्षेत्र) $= \{2,3,4\}$

संबंध R का परिसर (विस्तार) $= \{3,4,5\}$

उदाहरण 6: $P=\{1,2,3,5\}$ और $Q=\{4,6,9\}$, P से Q में एक संबंध $R=\{(x,y): x$ और y का अन्तर विषम है, $x \in p, y \in Q\}$ द्वारा परिभाषित कीजिए। R को रोस्टर रूप में लिखिए।

हल: प्रश्न के अनुसार $(1,4),(1,6),(2,9),(3,4),(3,6),(5,4),(5,6) \in R$

$\therefore R=\{(1,4),(1,6),(2,9),(3,4),(3,6),(5,4),(5,6)\}$

उदाहरण 7. $R=\{(x,x+5): x \in \{0,1,2,3,4,5\}\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R के प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए।

हल: $R=\{(x,x+5): x \in \{0,1,2,3,4,5\}\}$

$=\{(0,5),(1,6),(2,7),(3,8),(4,9),(5,10)\}$

दिये गये संबंध R का प्रांत $=\{0,1,2,3,4,5\}$

R का परिसर $=\{5,6,7,8,9,10\}$

उदाहरण 8: संबंध $R=\{(x,x^3): x$ संख्या 10 से कम एक अभाज्य संख्या $\}$ को रोस्टर रूप में लिखिए।

हल:- 10 से कम अभाज्य संख्या 2,3,5,7 है।

अत: $R=\{(x,x^3): x$ संख्या 10 से कम एक अभाज्य संख्या है$\}$

$=\{(2,8),(3,27),(5,125),(7,343)\}$

संबंधों के प्रकार (Types of Relations)

हम जानते हैं कि किसी अरिक्त समुच्चय A में संबंध $A \times A$ का एक उपसमुच्चय होता है तथा रिक्त समुच्चय φ प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय होता है। अत: $\varphi \subset A \times A$ और 'φ' A में एक संबंध परिभाषित करता है। इसे हम A में रिक्त संबन्ध कहते हैं। हम यह भी जानते हैं कि प्रत्येक समुच्चय अपने आप का उपसमुच्चय होता है। अर्थात् $A \times A \subset A \times A$, A में एक संबंध परिभाषित करता है जिसे सार्वत्रिक (Universal) संबंध कहा जाता है।

परिभाषा: रिक्त संबंध (Empty or Void or Null Relation): यदि अरिक्त समुच्च A का कोई भी अवयव A के किसी अवयव से संबंधित नहीं है अर्थात् $R=\varphi \subset A \times A$, तो R एक रिक्त संबंध कहलाता है, जैसे- $R=\{(x,y): y=x-5, x,y$ एक धन पूर्णांक है तथा $x<5\}$

एक रिक्त संबंध को समुच्चय {1,2,3,4} में परिभाषित करता है क्योंकि 5 से छोटा धन पूर्णांक 1,2,3,4 है जिसमें 5 घटाने पर क्रमशः −4,−3,−2,−1 आता है जो ऋण पूर्णांक है। इस प्रकार समुच्चय {1,2,3,4} के कोई भी अवयव दिये गये शर्तानुसारसंबंधित नहीं है।

परिभाषा: सार्वत्रिक संबंध (Universal Relation)

यदि अरिक्त समुच्चय A का प्रत्येक अवयव A के सभी अवयव से संबंधित हो अर्थात् $R = A \times A$ तो R एक सार्वत्रिक संबंध कहलाता है। जैसे-

$R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$, समुच्चय $A = \{1,2\}$ में सार्वत्रिक संबंध है।

टिप्पणी (i) रिक्त संबंध तथा सार्वत्रिक संबंध को तुच्छ (rivial) संबंध भी कहा जाता है।

(ii) यदि $(a,b) \in R$, तो हम कहते हैं कि 'अवयव a, अवयव b से संबंधित है' और इस कथन को हम संकेत aRb द्वारा प्रकट करते हैं अर्थात् $aRb \Leftrightarrow (a,b) \in R$.

(iii) $(a,b) \notin R$, तो हम कहते हैं कि 'अवयव a अवयव b से संबंधित नहीं है'' और हम इस कथन को $a\not R b$ द्वारा प्रकट करते हैं।

परिभाषा: स्वतुल्य संबंध (Reflexive Relation):

अरिक्त समुच्चय A में संबन्ध R $(R \subset A \times A)$ स्वतुल्य संबंध कहलाता है, यदि प्रत्येक अवयव स्वयं से संबंधित हो अर्थात् प्रत्येक $a \in A$ के लिए $(a,a) \in R$.

समुच्चय $A = \{1,2,3\}$ में स्वतुल्य संबंध

$R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ है।

$R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3)\}$ भी समुच्चय A में स्वतुल्य संबंध है परन्तु $R_3 = \{(2,2),(3,3)\}$ स्वतुल्य संबंध नहीं है क्योंकि $(1,1) \notin R_3$.

$R_3 = \{(2,2),(3,3)\}$ समुच्चय $\{2,3\}$ में स्वतुल्य संबंध है।

सममित संबंध (Symmetric Relation)

अरिक्त समुच्चय A में संबंध R $(R \subset A \times A)$ एक सममित संबंध कहलाता है यदि A का समस्त $a_1, a_2 \in A$ के लिए $(a_1,a_2) \in R$ से $(a_2,a_1) \in R$ प्राप्त हो, अर्थात् संबन्ध R समुच्चय A में सममित संबंध होगा यदि $(a_1,a_2) \in R \Rightarrow (a_2,a_1) \in R$ जहाँ $a_1 \in A, a_2 \in A$.

समुच्चय $A=\{1,2,3\}$ में $R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ तथा $R_3=\{(2,2),(3,3)\}$, $R_4=\{(1,3),(3,1)\}$, $R_5=\{(1,1),(2,1),(1,2)\}$ सममित संबंध है,

परन्तु $R_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3)\}$ सममित संबंध नहीं है क्योंकि $(1,3)\in R_2$ परन्तु $(3,1)\notin R_2$

$R_6=\{(1,1),(2,2),(3,2),(2,3),(1,2)\}$ समुच्चय $A=\{1,2,3\}$ में सममित संबंध नहीं है।

संक्रामक संबन्ध (Transitive Relation)

अरिक्त समुच्चय A में संबंध R $(R\subset A\times A)$ एक संक्रामक संबंध कहलाता है, यदि समस्त $a_1,a_2,a_3\in A$ के लिए $(a_1,a_2)\in R$ तथा $(a_2,a_3)\in R$ से $(a_1,a_3)\in R$ प्राप्त हो अर्थात् संबन्ध R समुच्चय A में संक्रामक संबंध होगा यदि $(a_1,a_2)\in R$ तथा $(a_2,a_3)\in R\Rightarrow(a_1,a_3)\in R$ जहाँ $a_1,a_2,a_3\in A$.

संबंध $R=\{(1,2),(2,1),(1,1)\}$ समुच्चय $A=\{1,2,3\}$ में संक्रामक संबंध नहीं है। हम यहाँ देखते हैं कि $(1,2)\in R$ तथा $(2,1)\in R\Rightarrow(1,1)\in R$ तथा $(2,1)\in R$, $(1,2)\in R\Rightarrow(2,2)\in R$

समुच्चय $A=\{1,2,3\}$ मे संबंध $R=\{(1,1),(1,2)\}$ एक संक्रामक संबन्ध है परन्तु यह न तो स्वतुल्य और न ही सममित संबन्ध है।

तुल्यता संबन्ध (Equivalence Relation):

अरिक्त समुच्चय A में संबंध R $(R\subset A\times A)$ एक तुल्यता संबंध कहलाता है यदि R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक है अर्थात् संबंध R अरिक्त समुच्चय A में तुल्यता संबंध होगा यदि स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक तीनों संबंध हो, जैसे- संबंध $R=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ समुच्चय $A=\{1,2,3\}$ में एक तुल्यता संबंध को परिभाषित करता है क्योंकि यह स्वतुल्य $|R|, 2R2, 3R3$, सममित $|R|\Rightarrow|R|, 2R2\Rightarrow 2R2, 3R3\Rightarrow 3R3$ तथा संक्रामक संबंध है।

समुच्चय $A=\{1,2,3\}$ में संबंध $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3)\}$ तुल्यता संबंध नहीं है क्योंकि यह सममित संबंध नहीं है। संबन्ध $R_2=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$ तुल्यता संबंध को समुच्चय $A=\{1,2,3\}$ में परिभाषित नहीं करता है क्योंकि यह स्वतुल्य संबंध नहीं है।

उदाहरण 9: किसी विशेष समय में जिला स्कूल, भागलपुर के विद्यार्थियों के समुच्चय मे संबंध R

$R=\{(x,y):x$ तथा y एक ही कक्षा में पढ़ते हैं$\}$ के स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक की जाँच करें।

हल: $R=\{(x,y):x$ तथा y एक ही कक्षा में पढ़ते हैं जहाँ x और y जिला स्कूल के छात्र हैं।$\}$

हम किसी भी छात्र को लें तो वह एक ही कक्षा में पढ़ेगा अर्थात् $(x,x)\in R$, सभी छात्र x के लिए सत्य होगा।

अतः R एक स्वतुल्य संबन्ध है।

पुनः यदि $(x,y)\in R$, तो x और y एक ही कक्षा में पढ़ते हैं।

$\Rightarrow y$ और x भी एक ही कक्षा में पढ़ते हैं।

$\Rightarrow (y,x)\in R$

$\Rightarrow$ R एक सममित संबंध है।

मान लिया कि

$(x,y)\in R$ तथा $(y,z)\in R$

$\Rightarrow$ छात्र x तथा y एक ही कक्षा में पढ़ते हैं और

छात्र y ,z भी एक ही कक्षा में पढ़ते हैं।

$\Rightarrow$ छात्र x और z एक ही कक्षा में पढ़ते हैं।

$\Rightarrow$ R एक संक्रामक संबंध है।

उदाहरण 10: पटना शहर के निवासियों के समुच्चय में संबन्ध R

$R=\{(x,y):x,y$ के पिता हैं$\}$ की विवेचना कीजिए।

हल: मान लिया कि P पटना शहर के निवासियों का समुच्चय है तथा

$R=\{(x,y):x,y$ के पिता हैं$\}$

$x\in$P और x स्वयं का पिता नहीं हो सकता अर्थात् $(x,x)\notin R$.

इसलिए R एक स्वतुल्य संबंध नहीं है।

माना कि $(x,y)\in R$

$\Rightarrow x,y$ के पिता हैं।

$\Rightarrow y,x$ का पुत्र या पुत्री होगा न कि y,x का पिता।

$\Rightarrow (y,x)\notin R$

$\Rightarrow R$, समुच्चय P में सममित नहीं है।

पुनः मान लिया कि

$(x,y)\in R, (y,z)\in R$ जहाँ $x,y,z\in P$

$\Rightarrow x, y$ के पिता है तथा y, z के पिता है।

$\Rightarrow x, z$ के बाबा है।

$\Rightarrow (x,z)\notin R$

$\Rightarrow R$ एक संक्रामक संबंध है।

इस प्रकार दिया गया संबंध R समुच्चय P में स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक संबंध में से कोई भी संबंध नहीं है।

उदाहरण 11: ऐसे संबंध का उदाहरण दीजिए, जो–

(i) सममित हो, परन्तु न तो स्वतुल्य हो और न संक्रामक हो।

(ii) संक्रामक हो, परन्तु न तो स्वतुल्य हो और न सममित हो।

(iii) स्वतुल्य तथा सममित हो, किन्तु संक्रामक न हो।

(iv) स्वतुल्य तथा संक्रामक हो, किन्तु सममित न हो।

(v) सममित तथा संक्रामक हो, किन्तु स्वतुल्य न हो।

हल: मान लिया कि दिया हुआ समुच्चय

$A=\{a,b,c\}$

$A\times A=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(b,a),(c,a),(b,c),(c,b)\}$

(i) माना कि $R_1=(a,b),(b,a)\}\subset A\times A$

स्पष्टतः R_1 समुच्चय A में संबंध परिभाषित करता है जो सममित है क्योंकि $(a,b)\in R_1\Rightarrow(b,a)\in R_1$

$(b,a)\in R_1\Rightarrow(a,b)\in R_1$

हम देखते हैं कि $a\in A$ परन्तु $(a,a)\notin R_1$

$\Rightarrow$ समुच्चय A का अवयव स्वयं से संबंधित नहीं है।

$\Rightarrow R_1$ स्वतुल्य नहीं है।

पुनः $(a,b)\in R_1$ तथा $(b,a)\in R_1\Rightarrow(a,a)\notin R_1$

अर्थात् अवयव a अवयव b से संबंधित है और अवयव b अवयव a से संबंधित है परन्तु अवयव a अवयव a से संबंधित नहीं है। अतः R_1 संक्रामक संबंध नहीं है।

(ii) माना कि $R_2 = \{(a,a),(a,b)\} \subset A \times A$

$\Rightarrow$ संबंध R_2 संक्रामक है क्योंकि

aR_2a और $aR_2b \Rightarrow aR_2b$

समुच्चय A के सभी सदस्य स्वयं से संबंधित नहीं हैं,

अतः संबंध R_2 स्वतुल्य नहीं है।

पुनः $(a,b) \in R_2$ अर्थात् aR_2b परन्तु हम देखते हैं कि

$\Rightarrow R_2$ $(b,a) \notin R_2$ अर्थात् bR_2a.

सममित संबंध समुच्चय A पर नहीं है। इस प्रकार R_2 समुच्चय A में संक्रामक है परन्तु यह न तो स्वतुल्य है और न ही सममितसंबंध है।

(iii) मान लिया कि Z पूर्णांकों का समुच्चय है।

$R \subset Z \times Z$, Z में एक संबंध परिभाषित करता है जिसके अनुसार पूर्णांक a, पूर्णांक b से संबंधित होगा यदि a और b का अन्तर 1 से छोटा या बराबर हो अर्थात $R = \{(a,b): a-b \le 1$ या $b-a \le 1\}$

हम जानते हैं कि दो संख्याओं के बीच का अन्तर बड़ी संख्या में से छोटी संख्या को घटाने से प्राप्त होता है अर्थात् a और b का अन्तर $a-b$ होगा जब $a \ge b$ तथा $b-a$ होगा जब $b \ge a$ है।

यहाँ हम देखते हैं कि

पूर्णांक a और a का अन्तर शून्य है जो पूर्णांक 1 से छोटा है तथा यह सभी पूर्णांक a के लिए सत्य है।

अतः $(a,b) \in R$, सभी $a \in Z$ के लिए

$\Rightarrow R$, समुच्चय Z में स्वतुल्य है।

माना कि $(a,a) \in R$

$\Rightarrow$ पूर्णांक a और b का अन्तर 1 से छोटा है।

$\Rightarrow$ पूर्णांक b और a का अन्तर 1 से छोटा होगा।

$\Rightarrow$ $(b,a) \in R$, ऐसा सभी $(a,b) \in R$ के लिए सत्य होगा।

$\Rightarrow$ R, सममित संबंध है।

इस प्रकार उपर्युक्त संबंध R स्वतुल्य तथा सममित संबंध है।

हम देखते हैं कि $(2,3) \in R$ और $(3,4) \in R$ क्योंकि 2 और 3 का अन्तर

1 के बराबर है तथा 3 और 4 का अन्तर भी 1 के बराबर है, परन्तु 2 और 4 का अन्तर 2 है, जो 1 से बड़ी संख्या है। इस प्रकार 2A से संबंधित नहीं है।

स्पष्टतः $(2,3) \in R$ और $(3,4) \in R$ परन्तु $(2,4) \notin R$

$\Rightarrow R_3$ समुच्चय Z में संक्रामक संबंध नहीं है।

(iv) समुच्चय $A = \{a,b,c\}$ में संबंध R_4 को इस प्रकार परिभाषित करते हैं

$$R_4 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c)\} \subset A \times A$$

स्पष्टतः R_4 समुच्चय A में स्वतुल्य तथा संक्रामक है

किन्तु सममित नहीं क्योंकि $(a,c) \in R_4 \Rightarrow (c,a) \notin R_4$

(v) समुच्चय $A = \{a,b,c\}$ में संबंध R_5 निम्न प्रकार परिभाषित करते हैं-

$$R_5 = \{(a,c),(c,a),(a,a),(c,c)\} \subset A \times A$$

हम देखते हैं कि $(b,b) \notin R_5$ जहाँ $b \in A$

अर्थात् समुच्चय A के सभी सदस्य स्वयं से संबंधित नहीं हैं। इसलिए R_5 एक स्वतुल्य संबंध नहीं है।

स्पष्टतः R_5 समुच्चय A में सममित तथा संक्रामक है।

उदाहरण 12: सिद्ध कीजिए कि $A = \{x \in Z : 0 \le x \le 12\}$ में संबंध $R = \{(a,b) : a = b\}$ तुल्यता संबंध है।

हल: यहाँ $A = \{x \in Z : 0 \le x \le 12\}$

$$\Rightarrow \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

तथा $R = \{(a,b) : a = b, a,b \in A\}$

$$\Rightarrow R = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),$$
$$(8,8),(9,9),(10,10),(11,11),(12,12)\}$$

स्पष्टतः R समुच्चय A में स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक संबंध है। अतः R एक तुल्यता संबंध समुच्चय A में परिभाषित करता है।

उदाहरण13: मान लिया कि T एक समतल में सभी त्रिभुजों का समुच्चय है तथा $R = \{(T_1,T_2):$ त्रिभुज T_1, त्रिभुज T_2 के समरूप है$\} \subset T \times T$ द्वारा एक संबंध परिभाषित है। सिद्ध करें कि R समुच्चय T में तुल्यता संबंध है।

हल: यहाँ T एक समतल में सभी त्रिभुजों का समुच्चय है तथा $R = \{(T_1,T_2):$ त्रिभुज T_1, त्रिभुज T_2 के समरूप है$\} \subset T \times T$

हम देखते हैं कि

$T_1 \quad T_2$ सभी $T_1 \in T$

$\Rightarrow R$ एक स्वतुल्य संबंध है।

सममित संबंध

माना कि $(T_1, T_2) \in R$

$\Rightarrow T_1 \quad T_2$ अर्थात् T_1, T_2 के समरूप है।

$\Rightarrow T_2 \quad T_1 \quad T_2, T_1$ के समरूप होगा।

$\Rightarrow (T_2, T_1) \in R$

$\Rightarrow R$ एक सममित संबंध है।

संक्रामक संबंध

माना कि $(T_1, T_2) \in R$ तथा $(T_2, T_3) \in R$

$\Rightarrow T_1 \quad T_2$ तथा $T_2 \quad T_3$

$\Rightarrow T_1 \quad T_3 \Rightarrow (T_1, T_3) \in R$

R एक संक्रामक संबन्ध है।

इस प्रकार R, समुच्चय T स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक संबंध है।

अतः R समुच्चय T में तुल्यता संबंध है।

उदाहरण 14: मान लीजिए कि समुच्चय $\{1,2,3,4\}$ में $R = \{(1,1),(2,2),(1,2),(1,3),(3,3),(3,2),(4,4)\}$, संबंध R के बारे में बताइए।

हल: यहाँ समुच्चय $A = \{1,2,3,4\}$

तथा $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(1,3)),(3,2)\} \subset A \times A$

स्वतुल्य संबंध: हम देखते हैं कि

$(1,1),(2,2),(3,3),(4,4) \in R$

अर्थात् A के सभी अवयव स्वयं से संबंधित हैं, अतः समुच्चय A में R एक स्वतुल्य संबंध है।

सममित संबंध: हम देखते हैं कि

$(1,2) \in R$ परन्तु $(2,1) \notin R$

$\Rightarrow R$ एक सममित संबंध नहीं है।

संक्रामक संबंध: हम देखते है कि

$(1,1)\in R,(1,2)\in R,(1,3)\in R \Rightarrow (1,2)\in R,(1,3)\in R$

$(1,2)\in R,(2,2)\in R \Rightarrow (1,2)\in R$

$(1,3)\in R,(3,2)\in R \Rightarrow (1,2)\in R$

स्पष्टत: R एक संक्रामक संबंध है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि समुच्चय A में संबन्ध R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किन्तु सममित नहीं है।

उदाहरण 15: मान लीजिए कि समुच्चय N में $R=\{(a,b):a=b-2,b>6\}$ द्वारा प्रदत्त संबन्ध है। निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए:

(i) $(2,4)\in R$ (ii) $(3,8)\in R$ (iii) $(6,8)\in R$ (iv) $(8,7)\in R$

हल: यहाँ $R=\{(a,b):a=b-2,b>6,a,b\in N\}$

प्रदत्त संबंध के सापेक्ष हम देखते हैं कि

$b>6$ होना चाहिए तथा $a=b-2$

दी गयी शर्त के अनुसार सिर्फ (iv) सही है।

—

https://www.studiestoday.com

प्रश्नावली-2

1. समुच्चयों $X = \{15, 10, 20, 12\}$; $Y = \{3, 2, 5, 4\}$ के अवयवों में 'एक अपवर्त्य है' संबंध को तीर आरेख द्वारा प्रदर्शित करें।
2. समुच्चय $\{x : -2 < x < 3, x \in Z\}$ से संबद्ध क्रमित युग्मों $\{(x, y) : y = x + 1; x$ एक पूर्णांक है तथा $-2 < x < 3$ को तीर-चिह्न द्वारा दिखाएँ।
3. $R = \{(x, x+5) : x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R के प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए।
4. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ और $B = \{3, 5, 6, 8\}$, A से B में एक संबंध $R = \{(x, y) : x$ और y का अन्तर सम है, $x \in A, y \in B\}$ द्वारा परिभाषित कीजिए। R को रोस्टर रूप में लिखिए।
5. मान लीजिए कि $A = \{a, b, c\}$ और $B = \{2013, 2014\}$, A से B के संबंधों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।
6. मान लीजिए कि $X = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ तथा A पर संबन्ध $R = \{(x, y) : x, y \in X$, संख्या x संख्या y को यथावत् विभाजित करती है\}, द्वारा परिभाषित एक संबंध को
   (i) रोस्टर रूप में लिखिए।
   (ii) R का प्रांत ज्ञात कीजिए।
   (iii) R का परिसर ज्ञात कीजिए।
7. मान लीजिए कि R, Z पर, $R = \{(a, b) : a, b \in Z, a - b$ एक पूर्णांक है\}, द्वारा परिभाषित एक संबंध है। R के प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए।
8. ऐसे संबंध का उदाहरण दीजिए, जो
   (i) सममित हो, परन्तु न तो स्वतुल्य हो और न संक्रामक हो।
   (ii) संक्रामक हो, परन्तु न तो स्वतुल्य हो और न सममित हो।
   (iii) स्वतुल्य तथा सममित हो, किन्तु संक्रामक न हो।
   (iv) स्वतुल्य तथा संक्रामक हो, किन्तु सममित न हो।
   (v) सममित तथा संक्रामक हो, किन्तु स्वतुल्य न हो।
9. सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $A = \{x \in Z : 0 \le x \le 12\}$ में संबंध $R = \{(a, b) : a$ और b का अन्तर 4 का गुणज है\}, एक तुल्यता संबंध है।

10. सिद्ध कीजिए कि किसी समतल में स्थित बिन्दुओं के समुच्चय में $R=\{(P,Q):$ बिन्दु P की मूल बिन्दु से दूरी, बिन्दु Q की मूल बिन्दु से दूरी के समान है$\}$, द्वारा प्रदत्त R एक तुल्यता संबंध है।

11. जाँच कीजिए कि क्या R में $R=\{(a,b):a\le b^3\}$, द्वारा परिभाषित संबंध स्वतुल्य, सममित अथवा संक्रामक है?

12. सिद्ध कीजिए कि R में $R=\{(a,b):a\le b\}$, द्वारा परिभाषित संबंध IR में स्वतुल्य तथा संक्रामक हैं किन्तु सममित नहीं है।

13. सिद्ध कीजिए कि समस्त बहुभुजों के समुच्चय A में, $R=\{(P_1,P_2):P_1$ तथा P_2 की भुजाओं की संख्या समान है$\}$, प्रकार से परिभाषित संबंध R एक तुल्यता संबंध है।

14. सिद्ध कीजिए कि एक तल में समस्त रेखाओं के समुच्चय L में, $R=\{(\ell_1,\ell_2):\ell_1$ तथा ℓ_2 रेखाएँ परस्पर समान्तर है$\}$,से परिभाषित संबंध R एक तुल्यता संबंध है।

15. एक तल में समस्त सरल रेखाओं के समुच्चय L में संबंध $R=\{(\ell_1,\ell_2):$ सरल रेखा ℓ_1 सरल रेखा ℓ_2 पर लम्ब है$\}$, द्वारा परिभाषित R सममित है परन्तु स्वतुल्य और संक्रामक संबंध नहीं है, सिद्ध करें।

16. सिद्ध कीजिए कि समस्त त्रिभुजों के समुच्चय T में, $R=\{(\Delta_1,\Delta_2):\Delta_1,\Delta_2$ के समरूप है; $\Delta_1,\Delta_2\in T\}$, द्वारा परिभाषित संबंध R एक तुल्यता संबंध है। भुजाओं 5,12,13; 3,4,5; 10,24,26; 9,12,15; वाले समकोण त्रिभुजों पर विचार कीजिए।

17. निर्धारित कीजिए कि क्या निम्नलिखित संबंधों में से प्रत्येक स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक है-

(i) समुच्चय $A=\{1,2,3,4,5,6,\ldots,13,14,15,16,17,18\}$ में संबन्ध
$R=\{(x,y):4x-y=0,x,y\in A\}$

(ii) समुच्चय $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ में $R=\{(x,y):y$ भाज्य है x से$\}$, द्वारा परिभाषित संबंध R है।

(iii) समस्त पूर्णांकों के समुच्चय Z में $R=\{(x,y):x-y$ एक पूर्णांक है$\}$, द्वारा परिभाषित संबंध।

(iv) समस्त पूर्णांकों के समुच्चय Z में $R=\{(x,y):x-y=4,x,y\in Z\}$, द्वारा

परिभाषित संबंध।

(v) पूर्णियाँ शहर के निवासियों में $R=\{(x,y):x,y$ के पिता है$\}$, द्वारा परिभाषित संबंध है।

(vi) बक्सर शहर के निवासियों में $R=\{(x,y):x,y$ का भाई है$\}$, द्वारा परिभाषित संबंध।

(vii) बेतिया शहर के निवासियों में $R=\{(x,y):x,y$ की बहन है$\}$, द्वारा परिभाषित संबंध।

18. समुच्चय $A=\{2013,2014,2015,2016\}$ में $R=\{(x,y):x\leq y, x,y\in A\}$, द्वारा परिभाषित संबंध की तुल्यता की जाँच कीजिए।

19. $R=\{(A,B):A\subset B,\ A,B\in P\}$, जहाँ P समुच्चयों का समुच्चय है, द्वारा परिभाषित संबंध R के तुल्यता संबंध की जाँच करें।

20. $R=\{(a,a),(b,b),(c,a),(a,c)\}$, समुच्चय $A=\{a,b,c,\}$ संबंध की जाँच करें।

—

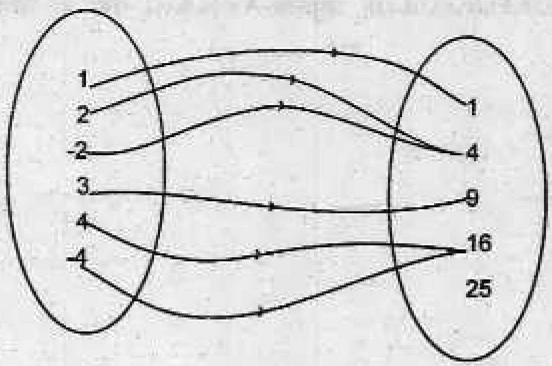
2.1.4 फलन (FUNCTION):

अभी तक हमने समुच्चयों के बीच 'संबंध' के बारे में सीखा है। अब हम एक विशेष प्रकार के संबंध का अध्ययन करेंगे, जिसे 'फलन' कहते हैं। हम फलन को एक नियम के रूप में देख सकते हैं,जिससे कुछ दिये हुए अवयवों से नये अवयव उत्पन्न होते हैं।

परिभाषा

मान लिया कि A और B दो अरिक्त समुच्चय हैं। समुच्चय A से समुच्चय B में फलन f जिसे संकेत में $f: A \to B$ या $A \xrightarrow{f} B$ द्वारा निरूपित किया जाता है, एक नियम है जिसके अन्तर्गत समुच्चय A के प्रत्येक अवयव का समुच्चय B में एक ओर केवल एक अवयव संबंधित (संगत) होता है।

मान लिया कि $A = \{1, 2, -2, 3, 4, -4\}$



$B = \{1, 4, 9, 16, 25\}$

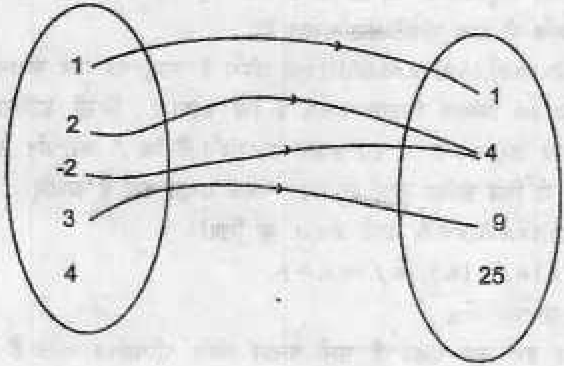
$f = \{(1,1), (2,4), (-2,4), (3,9), (-4,16), (4,16)\} \subset A \times B$

यहाँ हम देखते हैं कि A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B के अद्वितीय अवयव से नियम $f(x) = x^2$ के द्वारा संगति करता है। चूँकि $f \subset A \times B$,

अतः f समुच्चय A से समुच्चय B में एक संबंध भी परिभाषित करता है।

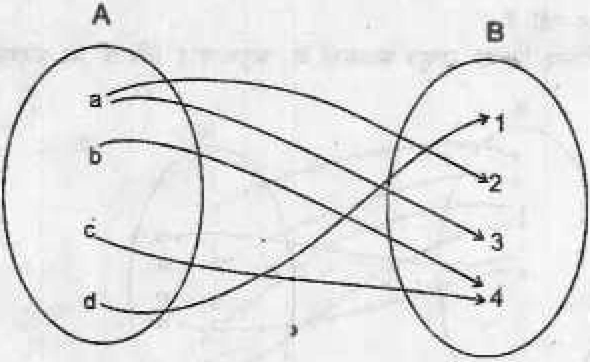
एक दूसरा उदाहरण अग्रांकित तीर-आरेख द्वारा लेते है।

यहाँ समुच्चय A का अवयव 4 समुच्चय B के किसी अवयव के साथ संगति



नहीं करता है। इस प्रकार $\{(1,1),(-2,4),(2,4),(3,9)\} \subset A \times B$ एक संबंध तो परिभाषित करता है परंतु यह एक फलन नहीं है।

एक और उदाहरण सोंचते हैं–



हम देखते हैं कि $\{(a,2),(a,3),(b,4),(c,4),(d,1)\} \subset A \times B$ समुच्चय A से

समुच्चय B में एक संबंध तो स्थापित करता है परन्तु समुच्चय A का एक अवयव a समुच्चय B के दो अवयवों 2 और 3 के साथ संगति करता है। फलन की परिभाषा में हम देख चुके हैं कि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B में अद्वितीय (एक और केवल एक) अवयव के साथ संगति कर सकता है।

अतः $\{(a,2),(a,3),(b,4),(c,4),(d,1)\}$ एक संबंध है परन्तु यह एक फलन नहीं है।

इस प्रकार हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि फलन f, किसी अरिक्त समुच्चय A से एक अरिक्त समुच्चय B में इस प्रकार का संबंध है कि f का प्रांत A है तथा f के किसी भी दो भिन्न क्रमित युग्मों के प्रथम घटक समान नहीं है अर्थात्

$f=\{(x,y): x\in A, y\in B,$ सभी $x\in A$ के लिए$\}$

तथा $(x,y_1)\in f,\ (x,y_2)\in f \Rightarrow y_1=y_2$

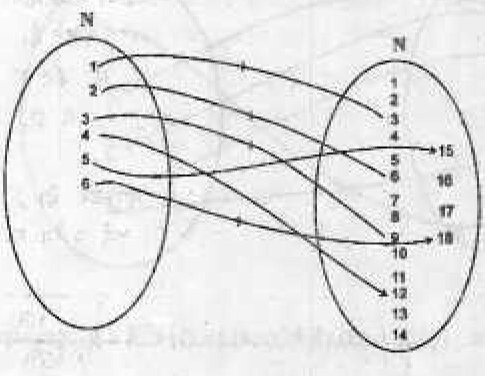
और f का प्रांत $=A$

इस प्रकार हम कह सकते हैं सभी फलन संबंध परिभाषित करते हैं परन्तु सभी संबंध फलन को परिभाषित नहीं करते हैं।

यदि f, A से B का एक फलन है तथा $(x,y)\in f$, तो $y=f(x)$, जहाँ y को f के अन्तर्गत x का 'प्रतिबिम्ब(image)' तथा x को y का 'पूर्व प्रतिबिम्ब (pre-image)' कहते हैं।

नीचे दिये उदाहरणों में बहुत से संबंधों पर विचार करेंगे, जिनमें से कुछ फलन हैं और दूसरे फलन नहीं हैं-

मान लीजिए कि $\mathbf{N}$ प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है और $\mathbf{N}$ पर परिभाषित एक



संबंध R इस प्रकार है कि

$$R=\{(x,y): y=3x, x,y \in \mathbf{N}\}$$

यहाँ दिये गये संबंध को तीर-आरेख द्वारा निरूपित करने पर हम देखते हैं कि R का प्रांत, प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय $\mathbf{N}$ है, इसका परिसर भी $\mathbf{N}$ है तथा प्रत्येक प्राकृत संख्या n का एक और केवल एक प्रतिबिम्ब $3n$ है। इसलिए यह संबंध एक फलन है।

दूसरा उदाहरण $R=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,7)\}$ में ध्यानपूर्वक देखने पर हम देखते हैं कि प्रत्येक अवयव का एक और केवल एक प्रतिबिम्ब है, इसलिए यह संबंध समुच्चय $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ से समुच्चय $B=\{2,3,4,5,6,7\}$ में फलन है। परन्तु यह संबंध समुच्चय $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ से समुच्चय A में फलन नहीं है क्योंकि एक सदस्य 7 किसी भी अवयव से संगति नहीं करता है।

यदि f समुच्चय A से समुच्चय B में फलन है अर्थात्,

$f: A \to B$, तो

समुच्चय A फलन f का प्रांत (domain), समुच्चय B फलन f का सह-प्रांत (co-domain) कहलाता है। यदि $(x,y) \in f$, तो $y=f(x)$ को x का प्रतिबिम्ब (image) तथा x को y का पूर्व-प्रतिबिम्ब (pre-image) कहा जाता है। प्रांत A के सभी अवयवों के प्रतिबिम्ब से बने समुच्चय $\{f(x): x \in A\}$ को फलन f का परिसर (range) कहा जाता है।

यदि किसी फलन का परिसर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय या उसका कोई उपसमुच्चय हो तो फलन को वास्तविक मान फलन (real valued function) कहते हैं, अर्थात् $\{f(x): x \in A\} \subset B \subset R$, तो f को वास्तविक मान फलन कहते हैं।

यदि वास्तविक चर वाले किसी वास्तविक मान फलन f का प्रांत भी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय अथवा उसका कोई उपसमुच्चय अर्थात् $A \subset R$ हो, तो f को वास्तविक फलन भी कहते हैं।

उदाहरण 1: मान लीजिए कि $\mathbf{N}$ प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय है। $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(x)=3x+1$ द्वारा परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है। इसे प्रयोग कर हम निम्न सारणी का निर्माण कर सकते हैं-

x	1	2	3	4	....	100	
$y=f(x)$	$f(1)=4$	$f(2)=7$	$f(3)=10$	$f(4)=13$		$f(100)=301$	-

उदाहरण 2: एक फलन $f(x)=2x-5$ द्वारा परिभाषित है। निम्नलिखित के मान लिखिए:

(i) $f(0)$ (ii) $f(7)$ (iii) $f(-3)$ (iv) $f(5)$ (v) $f(3014)$

हल: यहाँ $f(x)=2x-5$

$$\Rightarrow f(0)=2\times0-5=-5$$
$$f(7)=2\times7-5=14-5=9$$
$$f(-3)=2\times(-3)-5=-6-5=-11$$
$$f(5)=2\times5-5=10-5=5$$
$$f(2014)=2\times2014-5=4028-5=4023$$

उदाहरण 3: यदि $f:A\to B$, जहाँ $A=\{1,2,3,4\}$, $B=$ पूर्णांकों का समुच्चय तथा $f(x)=x^2+1$ तो f का प्रांत एवं परिसर निकालें। $10\in B$ का पूर्व-प्रतिबिम्ब भी ज्ञात करें।

हल: यहाँ $f:A\to B$, जहाँ $A=\{1,2,3,4\}$ तथा $f(x)=x^2+1$

स्पष्टतः फलन f का प्रांत (*domain*) $A=\{1,2,3,4\}$ है।

फलन f का परिसर $=\{f(1),f(2),f(3),f(4)\}$

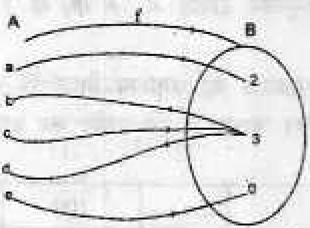
$$=\{1^2+1,2^2+1,3^2+1,4^2+1\}$$
$$=\{2,5,10,17\}$$

मान लीजिए कि 10 का पूर्व-प्रतिबिम्ब x है, तो

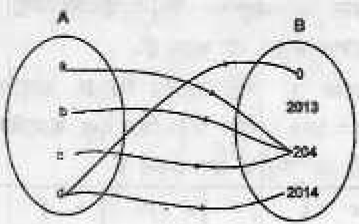
$$f(x)=10$$
$$\Rightarrow x^2+1=10$$
$$\Rightarrow x^2=9$$
$$\Rightarrow x=3,\ x\neq-3$$ क्योंकि -3 प्रांत का अवयव नहीं है।

अतः $10\in B$ समुच्चय A के अवयव 3 का प्रतिबिम्ब है और 3, $10\in B$ का पूर्व-प्रतिबिम्ब है।

उदाहरण 4: निम्नलिखित चित्रों में फलन f परिभाषित है या नहीं-



आकृति (i)



आकृति(ii)

हल: (i) फलन $f:A\to B$ परिभाषित है, क्योंकि समुच्चय A का प्रत्येक सदस्य समुच्चय B में सुनिश्चित रूप से अद्वितीय सदस्य के साथ प्रतिबिम्बित है।

(ii) $f:A\to B$ फलन परिभाषित नहीं है, क्योंकि समुच्चय A का एक सदस्य समुच्चय B के दो भिन्न सदस्यों के साथ संबन्धित है।

उदाहरण 5: यदि $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}, x\neq 2, x\in\mathbb{R}$ तो, $f(1)-1$ का मान ज्ञात करें।

हल: यहाँ $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}$

$$\Rightarrow f(1)=\frac{2\times1+3}{1-2}=\frac{5}{-1}=-5$$

$$\Rightarrow f(1)-1=-5-1=-6$$

उदाहरण 6: यदि $f(x)=x^2-4$ एवं $g(x)=x(x-2),\ x\in R$

तो (i) सिद्ध करें कि $f(2)=g(2)$

तथा (ii) $g(2)+f(\frac{1}{2})$ का मान निकालें।

हल: (i) यहाँ $f(x)=x^2-4$ एवं $g(x)=x(x-2)$

$$\Rightarrow f(2)=2^2-4=4-4=0$$

तथा $g(2)=2(2-2)=2\times0=0$

स्पष्टतः $f(2)=g(2)$

(ii) $f(\frac{1}{2})+g(2)=(\frac{1}{2})^2-4+2(2-2)$

$$=\frac{1}{4}-4+2\times0=\frac{1-16}{4}=\frac{-15}{4}$$

उदाहरण 7: (i) $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+1}{x+1}$, तो $f(1)+f(2)-f(3)$ का मान ज्ञात करें।

(ii) $f(x)=\dfrac{4x+5}{x-1}, x\neq1, x\in R$; तो $\dfrac{f(10)}{f(5)}$ का मान बताएँ।

हल: (i) यहाँ $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+1}{x+1}=\dfrac{(x+1)(2x+1)}{(x+1)}=2x+1, x\neq-1$

x की जगह पर 1,2,3 रखने पर

$$f(1)+f(2)-f(3)=2\times1+1+2\times2+1-2\times3+1$$
$$=3+5-7=1$$

(ii) $f(x)=\frac{4x+5}{x-1}$ x के स्थान पर 10 और 5 रखने पर

$$\frac{f(10)}{f(5)}=\frac{\frac{4\times10+5}{10-1}}{\frac{4\times5+5}{5-1}}=\frac{5}{\frac{25}{4}}=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$$

उदाहरण 8: (i) यदि $f(x)=\frac{1}{x}+3x$, तो $f(\frac{1}{x})$ निकालें, जब $x\neq0$

(ii) यदि $f(x+2)=x$, तो $f(x-2)$ एवं $f(\frac{1}{x})$ निकालें, जब कि $x\neq0$

(iii) यदि $f(x+2)=5$, तो दिखाएँ कि $f(-x)+f(2x)=10$

हल: (i) यहाँ $f(x)=\frac{1}{x}+3x$

$$\Rightarrow f(\frac{1}{x})=\frac{1}{\frac{1}{x}}+3\cdot\frac{1}{x}=x+\frac{3}{x}$$

(ii) $f(x+2)=x$

x के स्थान पर $x-2$ रखने पर

$$f(x-2+2)=x-2$$
$$\Rightarrow f(x)=x-2$$

पुन: x के स्थान पर $x-2$ रखने पर

$$f(x-2)=x-2-2=x-4$$

तथा x के स्थान पर $\frac{1}{x}$ रखने पर

$$f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}-2=\frac{1-2x}{x}, x\neq0$$

(iii) यहाँ $f(x+2)=5, x\in\mathbb{R}$

x के स्थान पर $x-2$ रखने पर

$f(x-2+2)=5$

$f(x)=5, x\in R$

$\Rightarrow f(-x)=5$ तथा $f(2x)=5$

$\Rightarrow f(-x)+f(2x)=5+5=10$.

उदाहरण 9: यदि $f(x)=x^2-1, x\in R$, तो क्या $f(a)-1=f(a-1)$? अपने उत्तर की पुष्टि में कारण दें।

हल: यहाँ $f(x)=x^2-1$

$\Rightarrow f(a)-1=a^2-1-1=a^2-2$

तथा $f(a-1)=(a-1)^2-1=a^2-2a+1-1=a^2-2a=a(a-2)$

स्पष्टत: $f(a)-1\neq f(a-1)$ क्योंकि $f(a)-1=a^2-2$

जबकि $f(a-1)=a^2-2a$.

उदाहरण 10: मान लीजिए कि $f(x)=x^2$ तथा $g(x)=2x+1$ दो वास्तविक फलन हैं। $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$ तथा $\frac{f(x)}{g(x)}$ ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $f(x)=x^2$

$g(x)=2x+1$.

$\therefore \quad f(x)+g(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$

$f(x)-g(x)=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$

$f(x)g(x)=x^2(2x+1)=2x^3+x^2$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2}{2x+1}, x\neq -\frac{1}{2}$$

2.1.5 फलनों के प्रकार (Types of Functions)

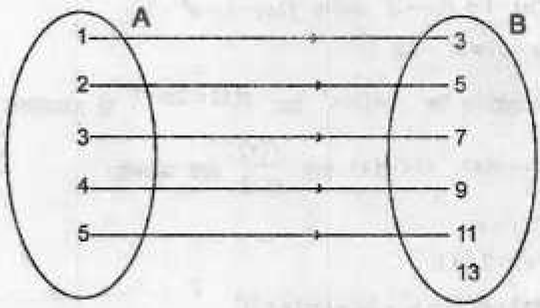
अब तक हम फलन को जान चुके हैं। यदि $f:A\to B$ में एक फलन है तो $y=f(x)$, $x\in A, y\in B$, x का प्रतिबिम्ब (image) तथा x, y का पूर्व-प्रतिबिम्ब (pre-image) कहलाता है। प्रतिबिम्ब को ध्यान में रखकर फलन के दो प्रकार तथा पूर्व-प्रतिबिम्ब के आधार पर फलन के दो प्रकार हैं।

परिभाषा

ऐकैकी फलन (One-onefunction)

एक फलन $f:A\to B$ एकैकी (one-one) अथवा एकैक (injective) फलन कहलाता है, यदि f के अंतर्गत A के भिन्न अवयवों के प्रतिबिम्ब भी भिन्न होते हैं अर्थात् प्रत्येक $x_1,x_2\in A$ के लिए $f(x_1)=f(x_2)$ का तात्पर्य है कि $x_1=x_2$

उदाहरणस्वरूप मानलिया कि $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{3,5,7,9,11,13\}$ तथा $f:A\to B$ $f(x)=2x+1, x\in A$ द्वारा परिभाषित फलन एकैकी फलन है जिसे तीर आरेख द्वारा भी समझा जा सकता है।



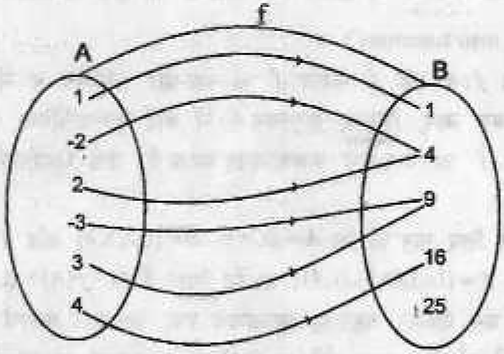
बहुएक फलन (Many-one Function):

एक फलन $f:A\to B$ बहुएक फलन कहलाता है यदि f के अन्तर्गत A के कम से कम दो भिन्न अवयवों के समान प्रतिबिम्ब हैं अर्थात् कम से कम दो भिन्न अवयव x_1,x_2 समुच्चय A में हो जिनके प्रतिबिम्ब समान हों $f(x_1)=f(x_2)$.

दूसरे शब्दों में कम से कम दो भिन्न अवयव $x_1,x_2\in A$ हों जिससे कि $f(x_1)=f(x_2)$.

उदाहरणस्वरूप मान लिया कि $A=\{1,2,-2,3,-3,4\}$, $B=\{0,1,4,9,16,25\}$ दो दिये हुए समुच्चय हैं तथा $f:A\to B$, $f(x)=x^2$ द्वारा परिभाषित है। फलन को

तीर-आरेख द्वारा निम्न रूप से प्रदर्शित कर सकते हैं।



यहाँ आप देखते हैं कि

$$2 \neq -2 \text{ परन्तु } f(2) = f(-2) = 4$$

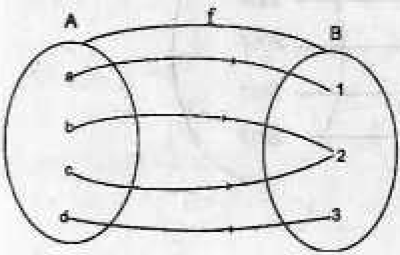
$$-3 \neq 3 \text{ परन्तु } f(3) = f(-3) = 4.$$

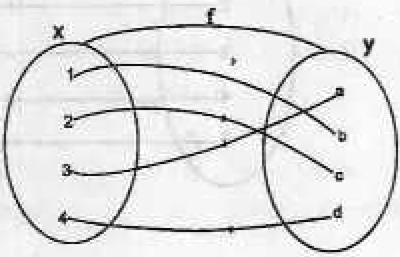
अतः दिया गया फलन बहुएक फलन है।

आच्छादक फलन (Onto function)

मानलिया कि A तथा B दो अरिक्त समुच्चय हैं। फलन $f: A \to B$ एक आच्छादक फलन है, यदि और यदि केवल $f(A) = B$ अर्थात् फलन f का परिसर $= B =$ फलन f का सह-प्रांत।

दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि यदि समुच्चय B का प्रत्येक अवयव, समुच्चय A के किसी न किसी अवयव का प्रतिबिम्ब है, तो ऐसी स्थिति में f को एक आच्छादक या आच्छादी (subective) फलन कहते हैं।





https://www.studiestoday.com

यहाँ हम देखते हैं कि $f:A\to B$ में $f(A)=B$, अतः f एक आच्छादक फलन है। पुनः $g:X\to Y$ में भी $g(X)=Y$ अतः g भी एक आच्छादक फलन है।

अंतःक्षेपी फलन (Into function)

यदि फलन $f;A\to B$ में फलन f के सह-प्रांत समुच्चय B में कम से कम एक ऐसा सदस्य बच जाए, जिसका समुच्चय A में कोई पूर्व-प्रतिबिम्ब (pre-image) नहीं हो, तो फलन f को अतःक्षेपी फलन कहा जाता है। ऐसी स्थिति में स्पष्ट है कि $f(A)\subset B$.

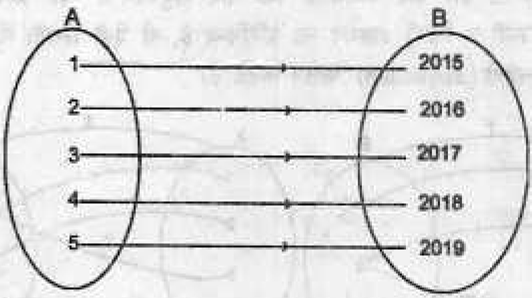
उदाहरण के लिए मान लें कि $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2,3,4\}$ और $f;A\to B$ इस प्रकार परिभाषित है $f=\{(a,1)(b,3),(c,4)\}$ तो हम देखते हैं कि $f(A)=\{1,3,4\}\subset B$.

इस प्रकार हम ऐकैकी, बहुएक, आच्छादक तथा अतःक्षेपी फलनों से परिचित हो चुके हैं। इन फलनों को साथ-साथ लेने पर निम्नरूप से फलनों को व्यवस्थित किया जा सकता है:

- ऐकैकी आच्छादक फलन (One-one onto function)
- बहुएक आच्छादक फलन (Many-one onto function)
- एकैक अंतःक्षेपी फलन (One-one into function)
- बहुएक अंतःक्षेपी फलन (Many-one into function)

ऐकैकी आच्छादक फलन (One-one onto function)

यदि फलन $f;A\to B$ एकैकी तथा आच्छादक दोनों है, तो f एक एकैकी आच्छादक (One-one onto) अथवा एकैकी आच्छादी (bijective) फलन कहलाता है।



फलन $f:\{1,2,3,4,5\} \to \{2015,2016,2017,2018,2019\}$

जहाँ $f(x) = x + 2014, x \in \{1,2,3,4,5\}$

एक एकैकी आच्छादक फलन है।

बहुएक आच्छादक फलन (Many-one onto Function)

यदि फलन $f:A \to B$ बहुएक एवं साथ ही आच्छादक भी हो, तो बहुएक आच्छादक फलन कहलाता है।

दूसरे शब्दों में समुच्चय A के कम से कम दो भिन्न अवयवों के प्रतिबिम्ब समुच्चय B में समान हो तथा समुच्चय B में एक भी अवयव ऐसा न रह जाय जिसका A में कोई न कोई पूर्व-प्रतिबिम्ब न हो, तो फलन f बहुएक आच्छादक कहलाता है।

स्पष्टत: $f:A \to B$ बहुएक आच्छादक फलन होगा, यदि और केवल यदि

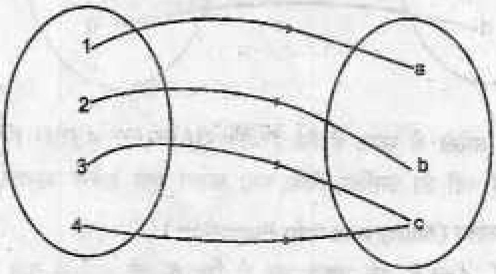
(i) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, x_1, x_2 \in A$

तथा (ii) $f(A) = B$

उदाहरण के लिए मान लिया कि $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a,b,c\}$

तथा f इस प्रकार परिभाषित है कि $f(1) = a$, $f(2) = b$,

$f(3) = c$, $f(4) = c$



तो f एक बहुएक आच्छादक फलन होगा।

एकैक अंत:क्षेपी फलन (One-one into Function)

यदि फलन $f:A \to B$ एकैक एवं साथ-साथ अन्त:क्षेपी भी हों, अर्थात् समुच्चय B के किसी भी अवयव को समुच्चय A में एक से अधिक पूर्व-प्रतिबिम्ब न हों तथा B में कम-से-कम एक अवयव ऐसा रह जाय जिसका A में कोई पूर्व-प्रतिबिम्ब न हो,

तो फलन को एकैक अन्तःक्षेपी फलन कहा जाता है।

स्पष्टतः $f;A \to B$ एकैक अन्तःक्षेपी फलन होगा यदि और केवल यदि

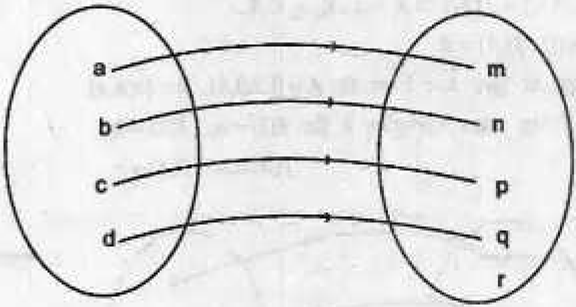
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ सभी $x_1, x_2 \in A$

तथा $f(A) \subset B$

उदाहरण के लिए मान लें कि $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{p,q,r,m,n\}$ तथा f इस प्रकार परिभाषित है कि $a \to m, b \to n, c \to p, d \to q$

अर्थात् $f = \{(a,m),(b,m)(c,p),(d,q)\}$

इसे तीर-आरेख द्वारा आप निम्न प्रकार प्रदर्शित कर सकते हैं



उपर्युक्त चित्र आरेख से स्पष्ट है कि $f(a) \neq f(b) \neq f(c) \neq f(d)$ तथा $r \in B$ का कोई पूर्व-प्रतिबिम्ब A में नहीं है। इसलिए दिया गया फलन एक एकैक अन्तःक्षेपी फलन है

बहुएक अन्तःक्षेपी फलन (Many one Into Function)

यदि फलन $f : A \to B$ इस प्रकार का हो कि B के कम-से-कम एक अवयव का समुच्चय A में एक-से-अधिक पूर्व-प्रतिबिम्ब हो तथा B में कम-से-कम एक अवयव ऐसा बच जाय जिसका समुच्चय A में कोई पूर्व-प्रतिबिम्ब नहीं हो, तो फलन f को एक अन्तःक्षेपी फलन कहा जाता है।

स्पष्टतः $f;A \to B$ बहुएक अन्तःक्षेपी फलन होगा, यदि और केवल यदि

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 \quad x_2$

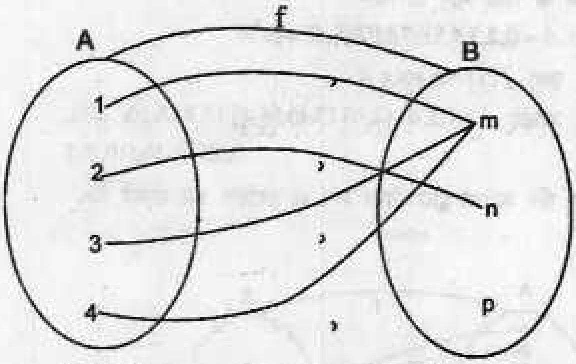
तथा $f(A) \subset B$

उदाहरण के लिए मान लें कि $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{m,n,p\}$

तथा $f : A \to B$ इस प्रकार परिभाषित है कि $1 \to m$, $2 \to n$, $3 \to m$, $4 \to m$

अर्थात् $f = \{(1,m),(2,n),(3,m),(4,m)\}$

इसे तीर-आरेख द्वारा निम्न प्रकार से प्रदर्शित कर सकते है-

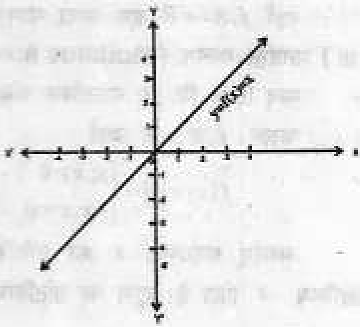


यहा हम देखते हैं कि A के तीन भिन्न अवयवों का समुच्चय B में समान प्रतिबिम्ब है तथा B में एक अवयव ऐसा है जिसका समुच्चय A में कोई पूर्व-प्रतिबिम्ब नहीं है।

अत: f एक बहुएक अन्त:क्षेपी फलन है।

कुछ प्रमुख फलन (Some important functions)

(i) तत्समक फलन (Identity function)



मान लिया कि R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। फलन $f ; R \supset R$, जहाँ $f(x) = x, \forall x \in R$ को तत्समक फलन कहते हैं। यहाँ हम देखते हैं कि कि फलन f का प्रांत तथा परिसर R है तथा इसका आलेख मूल बिन्दु से गुजरनेवाली सरल रेखा है जो x-अक्ष से $45°$ पर झुकी हुई है।

(ii) अचर फलन (Constant function)

यदि फलन $f: A \to B$ इस प्रकार का हो कि A के सभी अवयवों के प्रतिबिम्ब समुच्चय B में समान (एक) हों, तो f को अचर फलन कहते हैं।

उपर्युक्त कथन से हम समझ सकते हैं कि अचर फलन के लिए विस्तार $f(A)$ एक एकल समुच्चय (*Singleton set*) होता है।

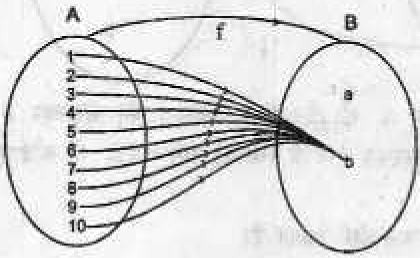
उदाहरण के लिए मान लें कि-

$$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}, B = \{a, b\}$$

तथा $f(x) = b, \forall x \in A$

अर्थात् $f = \{(1,b),(2,b),(3,b),(4,b),(5,b),(6,b),(7,b),(8,b),(9,b),(10,b)\}$

इसे हम तीर आरेख द्वारा निम्न रूप से प्रदर्शित कर सकते हैं-



यहाँ $f: A \to B$ एक अचर फलन (Constant function) है।

(iii) मापांक फलन (Modulus function)

मान लिया कि R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

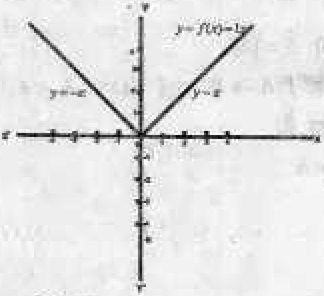
फलन $f: R \supset R$ जहाँ

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

अर्थात् धनात्मक x का प्रतिबिम्ब x ही रहता है परन्तु ऋणात्मक x का प्रतिबिम्ब $-x$ होता है। शून्य का प्रतिबिम्ब शून्य है।

मापांक फलन को निरपेक्ष मान फलन (Absolute valued function) भी कहा जाता है।

मापांक फलन का आलेख निम्न प्रकार से प्रदर्शित किया जाता है



यहाँ हम देख सकते हैं कि

$f(1) = 1 = f(-1)$

$f(2) = 2 = f(-2)$

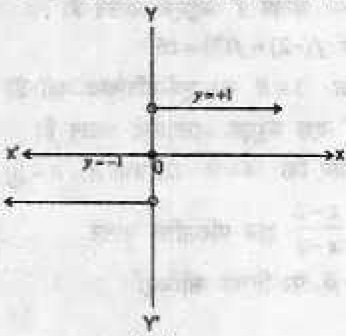
इस प्रकार मापांक फलन बहुएक अन्तःक्षेपी फलन है।

(iv) चिह्न फलन (Signum function)

फलन $f: R \supset R$, जहाँ R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ यदि } x > 0 \\ 0, \text{ यदि } x = 0 \\ -1, \text{ यदि } x < 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन चिह्न फलन कहलाता है। चिह्न फलन का प्रांत R तथा परिसर {-1,0,1} है। इसे हम निम्न आलेख द्वारा प्रदर्शित कर सकते हैं-



चित्र से आप समझ सकते हैं कि-

$$f(0)=0, f(2013)=1, f(2015)=1$$

$$f(-2012)=-1, f(-3)=-1......$$

उदाहरण 1: यदि $A=\{2,3,4,5\}$, $B=\{4\}$

तो सिद्ध करें कि $f;A\to B$ जहाँ $f(x)=4, x\in A$

एक अचर फलन है।

हल: यहाँ $f(x)=4, \forall x\in A$

अर्थात् $f(2)=4$

$f(3)=4$

$f(4)=4$

$f(5)=4$

इस प्रकार A के प्रत्येक अवयव के लिए एक ही प्रतिबिम्ब 4 है।

अत: फलन अचर है।

उदाहरण 2: मान लिया कि $f;R\supset R$, $f(x)=x^4$ द्वारा परिभाषित है। फलन f की जाँच करें।

हल: यहाँ $f(x)=x^4, x\in R$

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^4=x_2^4$$

$$\Rightarrow (x_1^2-x_2^2)(x_1^2+x_2^2)=0$$

$$\Rightarrow x_1^2-x_2^2=0$$

$$\Rightarrow x_1=x_2 \; or \; x_1=-x_2$$

$\Rightarrow$ फलन f बहुएक फलन है।

हम देखते हैं कि $f(-2)=f(2)=16$

पुन: देखते हैं कि $-2\in R$ को पूर्व-प्रतिबिम्ब नहीं है।

अत: फलन f एक बहुएक अन्त:क्षेपी फलन है।

उदाहरण 3: मान लीजिए कि $A=R-\{3\}$ तथा $B=R-\{1\}$

$f(x)=\dfrac{x-2}{x-3}$ द्वारा परिभाषित फलन

$f:A\to B$ पर विचार कीजिए।

हल: यहाँ $f(x)=\dfrac{x-2}{x-3}$

जहाँ $f;A\to B$

$A=R-\{3\}$

$B=R-\{1\}$

मान लिया कि-

$$f(x_1)=f(x_2)$$

$$\Rightarrow \frac{x_1-2}{x_1-3}=\frac{x_2-2}{x_2-3}$$

$$\Rightarrow (x_1-2)(x_2-3)=(x_1-3)(x_2-2)$$

$$\Rightarrow x_1x_2-3x_1-2x_2+6=x_1x_2-2x_1-3x_2+6$$

$$\Rightarrow 3x_2-2x_2=3x_1-2x_1$$

$$\Rightarrow x_2=x_1$$

अर्थात् $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2, \forall x_1, x_2\in A$

$\Rightarrow$ फलन f एकैक फलन (One-one function) है।

पुन: माना कि $y\in B$ तथा $y=f(x)=\dfrac{x-2}{x-3}$

$$\Rightarrow xy-3y=x-2$$

$$\Rightarrow x(y-1)=3y-2$$

$$\Rightarrow x=\frac{3y-2}{y-1},\ y\neq 1.$$

यहाँ हम देखते हैं कि $y\in B$, के लिए $x\in A$ में मिलता है जिसके लिए $y=f(x)$ अर्थात् समुच्चय B के प्रत्येक अवयव का समुच्चय A में पूर्व-प्रतिबिम्ब मिलता है।

अत: फलन f एक आच्छादक (Onto) फलन है।

इस प्रकार दिया हुआ फलन एक एकैक आच्छादक (One-one onto) फलन है।

—

प्रश्नावली-3

1. सिद्ध कीजिए कि $f(x)=x^3$ द्वारा परिभाषित फलन $f;R\supset R$ एकैक है (*injective*) फलन है।

2. यदि $f;R\supset R$ जहाँ $f(x)=x^2-3x+2$ द्वारा परिभाषित है, तो $f\{f(x)\}$ ज्ञात कीजिए।

3. सिद्ध कीजिए कि $f:[-1,1]\to R, f(x)=\dfrac{x}{x+2}$ द्वारा परिभाषित फलन एकैकी है।

4. मान लिया कि $f;R-\left\{\dfrac{x2}{3}\right\}\to R$ जहाँ $f(x)=\dfrac{4x+3}{6x-4}$, सिद्ध करें कि $f\{f(x)\}=x.$

5. मान लीजिए कि A तथा B दो समुच्चय है। सिद्ध कीजिए कि $f:A\times B\to B\times A$, जहाँ $f(a,b)=(b,a)$ द्वारा परिभाषित है, एक एकैकी आच्छादी (*bijective*) फलन है।

6. फलन $f;R\supset R$ जहाँ $f(x)=1+x^2$ द्वारा परिभाषित है, बहुएक अन्तःक्षेपी फलन है। सिद्ध करें।

7. सिद्ध करें कि $f(x)=3-5x$ द्वारा परिभाषित फलन $f;R\supset R$ एकैकी आच्छादी (*bijective*) है।

8. सिद्ध कीजिए कि $f;R\supset R$, जहाँ

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ यदि} >0\\ 0, \text{यदि } x=0\\ -1, \text{यदि} x<0\end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

https://www.studiestoday.com

9. मान लीजिए कि कक्षा X के सभी 50 विद्यार्थियों का समुच्चय A है। मान लीजिए $f: A \to \mathbf{N}$; जहाँ $f(x)=$ विद्यार्थी x का क्रमांक(Roll Number) द्वारा परिभाषित एक फलन है। सिद्ध कीजिए कि f एकैकी है किन्तु आच्छादक (Onto) नहीं है।

10. सिद्ध कीजिए कि $f(x)=2014x$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ एकैकी है, किन्तु आच्छादक नहीं है।

11. यदि $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}, x \neq 0, x \in \mathbb{R}$, हो तो $f(2)$ और $f(3)$ का मान ज्ञात करें।

Hints : $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$

$\Rightarrow f(t)=t^2-2, x+\frac{1}{x}$ के स्थान पर t लिखने पर

$\Rightarrow f(2)=2^2-2=4-2=2$

तथा $f(3)=3^2-2=9-2=7$

12. यदि $f(x+\frac{1}{x})=\frac{1}{x^2}+x^2, x \neq 0, x \quad R$, तो $f(2)$ और $f(3)$ का मान ज्ञात करें।

13. यदि $f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}, \ \forall x \quad R-\{0\}$, तो $f(2)+f(3)-f(4)$ का मान ज्ञात करें।

14. यदि $f(x-\frac{1}{x})=x^3-\frac{1}{x^3}, \ \forall x \quad R-\{0\}$, तो $f(4)+f(1)-2f(3)$ का मान ज्ञात करें।

15. यदि $f(\tan\theta)=\sin 2\theta+\cos 2\theta-1, -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$, तो $f(3)$ का मान ज्ञात करें।

Hints: $f(\tan\theta)=\sin 2\theta+\cos 2\theta-1$

$$=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}+\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}-1$$

$$=\frac{2\tan\theta+1-\tan^2\theta-1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}.$$

$$=\frac{2(\tan\theta-\tan^2\theta)}{1+\tan^2\theta}$$

$\tan\theta$ के स्थान पर x रखने पर

$$f(x)=\frac{2(x-x^2)}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow f(3)=\frac{2(3-9)}{1+9}=\frac{2\times(-6)}{10}=\frac{-6}{5}$$

16. यदि $f(x)=x^2$, तो $\frac{f(3\cdot 3)-f(2\cdot 7)}{f(4\cdot 6)-f(4)}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Hints: यहाँ $\frac{f(3\cdot 3)-f(2\cdot 7)}{f(4\cdot 6)-f(4)}=\frac{(3\cdot 3)^2-(2\cdot 7)^2}{(4\cdot 6)^2-4^2}=\frac{(3\cdot 3+2\cdot 7)(3\cdot 3-2\cdot 7)}{(4\cdot 6+4)(4\cdot 6-4)}$

$$=\frac{6}{8\cdot 6}=\frac{3}{4\cdot 3}=\frac{30}{43}.$$

—

2.2 फलनों का प्रांत एवं परिसर

पिछले अध्याय में हमने दो समुच्चयों के बीच 'संबंध' और 'फलन' के बारे में सीखा है। हम फलन से संबंधित विभिन्न महत्वपूर्ण पदों जैसे-प्रतिबिम्ब, पूर्व-प्रतिबिम्ब, प्रांत तथा परिसर के बारे में अच्छी तरह जान चुके हैं। कुछ विशिष्ट फलनों के बारे में भी जानकारी प्राप्त की है। इस अध्याय में हम वास्तविक मान फलन और वास्तविक फलन के प्रांत तथा परिसर निकालना जानेंगे।

2.2.1. फलन का प्रांत और परिसर

मानलिया कि A और B दो अरिक्त समुच्चय है तथा $f: A \to B$ एक फलन है। समुच्चय A को फलन f का प्रांत तथा समुच्चय B को फलन f का सह-प्रांत कहते है अर्थात् फलन f का प्रांत उन सभी अवयवों का समुच्चय है जिनका प्रतिबिम्ब समुच्चय B में मिलता है तथा उन सभी प्रतिबिम्बों के समुच्चय $f(A)$ फलन f का परिसर कहलाता है। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि

फलन f का प्रांत $=\{x: f(x)$ अच्छी तरह से परिभाषित हं $\}$

तथा फलन F का परिसर $=\{f(x): x$ फलन f के प्रांत का अवयव है। $\}$

हम यहाँ सिर्फ वास्तविक फलन के प्रांत और परिसर को निकालेंगे। निम्नलिखित बातों को ध्यान में रखने पर हमें फलनों के प्रांत निकालने में आसानी होगी-

(i) हम अच्छी तरह जानते हैं कि $\sqrt{x}$ सिर्फ $x \geq 0$ के लिए परिभाषित है। उदाहरण के लिए फलन f जो $f(x)=\sqrt{x-5}$ के द्वारा परिभाषित है, का प्रांत वैसे x के लिए परिभाषित होगा जिनके लिए $x-5 \geq 0$ अर्थात् $x \geq 5$ इस प्रकार दत्त फलन का प्रांत $\{x \in R: x \geq 5\}=[5,\infty)$ हुआ।

पुन: हम जानते हैं कि $\sqrt{x}$ का मान हमेशा धनात्मक या शून्य होगा, अर्थात् $\sqrt{x} \geq 0$ तो $f(x)=\sqrt{x}$ का परिसर $[0,\infty)$ होगा। अत: दत्त फलन $f=\sqrt{x-5}$ का प्रांत $=[5,\infty)$ तथा परिसर $=[0,\infty)$ है।

(ii) अचर फलन (Constant Function) $y=f(x)=c$, जहाँ c एक अचर है, प्रत्येक $x \quad R$ द्वारा परिभाषित होता है। इसलिए अचर फलन का प्रांत $=R=$ वास्तविक

संख्याओं का समुच्चय तथा परिसर $=\{c\}$.

(iii) यदि फलन $f(x)=p(x)=x$ में बहुपद, तो फलन x के वास्तविक मान के लिए परिभाषित होता है। ऐसी स्थिति में फलन का प्रांत $=R$

$=R=(-\infty,\infty)$ $f(x)=\log x$ $q(x)=[0,\infty)$

(iv) यदि फलन $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, जहाँ $p(x),q(x)$, x में बहुपद है, x के उन्हीं मानों के लिए परिभाषित होता है जिनके लिए $q(x)\neq 0$ उदाहरणस्वरूप $f(x)=\dfrac{4x^2-5}{x-2}$, $x=2$ के लिए परिभाषित नहीं हैं, अत: फलन f का प्रांत $=R-\{2\}$

(v) मापांक फलन (Modulus Function) $f(x)=|x|$, प्रत्येक x R के लिए परिभाषित होता है तथा इसका मान हमेशा शून्य या शून्य से बड़ा होता है। इस प्रकार फलन f का प्रांत $=R=(-\infty,\infty)$ तथा f का परिसर $=[0,\infty)$

(vi) हम जानते हैं कि त्रिकोणमितीय व्यंजक (trigonometric expression) $a\cos x\pm b\sin x$ का महत्तम (maximum) तथा न्यूनतम (minimum) मान क्रमश: $\sqrt{a^2+b^2}$ तथा $-\sqrt{a^2+b^2}$ होता है, अर्थात् $-\sqrt{a^2+b^2}\leq a\cos x\pm b\sin x\leq\sqrt{a^2+b^2}$, x R इस प्रकार फलन $f(x)=a\cos x\pm b\sin x$ द्वारा परिभाषित फलन का प्रांत $=R$ तथा परिसर $=\left[-\sqrt{a^2+b^2},\sqrt{a^2+b^2}\right]$ उदाहरणस्वरूप फलन $f=3\cos x-4\sin x$ का प्रांत $=R$ परिसर $=[-5,5]$.

(vii) हम जानते हैं कि घातांक व्यंजक $a^x, a\geq 0$ के लिए परिभाषित है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि फलन f जहाँ $f(x)=(p(x))^{q(x)}$

$$p(x)\geq 0$$

(viii) फलन $f(x)=\log p(x)$ वैसे x के लिए परिभाषित है जिसके लिए $p(x)>0$ तथा $a>0$ और $a\neq 1$. अर्थात् $f(x)=\log x$, का प्रांत$=(0,\infty)$ तथा परिसर $=(-\infty,\infty)$

उपर्युक्त तथ्यों को ध्यान में रखकर हम आसानी से वास्तविक फलनों के प्रांत और परिसर ज्ञात कर सकते है।

उदाहरण: 1. निम्नलिखित फलनों का प्रांत व परिसर ज्ञात करें-

(i) $f(x)=-|x|$ (ii) $f(x)=2x-5$ (iii) $f(x)=\sqrt{16-x^2}$

(iv) $f(x)=x^2+2$ (v) $f(x)=\sin x+\cos x$

हल: (i) हम जानते है कि $|x|$ $0, x\in R\Rightarrow -|x|\leq 0$. अत: फलन f जहाँ

$f(x) = -|x|$ का प्रांत $= R$ तथा परिसर $= (-\infty, 0]$

(ii) दिया गया फलन $f(x) = 2x - 5$, प्रत्येक $x \in R$ के लिए परिभाषित है तथा इसका मान कोई भी वास्तविक संख्या हो सकती है। इस प्रकार दिये गये फलन का प्रांत $= R = (-\infty, \infty)$ तथा परिसर $= R = (-\infty, \infty)$

(iii) दिया गया फलन $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ परिभाषित तभी होगा जब

$$16 - x^2 \geq 0$$
$$= 16 \geq x^2$$
$$= x^2 \leq 16$$
$$= -4 \leq x \leq 4$$

स्पष्टत: $\sqrt{16 - x^2} \geq 0$ अत: फलन f का प्रांत $= [-4, 4]$ तथा फलन f का परिसर $= [0, 4)$

(iv) दिया गया फलन $f(x) = x^2 + 2$, सभी वास्तविक संख्या x के लिए परिभाषित है तथा $x^2 + 2 \geq 2$ इस प्रकार फलन का प्रांत $= R$ तथा परिसर $= [2, \infty)$

(v) हम जानते हैं कि

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq \sin x \pm b\cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2}, x \in R$$
$$\Rightarrow -\sqrt{1+1} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{1+1}, x \in R$$
$$\Rightarrow -\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}, x \in R$$
$$\Rightarrow -\sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{2}, x \in R$$

अत: दिया गया फलन f का प्रांत R तथा परिसर $= \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

उदाहरण: 2. फलन $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 5}{x^2 - 5x + 4}$ का प्रांत ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया फलन $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 5}{x^2 - 5x + 4}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 3x + 5}{(x-4)(x-1)}$$

हम जानते हैं कि $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, जहाँ $p(x), q(x)$ दो बहुपद हैं तभी परिभाषित होता है जब $q(x) \neq 0$

अत: दिया गया फलन परिभाषित होगा यदि $(x-4)(x-1) \neq 0$

$$\Rightarrow x \neq 1, 4.$$

इस प्रकार फलन f का प्रांत $= R-\{1,4\}$

उदाहरण 3 फलन $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-8x+12}$ का प्रांत तथा परिसर ज्ञात करें।

हल: दिया गया फलन $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-8x+12}$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{(x+1)^2}{(x-6)(x-2)}.$$

फलन f को परिभाषित होने के लिए

$$x^2-8x+12\neq 0$$
$$\Rightarrow (x-6)(x-2)\neq 0$$
$$\Rightarrow x\neq 2,6$$

$\Rightarrow$ दिये गये फलन f का प्रांत $= R-\{2,6\}$

मानलिया कि $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-8x+12}$

$$\Rightarrow yx^2-8xy+12y=x^2+2x+1$$
$$\Rightarrow (y-1)x^2-2x(4y+1)+12y-1=0$$

यह एक x चर में द्विघात समीकरण है। x के वास्तविक मान के लिए समीकरण का विवेचक ≥ 0

$$\Rightarrow 4(4y+1)^2-4(y-1)(12y-1)\geq 0$$
$$\Rightarrow 16y^2+8y+1-12y^2+13y-1\geq 0$$
$$\Rightarrow 4y^2+21y\geq 0$$
$$\Rightarrow y(4y+21)\geq 0$$
$$\Rightarrow y\leq -\frac{21}{4}, y\geq 0.$$

अतः इस फलन का परिसर $=\left(-\infty,\dfrac{-21}{4}\right]\cup[0,\infty)$

उदाहरण 4: फलन f का प्रांत और परिसर ज्ञात करें जहाँ $5^x+5^{f(x)}=5$

हल: यहाँ $5^x+5^{f(x)}=5$

$$\Rightarrow 5^{f(x)}=5-5^x$$
$$\Rightarrow f(x)=\log_5(5-5^x)$$

फलन f को परिभाषित होने के लिए $5-5^x>0$

$$\Rightarrow 5>5^x$$

$$\Rightarrow 5^x<5^1$$

$$\Rightarrow x<1$$

$\Rightarrow$ फलन f का प्रांत $=(-\infty,1)$

इसी प्रकार f का परिसर $=(-\infty,1)$

उदाहरण 5: फलन $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ का प्रांत तथा परिसर निर्धारित कीजिए।

हल: दिया गया फलन $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$,

हम देखते हैं कि $1+x^2\geq 1, \forall x\in R$

तथा $1+x^2>x^2$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{1+x^2}<1 \text{ और } \frac{x^2}{1+x^2}\geq 0.$$

अतः दिये गये फलन का प्रांत $=R$

तथा परिसर $=[0,1)$

उदाहरण 6: फलन $f(x)=\sqrt{12\cos x-5\sin x-14}$ का प्रांत निकालें।

हल: दिया गया फलन f परिभाषित होगा यदि

$$12\cos x-5\sin x-14\geq 0.$$

हम जानते हैं कि

$$-\sqrt{a^2+b^2}\leq a\cos x\pm 10\sin x\leq\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{12^2+5^2}\leq 12\cos x-5\sin x\leq\sqrt{12^2+5^2}$$

$$\Rightarrow -13\leq 12\cos x-5\sin x\leq 13$$

$$\Rightarrow 12\cos x-5\sin x-14<0, \forall x\in R$$

$\Rightarrow \sqrt{12\cos x-5\sin x-14}$ वास्तविक संख्याओं के समुच्चय पर परिभाषित नहीं है।

अतः दिया गया फलन f का प्रांत $=\phi(\textit{empty set})$.

उदाहरण 7: फलन $f(x)=\frac{x^2-2014x+2013}{x^2-2015x+2014}$ का प्रांत एवं परिसर ज्ञात करें।

हल: दिया गया फलन $f(x)=\frac{x^2-2014x+2013}{x^2-2015x+2014}$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{(x-2013)(x-1)}{(x-2014)(x-1)}$$

$$=\frac{x-2013}{x-2014},\ x\neq 1$$

दिया गया फलन परिभाषित होगा यदि

$$x\neq 1,\ 2014$$

अतः फलन f का प्रांत $=\mathbb{R}-\{1,2014\}$

मान लिया कि $y=f(x)=\frac{x-2013}{x-2014}$

$$\Rightarrow xy-2014y=x-2013$$

$$\Rightarrow x=\frac{2014y-2013}{y-1}$$, जो परिभाषित होगा

जब $y\neq 1$

अतः दत्त फलन का परिसर $=R-\{1\}$

उदाहरण 8: फलन $f(x)=x+\frac{1}{x}$ का प्रांत व परिसर ज्ञात करें।

हल: यहाँ $f(x)=x+\frac{1}{x}$

$f(x)$ को परिभाषित होने के लिए $x\neq 0$

अतः दिया गया फलन का प्रांत $=R-\{0\}$

हम देखते हैं कि $f(x)=x+\frac{1}{x}=(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})^2+2$, जहाँ $x>0$.

$$\Rightarrow f(x)\geq 2,\ \text{जब } x>0.$$

जब $x<0$, तब $f(x)\leq -2$

अतः $f(x)$ का परिसर $=(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$

उदाहरण 9: $f(x)=\sqrt{x-2014}$ द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन f का प्रांत तथा

परिसर ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया फलन f

$$f(x)=\sqrt{x-2014}$$

को वास्तविक फलन होने के लिए $x-2014\geq 0$

$$\Rightarrow x\geq 2014$$

अर्थात् फलन f को परिभाषित होने के लिए $x\geq 2014$

अतः फलन f का प्रांत $=[2014,\infty)$

हम जानते हैं कि $\sqrt{x}\geq 0$, जब $x\geq 0$

अतः फलन f का परिसर $=[0,\infty)$

उदाहरण 10: फलन $f(x)=\frac{1}{x-1}$ द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन से फलन $g(x)=f[f(x)]$ का प्रांत ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया फलन $f(x)=\frac{1}{1-x}$ को परिभाषित होने के लिए $x-1\neq 0\Rightarrow x\neq 1$.

अब $g(x)=f[f(x)]=\frac{1}{1-f(x)}=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{x-1}{1-x-1}$

$g(x)=\frac{x-1}{-x}=\frac{1}{x}-1$ को परिभाषित होने के लिए $x\neq 0$

इस प्रकार फलन g का प्रांत $=R-\{1,0\}$

प्रश्नावली-4

1. मान लीजिए कि
$A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,5,9,11,15,16\}$ और $f=\{(1,5),(2,9),(3,1),(4,5)\}$ तो फलन f का प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए।

2. फलन $f(x)=\begin{cases} x^2; 0\le x\le 2 \\ 3x; 2<x\le 10 \end{cases}$

द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन का प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए।

3. फलन $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-8x+12}$ का प्रांत ज्ञात कीजिए।

4. $f(x)=\sqrt{x-2}$ द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन f का प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

5. $f(x)=|x-5|$ द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन का प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

6. मान लीजिए कि $f,g:R\supset R$ क्रमशः $f(x)=x+1, g(x)=2x-3$ द्वारा परिभाषित है। $f(x)+g(x), f(x)-g(x)$ और $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ज्ञात कीजिए।

7. मान लीजिए कि $P=\{9,10,11,12,13\}$ तथा $f:P\to N, f(n)=n$ का महत्तम अभाज्य गुणक द्वारा परिभाषित है। f का परिसर ज्ञात कीजिए।

8. मान लीजिए कि $f=\{(x,\dfrac{x^2}{1+x^2}),x\in R\}$, R से R में एक फलन है। f का परिसर निर्धारित कीजिए।

9. मान लीजिए कि $f=\{(1,1),(2,3),(0,-1),(-1,-3)\}$, Z से Z में $f(x)=px+q$ द्वारा परिभाषित है, जहाँ p,q एक पुर्णांक है। p,q को निर्धारित कीजिए।

10. निम्नलिखित वास्तविक फलन f का प्रांत ज्ञात करें-

(i) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ (ii) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-4x+3}$

(iii) $f(x)=4-\sqrt{1-x^2}$ (iv) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$

(v) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$ (vi) $f(x)=\sqrt{x^2-2015x+2014}$

(vii) $f(x)=\dfrac{1}{\log_{10}(1-x)}$ (viii) $f(x)=\log_x 3$

(ix) $f(x)=\sqrt{1-|x|}$ (x) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}+\sqrt{x-1}$

(xi) $f(x)=\dfrac{x^2}{x}$ (xii) $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{x^3}{x}$.

(xiii) $f(x)=2014^x$ (xiv) $f(x)=2^{x-x^2}$

(xv) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$

11. निम्नलिखित फलन का प्रांत निकालें-

(i) $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}+\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ (ii) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x-2}}$

(iii) $f(x)=\log_x 5+\log_5 x$ (iv) $f(x)=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$

(v) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$ (vi) $f(x)=\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

(vii) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}$ (viii) $f(x)=\sqrt{16-x^2}+\dfrac{1}{x^2-16}$

(ix) $f(x)=\dfrac{3}{4-x^2}+\sqrt{x^2-x}$ (x) $f(x)=\dfrac{3}{4-x^2}+\sqrt{x-x^2}$

12. निम्नलिखित वास्तविक फलन का परिसर ज्ञात करें-

(i) $f(x)=\sin x$ (ii) $f(x)=\cos^2 x$

(iii) $f(x)=1+\cos 2x$ (iv) $f(x)=10^x$

(v) $f(x)=x^{10}$ (vi) $f(x)=x^{2015}$

(vii) $f(x)=2014^x$ (viii) $f(x)=1+\sin x$

(ix) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x+2}$ (x) $f(x)=|\sin x|$

(xi) $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ (xii) $f(x)=|x|+2$

(xiii) $f(x)=12\sin x+5\cos x$ (xiv) $f(x)=5+3\cos x-4\sin x$

(xv) $f(x)=x^2+x+1$ (xvi) $f(x)=x^2-x+1$

(xvii) $f(x)=\cos^2+\cos x+1$ (xviii) $f(x)=\sin^2 x-\sin x+2$

(xix) $f(x)=\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}$ (xx) $f(x)=2014^{-x}$

13. सही उत्तर चुनें-

(i) वास्तविक फलन $f(x)=\dfrac{1}{2-\cos 3x}$ का परिसर निम्नलिखित में से कौन है-

(a) $[\frac{1}{3},1]$ (b) $(\frac{1}{3},1)$ (c) $(0,1)$ (d) $(-1,1)$

(ii) यदि फलन $f(x)$ का प्रांत $[0,1]$ है तो फलन $f(2x+3)$ का प्रांत निम्न में कौन होगा-

(a) $(0,1)$ (b) $[-\frac{3}{2},-1]$ (c) $[3,5]$ (d) $[1,\frac{3}{2}]$

(iii) वास्तविक फलन $f(x)=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$ का परिसर निम्न में से कौन है-

(a) $[0,1]$ (b) $[1,2]$ (c) $[\sqrt{2},2]$ (d) $[0,\sqrt{2}]$

(iv) फलन $f(x)=|\sin x-\cos x|$ का परिसर निम्न में से कौन है-

(a) $[0,\sqrt{2}]$ (b) $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ (c) $[0,2]$ (d) $[0,1]$

(v) यदि $f(x)=\cos(\log x)$ है तो $f(x)f(y)-\frac{1}{2}\{f(xy)+f(\frac{x}{y})\}$ का मान निम्न में से किसके बराबर होगा -

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) -1

(vi) यदि $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$ हो तो, $f(x)+f(1-x)$ का मान बराबर है

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) $\frac{1}{2}$

(vii) यदि $f(x)=(9-x^4)^{\frac{1}{4}}$, तो $f(f(x))=$

(a) x (b) x^4 (c) x^2 (d) $9x$

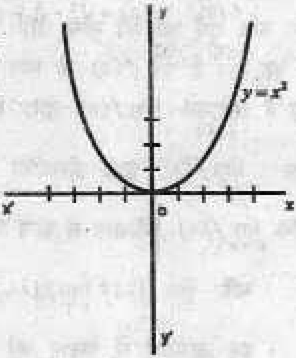
2.3 फलन की सीमाएँ

(Limits of Functions)

प्रस्तावना

हमलोग फलन की सीमा की प्रक्रिया को स्पष्ट रूप से समझने के लिए सीमा की संकल्पना से निम्नलिखित उदाहरण के द्वारा परिचित होते हैं-

फलन $f(x)=x^4$ पर विचार कीजिए। हम देखते हैं कि जैसे-जैसे x को शून्य के अधिक निकट मान लेते हैं, $f(x)$ का मान भी 0 की ओर अग्रसर होता जाता है जो बगल की आकृति से स्पष्ट है।



इस प्रकार हम कह सकते हैं कि ज्यों-ज्यों x शून्य की ओर अग्रसर होता है, $f(x)$ का मान भी 0 की ओर अग्रसर होता जाता है। इसे गणितीय संकेत में

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^4 = 0$$

द्वारा लिखा जाता है तथा इसे $f(x)$ की सीमा शून्य है, जब x शून्य की ओर अग्रसर होता है, समझा जाता है। $f(x)$ की सीमा, जब शून्य की ओर अग्रसर होती है, को ऐसे समझा जाए जैसे- $x=0$ पर $f(x)$ का मान होना चाहिए।

व्यापक रूप से जब $x \to a$ (जब x, a के सन्निकट मान को प्राप्त करता है) $f(x) \to \ell$, तब ℓ को फलन $f(x)$ की सीमा कहा जाता है और इसे इस प्रकार लिखा जाता है-

$$\lim_{x\to a} f(x = \ell .$$

एक और फलन $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}, x \neq 3$ पर विचार कीजिए। x के 3 के अत्यधिक निकट मानों (लेकिन 3 नहीं) के लिए $f(x)$ के मान का परिकलन करते हैं-

x	2.9	2.89	2.99	3.01	3.001	3.025	3.0001
$f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$	5.9	5.89	5.99	6.01	6.001	6.025	6.0001

सारणी से यह स्पष्ट है कि जब x, 3 के निकट मानों को प्राप्त करता है, तब $f(x)$ का मान 6 की ओर अग्रसर होता है, सारणी के अवलोकन से यह पता चलता है कि x कैसे 3 की ओर अग्रसर होता है, फलन की सीमा इस पर आधारित नहीं है। ध्यान दीजिए कि x के संख्या 3 की ओर अग्रसर होने के लिए x या तो बाईं ओर या दाईं ओर से 3 की ओर अग्रसर होगा अर्थात् x के निकट सभी मान या तो 3 से कम हो सकते हैं या 3 से अधिक हो सकते हैं। इससे स्वाभाविक रूप से दो सीमाएँ- बाएँ पक्ष की सीमा और दाएँ पक्ष की सीमा प्रेरित होती हैं। फलन $f(x)$ के दाएँ पक्ष की सीमा $f(x)$ का वह मान है जो $f(x)$ के मान से आदेशित होता है जब x, 3 के दाईं ओर अग्रसर होता है और इसे $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ द्वारा निरूपित किया जाता है। इसी प्रकार बाएँ पक्ष की सीमा $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ द्वारा निरूपित किया जाता है। अतः हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ अस्तित्व में होगा यदि $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

यदि $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, तो $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ अस्तित्वहीन होगा।

इस अध्याय में फलन की सीमा के बारे में अध्ययन करने के बाद सीमा के बीजगणित का अध्ययन करेंगे।

फलन के रूप (Forms of Functions)

फलन f के व्यंजक $f(x)$ में x का विशिष्ट मान रखने पर दो संभावनाएँ हैं- $f(x)$ निर्धार्य (determinate) या अनिर्धार्य (indeterminate) रूप में हो। निर्धार्य रूप से अभिप्राय उस मान से है जो विशिष्ट होता है, जैसे x के बदले में a रखने से यदि $f(x)$ का मान 5 होता है, तो 5 एक विशिष्ट संख्या (specific number) को निरूपित करता है। इसप्रकार x के a मान के लिए $f(x)$ निर्धार्य रूप में है।

अनिधार्य रूप से अभिप्राय उस स्वरूप से है- जिसका मान विशिष्ट या अद्वितीय नहीं हो सकता है। उदाहरण के रूप में, यदि $x=a$ रखने से $f(x)$, $\frac{0}{0}$ रूप में परिवर्तित होता है तो इसका मान अद्वितीय (unique) नहीं हो सकता है।

इसे समझने के लिए मान लिया कि-

$$\frac{0}{0} = k \text{ है, तो}$$

$$0 = k \times o$$

अब इस समीकरण में k का मान अद्वितीय नहीं है। k का मान कोई भी सीमित वास्तविक संख्या हो सकती है जैसे- k=0,1,2,3,4,5 ... , $\frac{3}{4}$, ... , -5,-7... कुछ भी हो सकता है। अतः $\left[\frac{0}{0}\right]$ रूप अनिर्धार्य रूप है।

$\left[\frac{0}{0}\right]$ रूप के अलावे $\left[\frac{\infty}{\infty}\right], \infty-\infty, 0\times\infty, 0^0, \infty^0, \infty$,भी अनिर्धार्य रूप (indeterminate forms) है।

सीमाओं का बीजगणित(Algebra of limits)

सीमा प्रक्रिया योग, व्यवकलन, गुणा और भाग का पालन करती है जबतक कि विचाराधीन फलन और सीमाएँ सुपरिभाषित हैं।

मान लिया कि f और g दो फलन ऐसे हैं कि $\lim_{x\to a} f(x)$ और $\lim_{x\to a} g(x)$

दोनों का अस्तित्व है। तब

(i) दो फलनों के योग की सीमा फलनों की सीमाओं का योग होता है, अर्थात्

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$$

(ii)दो फलनों के अन्तर की सीमा फलनों की सीमाओं का अन्तर होती है, अर्थात्

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)$$

(iii)दो फलनों के गुणन की सीमा फलनों की सीमाओं का गुणन होता है, अर्थात्

$$\lim_{x\to a}[f(x).g(x)]=\lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$$

यदि $g(x)$ एक अचर फलन है $g(x)=k, \forall x\in R$ तो

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to a}(kf(x)=k\lim_{x\to a} f(x)$$

(iv)दो फलनों के भागफल की सीमा फलनों की सीमाओं का भागफल होता है जबकि हर शून्येतर होता है अर्थात्

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}, \text{ जहाँ } \lim_{x\to a} g(x)\neq 0$$

फलन की सीमा निकालने का कार्यकारी नियम(Working Rule for finding limit of a function)

अब हम किसी वास्तविक फलन की सीमा निकालने की विधि पर विचार करते हैं। मान लीजिए कि हमें $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ज्ञात करना है। इसके लिए हम x के स्थान पर a रखते हैं तो दो स्थितियाँ होंगी, या तो $f(a)$ निर्धार्य रूप (determinate form) या अनिर्धार्य रूप (indeterminate form)में होगा।

$$\lim_{x\to a} f(x) \xrightarrow{x=a \text{ रखने पर}} f(a) \begin{cases} \text{निर्धार्य रूप (Determinate form)} \\ \text{अनिर्धार्य रूप (Indeterminate form)} \end{cases}$$

यदि $f(a)$ निर्धार्य रूप में है, तो $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ के बराबर होगा अर्थात

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

उदाहरण स्वरूप

(i) $\lim\limits_{x\to 1}[x^3 - x^2 + 1] = 1^3 - 1^2 + 1 = 1$

(ii) $\lim\limits_{x\to 1}[1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^{2014}]$

$= 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1 = 2015$

(iii) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dfrac{9 - 4}{3 - 2} = 5$

(iv) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 100} = \dfrac{1^3 + 1}{1^2 + 100} = \dfrac{2}{101}$

(v) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x(x-2)}{x+2} = \dfrac{2(2-2)}{2+2} = 0$

यदि $f(a)$ अनिर्धार्य रूप (indeterminate form) में है, तो $f(a)$, $\left[\dfrac{0}{0}\right], \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right], [0\times\infty], [\infty - \infty], [\infty^0], [0^0], [1^\infty]$ आदि अनिर्धार्य रूप में किसी एक रूप में

होगा। इन रूपों में फलन की सीमा निकालने के लिए हमें अलग-अलग विधियों के द्वारा अनिधार्य रूप का रूपान्तरण निर्धार्य रूप में कर, फलन की सीमा ज्ञात करेंगे। इसे एक दैनिक जीवन की परिस्थिति से जोड़ने की कोशिश करते हैं।

मान लीजिए कि आप चिकित्सक के पास स्वास्थ्य-जाँच के लिए जाते हैं, तो दो स्थितियाँ होंगी- या तो आप स्वस्थ होंगे या अस्वस्थ। यदि आप स्वस्थ हैं, तो चिकित्सक आपको कोई दवा सलाह के रूप में नहीं देंगे, परन्तु अस्वस्थ होने की स्थिति में आपकी अस्वस्थ्यता की जाँच के अनुसार चिकित्सक दवा लेने की सलाह देंगे तथा दवा तब तक लेने के लिए कहेंगे जबतक आप स्वस्थ न हो जाएँ। ठीक इसी तरह $\lim_{x \to a} f(x)$ ज्ञात करने के लिए $x = a$ रखकर $f(a)$ निकालते हैं। यदि $f(a)$ निर्धार्य रूप में है, तो $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ होगा।

यदि $f(a)$ अनिर्धार्य स्वरूप में है तो यह $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [\infty - \infty], [0 \times \infty], [0^0], [\infty^0], [1^\infty]$ रूप में से किसी एक रूप में होगा जिसके लिए हम निम्नलिखित विधि का प्रयोग कर अनिर्धार्य रूप को निर्धार्य रूप में परिवर्तित कर सीमा ज्ञात करते हैं-

(i) $\left[\frac{0}{0}\right]$ रूप-

मान लीजिए कि $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, जहाँ $p(x)$ और $q(x), x$ में बहुपद हैं तथा $p(a) = 0$, $q(a) = 0$ है।

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)}$, x की जगह पर a रखने से $f(a), \left[\frac{0}{0}\right]$ रूप में है।

यहाँ हम देखते हैं कि $p(a) = 0, q(a) = 0$, अर्थात् गुणनखण्ड प्रमेय से हम कह सकते हैं कि $x - a, p(x)$ और $q(x)$ बहुपदों का एक गुणनखण्ड है। x की जगह पर a रखने से गुणनखण्ड $(x - a)$ की उपस्थिति के कारण ही बहुपद $p(x)$ और $q(x)$ शून्य हो जाता है। यहाँ ध्यान देने योग्य बात यह है कि $x \to a$ में x, a के मान की ओर अग्रसर होता है न कि a के बराबर है। फलस्वरूप $(x - a)$ शून्य की ओर अग्रसर होगा, न कि शून्य के बराबर है। अत: अंश और हर में उभयनिष्ठ गुणनखण्ड रहने के कारण $(x - a)$ को अंश और हर से निरस्त किया जा सकता है। इस प्रक्रिया को तबतक जारी रखा जाता है-जबतक कि सभी उभयनिष्ठ गुणनखण्ड निरस्त न हो जायँ-

जैसे-(i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ ($x=2$ रखने पर $\dfrac{0}{0}$ का रूप पाते हैं)

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$$

अतः $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4.$

(ii) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-3x^2}{x^2-5x+6}$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x^2(x-3)}{(x-2)(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x^2}{x-2}=\frac{3^2}{3-2}=9$$

(iii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-x-10}{x^2-4}$

$x=2$ पर फलन का मान प्राप्त करने पर हम इसे $\dfrac{0}{0}$ के रूप में पाते हैं।

अतः $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-x-10}{x^2-4}==\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-6x+5x-10}{(x-2)(x+2)}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(3x+5)(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim\frac{(3x+5)}{(x+2)}=\frac{3\times 2+5}{2+2}=\frac{11}{4}$$

(iv) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$ जहाँ n एक धन पूर्णांक है।

$x=a$ पर फलन का मान प्राप्त करने पर हम इसे $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ का रूप में पाते हैं।

$x^n - a^n$ को $x-a$ से भाग देने पर हम पाते हैं कि-

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + x^{n-4}a^3 + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

$$\Rightarrow \frac{x^n - a^n}{x-a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + x^{n-4}a^3 + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{x \to a}(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + x^{n-4}a^3 + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

$$= a^{n-1} + a.a^{n-2} + a^{n-3}a^2 + a^{n-4}a^3 + \ldots + a.a^{n-2} + a^{n-1}$$

$$= a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} + \ldots + a^{n-1} (n \text{ पद})$$

$$= na^{n-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}$$

उदाहरण स्वरूप $\lim_{x \to a} \frac{x^4 - a^4}{x-a} = 4a^{4-1} = 4a^3$

तथा $$\lim_{x \to 1} \frac{x^{25} - 1}{x^{15} - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{x^{25} - 1^{25}}{x-1}}{\frac{x^{15} - 1^{15}}{x-1}}$$

$$= \frac{25(1)^{25-1}}{15(1)^{15-1}} = \frac{5}{3}.$$

टिप्पणी:- उपर्युक्त सूत्र n जब परिमेय संख्या है और a धनात्मक के लिए सत्य है। इसकी सत्यता की जाँच आप अगली कक्षा में करेंगे।

अर्थात् $$\lim_{x \to 64} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 4}{x - 64} = \lim_{x \to 64} \frac{x^{\frac{1}{3}} - (64)^{\frac{1}{3}}}{x - 64}$$

$$= \frac{1}{3}(64)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \times (64)^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{48}.$$

(v) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{\frac{1}{5}}-1}{x^{\frac{1}{8}}-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{x^{\frac{1}{5}}-1^{\frac{1}{5}}}{x-1}}{\dfrac{x^{\frac{1}{8}}-1^{\frac{1}{8}}}{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\dfrac{x^{\frac{1}{5}}-1^{\frac{1}{5}}}{x-1}\right)}{\left(\dfrac{x^{\frac{1}{8}}-1^{\frac{1}{8}}}{x-1}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{5}(1)^{\frac{1}{5}-1}}{\frac{1}{8}(1)^{\frac{1}{8}-1}}=\frac{8}{5}=1.6$$

$$\left[\frac{\propto}{\propto}\right]$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}$$

$x=a$ पर फलन का मान प्राप्त करने पर हम $\left[\frac{\propto}{\propto}\right]$ रूप पाते हैं, तो ऐसी स्थिति में $p(x)$ तथा $q(x)$ में उपस्थित अधिकतम x के घात वाले पद से अंश तथा हर को भाग देने के पश्चात् फलन की सीमा ज्ञात करते हैं।

जैसे

$$\lim_{x\to\propto}\frac{3x^2-4x+5}{4x^2+2x-7},\ \frac{\propto}{\propto}$$ रूप में है।

अतः अंश तथा हर को x^2 (अंश या हर के बहुपद में x^2 अधिकतम घात वाला पद है) से भाग देने पर

$$\lim_{x\to\propto}\frac{3x^2-4x+5}{4x^2+2x-7}=\lim_{x\to\propto}\frac{\dfrac{3x^2-4x+5}{x^2}}{\dfrac{4x^2+2x-7}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}{4+\frac{2}{x}-\frac{7}{x^2}}=\frac{3}{4}$$

इस प्रकार की सीमा की व्यापक समझ के लिए हम निम्न उदाहरण पर विचार करते हैं-

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^p+bx^{p-1}+cx^{p-5}+d}{a_1x^q+b_1x^{q-3}+c_1x^{q-7}+d_1}\quad \text{जहाँ } p>0, q>0.$$

उपर्युक्त फलन के अंश तथा हर में क्रमश: x^p, x^q से भाग देने पर हम पाते हैं कि

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^p+bx^{p-1}+cx^{p-5}+d}{a_1x^q+b_1x^{q-3}+c_1x^{q-7}+d_1}=\lim_{x\to a}\frac{x^p\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^5}+\frac{d}{x^p}\right)}{x^q\left(a_1+\frac{b_1}{x^3}+\frac{c_1}{x^7}+\frac{d_1}{x^q}\right)}$$

$$=\lim_{x\to a}x^{p-q}\left[\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^5}+\frac{d}{x^p}}{a_1+\frac{b_1}{x^3}+\frac{c_1}{x^7}+\frac{d_1}{x^q}}\right]$$

$$=\begin{cases}\infty, \text{ (}[illegible]\text{)} & p>q\\ \frac{a}{a_1}, \text{ जब } & p=q\\ 0, \text{ जब } & p<q.\end{cases}$$

$[\infty-\infty]$ और $[0\times\infty]$ रूप को सरल करने (*simplify*) पर यह रूप $\frac{0}{0}$ या $\frac{\infty}{\infty}$ रूप में परिवर्तित हो जायगा, जैसे-

(i) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5}-\sqrt{n^2-7}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+5}-\sqrt{n^2-7}\right)\left(\sqrt{n^2+5}+\sqrt{n^2-7}\right)}{\left(\sqrt{n^2+5}+\sqrt{n^2-7}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+5\right)-\left(n^2-7\right)}{\left(\sqrt{n^2+5}+\sqrt{n^2-7}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12}{\left(\sqrt{n^2+5}+\sqrt{n^2-7}\right)}=0$$

https://www.studiestoday.com

(ii) $\lim\limits_{n \supset \surd}\left(\sqrt{n^2+8n}-\sqrt{n^2-7n}\right)$

$$=\lim_{n \supset \surd}\frac{\left(\sqrt{n^2+8n}-\sqrt{n^2-7n}\right)\left(\sqrt{n^2+8n}+\sqrt{n^2-7n}\right)}{\left(\sqrt{n^2+8n}+\sqrt{n^2-7n}\right)}$$

$$=\lim_{n \supset \surd}\frac{\left(n^2+8n\right)-\left(n^2-7n\right)}{\left(\sqrt{n^2+8n}+\sqrt{n^2-7n}\right)}$$

$$=\lim_{n \supset \surd}\left(\frac{8n+7n}{\sqrt{n^2+8n}+\sqrt{n^2-7n}}\right)$$

$$=\lim_{n \supset \surd}\frac{15}{\left(\sqrt{1+\frac{8}{n}}+\sqrt{1-\frac{7}{n}}\right)}$$ (अंश तथा हर में n से भाग देने पर)

$$=\frac{15}{1+1}=\frac{15}{2}=7.5$$

(iii) $1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$ के रूप में लघुगणक लेकर सीमा का मान निकाला जाता है।

त्रिकोणमितीय फलनों की सीमाएँ
(Limits of Trigonometric Functions)

व्यापक रूप से फलनों के बारे में निम्नलिखित तथ्य कुछ त्रिकोणमितीय फलनों की सीमाओं का परिकलन करने में सुलभ हो जाते हैं।

मान लीजिए f, g और h वास्तविक मानवाले फलन ऐसे हैं कि परिभाषा के सर्वनिष्ठ प्रांतों के सभी x के लिए

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

किसी वास्तविक संख्या a के लिए यदि $\lim_{x \to a} f(x) = l, \lim_{x \to a} h(x) = l$, तो

$$\lim_{x \to a} f(x) \le \lim_{x \to a} g(x) \le \lim_{x \to a} h(x)$$

$$\Rightarrow l \le \lim_{x \to a} g(x) \le l$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} g(x) = l$$

उपर्युक्त तथ्य को ध्यान में रखकर त्रिकोणमितीय फलनों से संबंधित निम्नलिखित सीमायें-

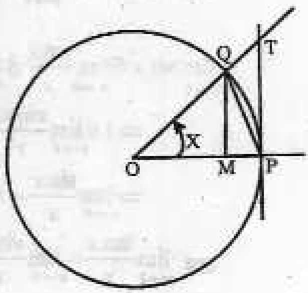
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} x \cot x = 1.$$

स्थापित करते हैं।

मान लिया कि इकाई वृत्त का केन्द्र O है तथा $\angle POQ = x$ रेडियन है जहाँ $0 \angle x \angle \frac{\pi}{2}$ वृत्त के बिन्दु P पर PT एक स्पर्श रेखा है जो OQ रेखा से T पर मिलती है। $P-Q$ को मिलाया। यहाँ हम देखते हैं कि-



ΔPOQ का क्षेत्रफल < वृत्तखण्ड POQ का क्षेत्रफल < ΔPOT का क्षेत्रफल

$$\frac{1}{2}OP\cdot QM < \frac{x}{2p}p(OP)^2 < \frac{1}{2}OP\cdot PT$$

$$QM < x(OP) < PT$$

$$\frac{QM}{OQ} < x < \frac{PT}{OP.}$$

$$\sin x < x < \tan x$$

ΔOQM में $\sin x = \frac{QM}{OQ} \Rightarrow OM = \sin x$

ΔOPT में $\tan x = \frac{PT}{OP} \Rightarrow PT = \tan x$

$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$

चूँकि $o < x < \frac{\pi}{2}, \sin x$ धनात्मक है और इस प्रकार $\sin x$ से सभी को भाग देने पर, हम पाते हैं-

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$

सभी का व्युत्क्रम करने पर, हम पाते हैं-

$$\cos x \angle \frac{\sin x}{x} \angle 1$$

$\Rightarrow$ अर्थात् फलन $\frac{\sin x}{x}$ फलन $\cos x$ और अचर फलन जिसका मान 1 हो जाता है, के बीच में स्थित है।

हम देखते हैं कि $\lim_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1$, अतः

$$\lim_{x\to 0}\cos x \circledS \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \le \lim_{x\to 0} 1$$

$$\Rightarrow 1 \le \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \le 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

अब $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\frac{1}{\cos x} = 1 \times \frac{1}{1} = 1$

तथा $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\sin x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = \frac{1}{1} = 1$$

या, $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{\tan x}{x}\right)} = \frac{1}{1} = 1$

इस प्रकार निम्नलिखित महत्त्वपूर्ण सीमाएँ स्थापित हुई जिनका उपयोग त्रिकोणमितीय फलनों की सीमाओं का परिकलन करने में सुलभ होगा:

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\sec x = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} x\operatorname{cosec} x = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} x\cot x = 1$$

यह ध्यान देने योग्य है कि यहाँ x रेडियन में है। यदि $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^\circ}{x}$ ज्ञात करना हो तो x° को रेडियन में बदलकर ही सीमा ज्ञात की जा सकती है अर्थात्

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^\circ}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{180}}{\frac{\pi x}{180}}\right)\times\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180}$$

यहाँ हमने $x\to 0 \Rightarrow \frac{\pi x}{180}\to 0$

तुल्य तथ्य का प्रयोग किया है।

उदाहरण 1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{px^2+qx+r}{qx^2+rx+p}, p+q+r\neq 0$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:- यहाँ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{px^2+qx+r}{qx^2+rx+p} = \frac{p+q+r}{q+r+p} = 1$

क्योंकि $p+q+r\neq 0$

उदाहरण 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}, b\neq 0$ का मान ज्ञात करें।

हल:- हम देखते हैं कि-

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin ax}{ax}\cdot ax}{bx}$$

$$=\frac{1\times a}{b}=\frac{a}{b}$$

उदाहरण 3. $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^7-1}{x}$ का मान ज्ञात करें।

हल: मान लिया कि $1+x=y$,

तो जब $x\to 0 \Rightarrow y\to 1$ तथा $x=y-1$

अब $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^7-1}{x}=\lim_{y\to 1}\frac{y^7-1^7}{y-1}=7(1)^{7-1}=7$

हम $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^7-1}{x}$ का हल इस प्रकार भी कर सकते हैं।

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^7-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^7-1^7}{x+1-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^7-1^7}{x+1-1}=\lim\frac{y^7-1^7}{y-1}, \text{ जहाँ } y=x+1$$

$$=7.(1)^{7-1}=7.$$

उदाहरण 4. सीमा $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{\cos x-1}$ का परिकलन करें।

हल: $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} 4\cos^2\frac{x}{2} = 4 \times 1 = 4$$

उदाहरण 5. $\lim_{x \to 0}(\operatorname{cosec} x - \cot x)$ का मान ज्ञात कीजिए-

हल: यहाँ, हम देखते हैं कि -

$$\lim_{x \to 0}(\operatorname{cosec} x - \cot x) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x \to 0}\left(\tan\frac{x}{2}\right) = \tan 0 = 0$$

उदाहरण 6. सीमा $\lim_{x \to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:- हम देखते हैं कि-

$$\lim_{x \to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3.\cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{(\tan x).2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{2.\left(\frac{\tan x}{x}\right).x.\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2.\frac{x^2}{4}}{x^3.\cos x}$$

$$= 2 \times 1 \times 1^2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

उदाहरण 7. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}}\frac{\tan 2x}{x - \frac{\pi}{2}}$ का मान निकालें-

हल:- मान लिया कि $x-\frac{\pi}{2}=y$

तो $2x=2\left(\frac{\pi}{2}+y\right)=\pi+2y$

तथा $x\to\frac{\pi}{2}\Rightarrow y\to 0$

उपर्युक्त मान्यता के आधार पर, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan 2x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\tan(\pi+2y)}{y}$

$$=\lim\frac{\tan 2y}{2y}.2=1\times 2=2$$

उदाहरण 8. यदि $a_r=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan r\cdot x}{x}$, तो

$a_1+a_2+a_3+a_4+.....+a_{100}$ का मान ज्ञात करें।

हल:- यहाँ $a_r=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan r\cdot x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan r\cdot x}{r\cdot x}\right)r=1\times r=r$

इस प्रकार

$$a_1+a_2+a_3+a_4+......+a_{100}=1+2+3+4+......+100$$

$$=\frac{100\times 101}{2}=50\times 101$$

$$=5050$$

उदाहरण 9. $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ और $\lim\limits_{x\to 1}g(x)$ ज्ञात कीजिए, यहाँ-

$$g(x)=\begin{Bmatrix}2x+3; x\le 0\\ 3(x+1); x>0\end{Bmatrix}$$

हल:- यहाँ हम देखते हैं कि दिया गया फलन 0 (शून्य) के पड़ोस (*neighbourhood*) में बायीं और दाहिनी ओर अलग-अलग परिभाषित है। इसलिए यहाँ पर हमें- $\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)$ तथा $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$ निकालना पड़ेगा।

$\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=2x+3$ (शून्य तथा शून्य की बायीं ओर $g(x)=2x+3$)

$=2\times 0+3=3$

तथा $\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+} 3(x+1)$ (शून्य के दायीं ओर $g(x)=3(x+1)$)

$=3(0+1)=3$

यहाँ हम देखते हैं कि-

$$\lim_{x\to 0^-} g(x)=3=\lim_{x\to 0^+} g(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} g(x)=3$$

पुनः $\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1} 3(x+1)$ ($\because x=1$ का पड़ोस शून्य के दायीं ओर ही है।)

$=3(1+1)=6$

उदाहरण 10. $\lim_{x\to 0} g(x)$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}; x\neq 0\\ 0; x=0\end{cases}$$

हल: यहाँ $g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}; x\neq 0\\ 0; x=0\end{cases}$

$$=\begin{cases}\dfrac{x}{x}, x>0\\ -\dfrac{x}{x}, x<0\\ 0, x=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x)=\begin{cases}1, x>0\\ -1, x<0\\ 0, x=0\end{cases}$$

हम देखते हैं कि-

$$\lim_{x\to0^-} g(x)=\lim_{h\to0} g(o-h)=\lim_{h\to0} g(-h)$$

$$=\lim_{h\to0}(-1)=-1$$

तथा $$\lim_{x\to0^+} g(x)=\lim_{h\to0} g(o+h)=\lim_{h\to0} g(h)$$

$$=\lim_{h\to0}(1)=1$$

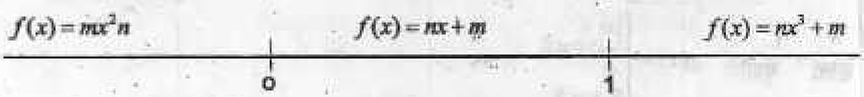
इस प्रकार $\lim_{x\to0^-} g(x)$, $\lim_{x\to0^+} g(h)$

$$\Rightarrow \lim_{h\to0} g(x) \text{ अस्तित्वहीन है।}$$

उदाहरण 11. पूर्णांक m और n को ज्ञात करें जब $\lim_{h\to0} f(x)$ और $\lim_{x\to1} f(x)$ दोनों का अस्तित्व है,

यदि $$f(x)=\begin{cases} mx^2+n, x<0 \\ nx+m, 0\le x\le1 \\ nx^3+m, x>1 \end{cases}$$

हल: संख्या रेखा पर $f(x)$ के मान को दर्शाने पर हम देखते हैं कि



x का मान शून्य से कम है तो $f(x)=mx^2+n$

x का मान शून्य या शून्य से बड़ा और 1 या 1 से कम है, तो $f(x)=nx+m$

और x का मान 1 से बड़ा होने की स्थिति में $f(x)=nx^3+m$.

इस प्रकार $\lim_{x\to o^-} f(x)=\lim_{h\to o} f(o-h)=\lim_{h\to o} m(-h)^2+n=n.$

$$\lim_{x\to o^+} f(x)=\lim_{h\to o} f(o+h)=\lim_{h\to o}(nh+m)=m$$

चूँकि $\lim f(x)$ अस्तित्व में है, अत:

$$\lim_{x\to o^-} f(x)=\lim_{x\to o^+} f(x)$$

$$\Rightarrow n = m$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1-h) = \lim_{h \to 0} m(1-h) + m = n + m$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1+h) = \lim_{h \to 0} n(1+h)^3 + m = n + m$$

अत: $\lim_{x \to 0} f(x)$ के अस्तित्व हेतु $m = n$ अनिवार्य रूप से होना चाहिए; m तथा n के किसी पूर्णांक मान के लिए $\lim_{x \to 1} f(x)$ का अस्तित्व है।

प्रश्नावली–5

प्रश्न 1 से 25 तक निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए:

1. $\lim_{x \to 1} (2014x - 2013)$

2. $\lim_{x \to \pi} \left(x - \frac{22}{7}\right)$

3. $\lim_{x \to \frac{22}{7}} (x - \pi)$

4. $\lim_{x \to 1} \pi r^2$

5. $\lim_{x \to 5} \frac{5x-5}{5-x^2}$

6. $\lim_{x \to -1} \frac{x^{20}+x^{15}+1}{x-1}$

7. $\lim_{x \to 0} \frac{ax+b}{cx-d}, d \neq 0$

8. $\lim_{z \to 1} \frac{z^{\frac{1}{3}}-1}{z^{\frac{1}{6}}-1}$

9. $\lim_{x \to -2} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}{x+2}$

10. $\lim_{x \to 3} \frac{x^4-81}{2x^2-5x-3}$

11. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin px + qx}{px + \sin qx}, p, q, p+q \neq 0$

12. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}, a, b \neq 0$

13. $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\pi - x}$

14. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 7x}$

15. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

16. $\lim_{x \to 1} \frac{x^{15}-1}{x^{10}-1}$

17. $\lim_{x\to1}\left[\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{1}{x^3-3x^2+2x}\right]$ 18. $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x}$

19. $\lim_{x\to2}\left[\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4}\right]$ 20. $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos bx}{x^2}$

21. $\lim_{x\to0}x\left(\frac{\sin px-\sin qx}{\cos px-\cos qx}\right), p\neq q$ 22. $\lim_{x\to0}\frac{\sin px-\sin qx}{x(\cos px+\cos qx)}$

23. $\lim_{x\to0}\frac{\tan5x-\tan3x}{x\cos4x}$ 24. $\lim_{x\to-5}|x|-5$

25. $\lim_{x\to-5}|x-5|$ 26. $\lim_{x\to1}f(x)$, ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, x\le1\\ -x^2-1, x>1\end{cases}$$

27. मान लीजिए $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ अचर वास्तविक संख्याएँ हैं और एक फलन $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)$ से परिभाषित है। $\lim_{x\to a_1}f(x)$ क्या है?

किसी $a\neq a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ के लिए $\lim_{x\to a}f(x)$ का परिकलन कीजिए।

28. मान लीजिए कि $f(x)=\frac{25^x}{25^x+5}$, तो सिद्ध करें कि $f(p)+f(1-p)=1$.

$\lim_{x\to\frac{1}{2015}} f(x) + \lim_{x\to\frac{2014}{2015}} f(x)$ परिकलन कीजिए।

29. मान लीजिए कि $g(x)=\begin{cases}p+qx, x<1\\ 5, x=1\\ q-px, x>1\end{cases}$

और यदि $\lim_{x\to1}g(x)=g(1)$ तो p और q के संभव मान क्या हैं?

30. $\lim_{x\to-2}\sqrt{x^2+12}$ का मान ज्ञात करें।

2.4 अवकलज (Derivatives):

प्रस्तावना:

आप फलन की सीमा के अस्तित्व के संबन्ध में जानकारी प्राप्त कर चुके हैं। अब फलन के प्रांत में बिन्दुओं के परिवर्तन से फलन के मान में होनेवाले परिवर्तन का अध्ययन करेंगे। यहाँ हम जानना चाहते हैं कि एक प्राचाल (Parameter) में दूसरे किसी प्राचल के सापेक्ष परिवर्तन किस प्रकार होता है।

परिभाषा: मान लिया कि f एक वास्तविक मानीय फलन है और इसी परिभाषा के प्रांत (Domain) में एक बिन्दु a है। a पर f का अवकलज

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ से परिभाषित किया जाता है बशर्ते कि इसकी सीमा का अस्तित्व हो।

फलन की सीमा के अस्तित्व से हम जानते हैं कि सीमा के दाएँ और बाएँ पक्ष की सीमाएँ होती हैं।

$$\text{अत:}\quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$$

$$\xrightarrow{x=a-h} \; a \; \xleftarrow{x=a+h}$$

a पर $f(x)$ का अवकलज $f'(a) = \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=a}$ से निरूपित होती है जो a पर x के सापेक्ष परिवर्तन का परिमाण बताता है।

इस प्रकार

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$ को बायाँ पक्ष अवकलज (Left hand derivative)

तथा $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ दायाँ पक्ष अवकलज (Right hand derivative) कहा

जाता है जिसे क्रमशः $Lf'(a)$ तथा $Rf'(a)$ द्वारा निरूपित किया जाता है।

अतः $f'(a) = Lf'(a) = Rf'(a)$

$$\Rightarrow f'(a) = \lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\Rightarrow f'(a) = \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

आइए, $x=3$ पर $f(x)=4x^2$ का अवकलज ज्ञात करते हैं।

हम देखते हैं कि

$$f'(3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4(3+h)^2-4\times 3^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4[9+6h+h^2-9}{h} = \lim_{h\to 0}4(6+h) = 24$$

अतः $x=3$ पर दत्त फलन $4x^2$ का अवकलज 24 है।

उदाहरण 1: फलन $f(x) = x\text{in}x$ का अवकलज $x=Q$ पर ज्ञात कीजिए।

हल: हम पाते हैं कि

$$f'(Q) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{a+h+a}{2}\right)\sin\left(\frac{a+h-a}{2}\right)}{h}$$

[त्रिकोणमिति में रूपान्तरण सूत्र (Transformation formula) से हम जानते हैं कि $\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$]

$$\Rightarrow f'(a) = \lim_{h\to 0}2\cos(a+\frac{h}{2})\cdot\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$= 2\cos a\cdot 1\times\frac{1}{2} = \cos a.$$

$$\Rightarrow f'(a) = \cos a$$

अतः $x = a$ पर फलन $\sin x$ का अवकलज $\cos a$ है।

उदाहरण 2: $f(x) = \frac{1}{x}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: हम पाते हैं

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x - x - h}{h\, x(x+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

उदाहरण 3: $f(x) = \cot x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: हम देखते हैं

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cot(x+h) - \cot x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\cos(x+h)}{\sin(x+h)} - \frac{\cos x}{\sin x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h)\sin x - \sin(x+h)\cos x}{h \sin x \sin(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-\sin(x+h-x)}{h \sin x \sin(x+h)} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin h}{h}\right) \frac{1}{\sin x \sin(x+h)}$$

$$= -1 \times \frac{1}{\sin x \sin x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\cos^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\cot x) = -\cos ec^2 x$$

उदाहरण 4: $f(x) = \cos^2 x$ के अवकलज का परिकलन कीजिए।

हल: हम पाते हैं कि

$$f(x) = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1 + \cos 2(x+h)}{2} - \frac{1 + \cos 2x}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos 2(x+h) - \cos 2x}{2h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{2x+2h+2x}{2}\sin\frac{2x-2x-2h}{2}}{2h}$$

[त्रिकोणमिति के रूपान्तरण सूत्र हम जानते हैं कि

$$\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin(2x+h)\sin(-h)}{2h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \sin(2x+h)(-\frac{\sin h}{h})$$

$$= -\sin 2x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\cos^2 x) = -\sin 2x = -2\sin x \cos x.$$

उदाहरण 5: $f(x) = \sec x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: हम देखते हैं कि

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sec(x+h) - \sec x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x - \cos(x+h)}{h\cos x\cos(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{x+x+h}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{h\cos x\cos(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2\sin(x+\frac{h}{2})\cdot\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}\cdot 2}\right)\cdot\frac{1}{\cos x\cos(x+h)}$$

$$= 2\cdot\sin x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos x\cos(x)}$$

$$= \tan x \sec x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

फलनों के अवकलज का बीजगणित

(Algebra of derivative of functions)

हम फलन की सीमा को जानते हैं तथा अवकलज की परिभाषा में सीमा निश्चय ही सीधे रूप में सम्मिलित है। हम अवकलज के नियमों में सीमा के नियमों की निकटता महसूस करते हुए निम्नलिखित महत्त्वपूर्ण प्रमेयों को स्थापित करने की कोशिश करते हैं-

प्रमेय 1: मानलिया कि f और g दो दिए गए फलन हैं जिनके उभयनिष्ठ प्रांत (Domain) में उनके अवकलन (Differentiation) परिभाषित हैं, तब

(i) दो फलनों के योग का अवकलज उन फलनों के अवकलजों का योग के बराबर होता है अर्थात्

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x))=\frac{d}{dx}(f(x))+\frac{d}{dx(g(x))}$$

हम देखते हैं कि

$$\frac{d}{dx(f(x)+g(x))}=\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)=f'(x)+g'(x)$$

(ii) दो फलनों के अन्तर का अवकलज उन फलनों के अवकलजों का अन्तर होता है अर्थात्

$$\frac{d}{dx}(f(x)-g(x)) =\frac{d}{dx}(f(x))-\frac{d}{dx}(g(x))$$

हम पाते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(f(x)-g(x))=\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

https://www.studiestoday.com

फलनों के अवकलज का बीजगणित

(Algebra of derivative of functions)

हम फलन की सीमा को जानते हैं तथा अवकलज की परिभाषा में सीमा निश्चय ही सीधे रूप में सम्मिलित है। हम अवकलज के नियमों में सीमा के नियमों की निकटता महसूस करते हुए निम्नलिखित महत्त्वपूर्ण प्रमेयों को स्थापित करने की कोशिश करते हैं-

प्रमेय 1: मानलिया कि f और g दो दिए गए फलन हैं जिनके उभयनिष्ठ प्रांत (Domain) में उनके अवकलन (Differentiation) परिभाषित हैं, तब

(i) दो फलनों के योग का अवकलज उन फलनों के अवकलजों का योग के बराबर होता है अर्थात्

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x))=\frac{d}{dx}(f(x))+\frac{d}{dx(g(x))}$$

हम देखते हैं कि

$$\frac{d}{dx(f(x)+g(x))}=\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)=f'(x)+g'(x)$$

(ii) दो फलनों के अन्तर का अवकलज उन फलनों के अवकलजों का अन्तर होता है अर्थात्

$$\frac{d}{dx}(f(x)-g(x)) =\frac{d}{dx}(f(x))-\frac{d}{dx}(g(x))$$

हम पाते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(f(x)-g(x))=\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

https://www.studiestoday.com

$$=\frac{d}{dx}(f(x))-\frac{d}{dx}(g(x))$$

$$=f'(x)-g'(x)$$

(iii) दो फलनों के गुणन का अवकलज उनमें से एक के अवकलज तथा दूसरे फलन का गुणनफल और दूसरे का अवकलज और पहले फलनच के गुणनफल का योगफल होता है अर्थात्

$$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x))\cdot g(x)+f(x)\frac{d}{dx}(g(x))$$

यहाँ हम देखते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x))=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))}{h}g(x+h)+\lim_{h\to 0}f(x)\frac{(g(x+h)-g(x))}{h}$$

$$=\frac{d}{dx}(f(x))\cdot g(x)+f(x)\frac{d}{dx}g(x)=f'(x)g(x)+f(x).g'(x)$$

(iv) दो फलनों के भागफल का अवकलज निम्न नियम द्वारा किया जाता है जहाँ हर शून्येतर है।

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\frac{d}{dx}((f(x))\cdot g(x)-f(x)\frac{d}{dx}(g(x))}{(g(x))^2}$$

आइए, इसे हम देखते हैं

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h\,g(x)g(x+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))g(x)-f(x)(g(x+h)-g(x))}{h\cdot g(x)\cdot g(x+h)}$$

$$=\frac{\lim_{h\to 0}(f(x+h)-f(x))g(x)-gf(x)\lim_{h\to 0}\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)}{\lim_{h\to 0}g(x)\cdot g(x+h)}$$

$$=\frac{\frac{d}{dx}(f(x))g(x)-f(x)\frac{d}{dx}(g(x))}{(g(x))^2}$$

(v) अचल फलन का अवकलज शून्य के बराबर होता है अर्थात्

$$\frac{d}{dx}(c)=0$$

मानलिया कि $f(x)=c$ एक अचल फलन है, तो

$$\frac{d}{dx}(f(x))=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to0}(\frac{0}{h})$$

$$=\lim_{h\to0}(0)=0$$

आइए, हम कुछ मानक फलनों के अवकलजों को निकालें, फलन f TxU= x का अवकलज ज्ञात करते हैं।

परिभाषा से

$$\frac{d}{dx}(f(x))=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{x+h-x}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to0}(1)=1$$

इस अवधारणा का प्रयोग कर हम $f(x)=x^n$ का अवकलज ज्ञात करते हैं। हम देखते हैं कि-

$$\frac{d}{dx}(x^n)=\frac{d}{dx}(x\cdot x^{n-1})=\frac{d}{dx}(x)\cdot x^{n-1}+x\cdot\frac{d}{dx}(x^{n-1}),$$

$=1\cdot x^{n-1}+x\cdot(n-1)x^{n-2}$, आगमन परिकल्पना से

अतः $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$

(ii) अब $f(x)=e^x$ का अवकलज ज्ञात करते हैं।

हम पाते हैं कि

$$\frac{d}{dx}f(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^x\cdot e^h-e^x}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}e^x(\frac{e^h-1}{h})$$

$$=e^x\lim_{h\to0}\frac{1+\frac{h}{1}+\frac{h^2}{1\cdot2}+\frac{h^3}{1\cdot2\cdot3}+\text{.......}-1}{h}$$

(फलन को विस्तार में अनन्त श्रेणी के रूप में

$$e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+.......+\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3....n}+......$$

अभिव्यक्त किया जाता है जिसे हम अगली कक्षा में जान सकेंगे।)

$$= e^x \lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{1\cdot 2}+\frac{h^2}{1\cdot 2\cdot 3}+....\right) = e^x \cdot 1 = e^x.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(e^x) = e^x.$$

(iii) $f(x) = \log_e x$ का अवकलज ज्ञात करते हैं।

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\log\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{h^2}{x^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{h^3}{x^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{h^4}{x^4}+..........}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{x^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{h^2}{x^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{h^3}{x^4}+........\right)$$

$$= \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$$

नोट: फलन $\log(1+x)$ श्रेणी विस्तार के रूप में

$$\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+..........+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}+......$$

लिखा जाता है, जिसके बारे में अगामी कक्षा में हम जान सकेंगे।

आइए, अब कुछ मानक फलनों के अवकलज को सारणी मे लिखते हैं जिसके उपयोग से विभिन्न फलनों के अवकलज ज्ञात किया जा सकता है।

	मानक फलन	अवकलज
(i)	$\sin x$	$\cos x$
	$\cos x$	$-\sin x$

$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\operatorname{cosec}^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cot x$

मानक फलन		अवकलज
(ii)	e^x	e^x
(iii)	$\log_e x$	$\frac{1}{x}$
(iv)	x^n	nx^{n-1}
(v)	अचलफलन	0

उपर्युक्त मानक फलनों के अवकलज को ध्यान में रखकर फलनों के अवकलज का बीजगणितीय सूत्रों द्वारा विभिन्न फलनों का अवकलज हम निकाल सकते हैं।

उदाहरण 1: $\frac{\cos x}{1+\sin x}$ अवकलज ज्ञात करें।

हल: हम देखते हैं कि

फलन $\frac{\cos x}{1+\sin x}$ दो फलनों $\cos x$ और $1+\sin x$ के भाग के रूप में व्यक्त किया है। अत: फलनों के अवकलज नियम के अनुसार

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)=\frac{\frac{d}{dx}(\cos)\cdot(1+\sin x)-\cos x\frac{d}{dx}(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos x\cdot(0+\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}=\frac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$=-\left(\frac{1}{1+\sin x}\right)$$

उदाहरण 2: फलन $f(x)=\frac{x^{100}}{100}+\frac{x^{99}}{99}+\frac{x^{98}}{98}+\ldots\ldots+\frac{x^2}{2}+x+1$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि दो फलनों के योग का अवकलज उन फलनों के अवकलजों का योगफल होता है। अत:

$$\frac{d}{dx}(f(x))=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{100}}{100}+\frac{x^{99}}{99}+\frac{x^{98}}{98}......\frac{x^2}{2}+x+1\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{100}}{100}\right)+\frac{d}{dx}\frac{(x^{99})}{99}+\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{98}}{98}\right)+.....+\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right)+\frac{d}{dx}(x)$$

$$=\frac{100x^{99}}{100}+\frac{99x^{98}}{99}+\frac{98^{97}}{98}+....+\frac{2x}{2}+1$$

$$=1+x+x^2+x^3+....+x^{98}+x^{99},$$

$$=\frac{x^{100}-1}{x-1}$$

उदाहरण 3: फलन $f(x)=\dfrac{px+q}{ax^2+bx+c}$ का अवकलज इसके परिभाषित क्षेत्र में ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया फलन भागफल के रूप में व्यक्त किया गया है। अत: अवकलज के भागफल नियम के प्रयोग करने पर,

$$\frac{d}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{px+q}{ax^2+bx+c}\right)=\frac{\frac{d}{dx}(px+q)\cdot(ax^2+bx+c)-(px+q)\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)}{(ax^2bx+c)^2}$$

$$=\frac{\left(p\frac{dx}{dx}+\frac{d}{dx}(q)\right)\cdot(ax^2bx+c)-(px+q)\left(\frac{dax^2}{dx}+\frac{dbx}{dx}+\frac{dc}{dx}\right)}{(ax^2+bx+c)^2}$$

$$=\frac{(p+o)(ax^2+bx+c)-(px+q)(2ax+b+o)}{(ax^2+bx+c)^2}$$

$$=\frac{(apx^2+bpx+cp)-(2apx^2+bpx+2aqx+bq)}{(ax^2+bx+c)^2}$$

$$=\frac{-apx^2-2aqx+cp-bq}{(ax^2+bx+c)^2}$$

उदाहरण 4: फलन $f(x)=\dfrac{\sin(x+\alpha)}{\cos x}$, जहाँ कहीं भी परिभाषित है, अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: हम देखते हैं कि

$$\text{फलन } f(x)=\frac{\sin(x+\alpha)}{\cos x}=\frac{\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha}{\cos x}$$

$$=\frac{\sin x\cos\alpha}{\cos x}+\frac{\cos x\sin\alpha}{\cos x}$$

$$=\tan x\cos\alpha+\sin\alpha$$

हम फलन $f(x)=\tan x\cos\alpha+\sin\alpha$ पर योग प्रमेय का प्रयोग करने पर पाते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(f(x))=\frac{d}{dx}(\tan x\cos\alpha+\sin\alpha)$$

$$=\frac{d}{dx}(\tan x\cos\alpha)+\frac{d}{dx}(\sin\alpha)$$

$$=\frac{d}{dx}(\tan x)\cdot\cos\alpha+\tan x\cdot\frac{d}{dx}(\cos\alpha)+\frac{d}{dx}(\sin\alpha)$$

$$=\sec^2 x\cos\alpha+\tan x\cdot o+o$$

$$=(\sec^2 x)(\cos\alpha)$$

उदाहरण 5: फलन $f(x)=(x+\sec x)(x-\tan x)$ का अवकलज, फलन के गुणनफल प्रमेय का प्रयोग करने पर

हल: अवकलज के गुणनफल प्रमेय का प्रयोग करने पर,

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\{(x+\sec x)\cdot(x-\tan x)\}$$

$$=\frac{d}{dx}(x+\sec x)\cdot(x-\tan x)+(x+\sec x)\frac{d}{dx}(x-\tan x)$$

$$=\left(\frac{dx}{dx}+\frac{d\sec x}{dx}\right)(x-\tan x)+(x+\sec x)\left(\frac{dx}{dx}-\frac{d\tan x}{dx}\right)$$

$$=(1+\sec x\tan x)(x-\tan x)+(x+\sec x)(1-\sec^2 x)$$

—

प्रश्नावली-6

निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाय कि a,b,c,d,p,q,r निश्चित शून्येतर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं)

1. $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$ 2. $\dfrac{1}{px^2+qx+r}$ 3. $\dfrac{px+q}{ax+b}$

4. $\dfrac{\cos(x+d)}{\sin x}$ 5. $\sin(x+\alpha)\sin(x-\alpha)$ 6. $\tan x\cos x$

7. $\dfrac{\cos x}{xin^2 x}$ 8. $\dfrac{a}{x^4}-\dfrac{b}{x^2}+\tan x$ 9. $(ax+b)^m(cx+d)^n$

10. $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$ 11. $\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}$ 12. $5\sqrt{x}-7$

13. $\cos(x-\frac{\pi}{8})$ 14. $\dfrac{x}{\sin x}$ 15. $\dfrac{4x+5\cos x}{3x+7\sin x}$

16. $(x+\cos x)(x-\tan x)$ 17. $\dfrac{x^3-\cos x}{\sin x}$ 18. $\dfrac{x+\cos x}{\tan x}$

19. $3\cot x+5\cos ecx$ 20. $2\tan s-7\sec x$ 21. $2x-\dfrac{3}{5}$

22. $(5x^3+3x-1)(x^2-1)$ 23. $(ax^2+b)^2$ 24. $(x-p)(x-q)$

25. $\dfrac{x-p}{x-q}$ 26. $5\sec x+4\cos x$ 27. $x^{-4}(5x-3)$

28. $\sin^2 x$ 29. $\cos^2 x$ 30. $\tan^2 x$

31. $\sin(x+a)\cos(x+b)$ 32. $\cos(x+p)\cos(x+q)$ 33. $\dfrac{\tan(x+a)}{\tan(x+b)}$

34. $\sin^n x$ 35. $\dfrac{x}{\sin^n x}$ 36. $x^m \cos^n x$

37. $e^x\cdot\log_e x$ 38. $e^x\cos x$ 39. $e^{-x}\sin x$

40. $e^{ax}\sin bx$ 41. $\dfrac{x}{\log_e x}$ 42. $\dfrac{loo_e x}{e^x}$

43. $x^n\dfrac{1}{x^n}$ 44. $\dfrac{x+\sin x}{\cot x}$ 45. $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{x^2}{3x-1}$

2.5 समाकलन (Integrals)

भूमिका (Introduction):

हम किसी वास्तविक फलन के अवकलज के संबंध में जान चुके हैं, जैसे एक वास्तविक फलन f जो $f(x)=x^3$ से परिभाषित है, तो इसका अवकलज (*derivative*) $f'(x)=3x^2$ होता है। इसी प्रकार $f(x)=\sin x$ है, तो $f'(x)=\cos x$ होता है।

अब प्रश्न उठता है कि जब $f'(x)=3x^2$ या $f'(x)=\cos x$ है, तो क्या हम $f(x)$ के लिए $f'(x)$, x के सापेक्ष अवकलज कहलाता है तो $f(x)$, $f'(x)$ के लिए क्या होगा?

क्या हम $f'(x)=3x^2$ से $f(x)=x^3$. ज्ञात कर सकते हैं? $f'(x)=\cos x$ से $f(x)=\sin x$ प्राप्त कर सकते हैं?

हाँ, तो वैसी प्रक्रिया जिससे यदि एक फलन f किसी अंतराल में अवकलनीय अर्थात् $f'(x)$ उस अन्तराल के प्रत्येक बिन्दु पर अस्तित्व में है, तो फलन $f(x)$, फलन $f'(x)$ का प्रति अवकलज (*Anti derivative*) कहलाता है। जहाँ $f'(x)$, $f(x)$ का अवकलज (*derivative*) है।

वह विधि जिससे किसी फलन का प्रतिअवकलज ज्ञात किया जाता है, उसे हम समाकलन (Integration) कहते हैं।

इस अध्याय में हम समाकलन की संक्षिप्त जानकारी प्राप्त करेंगे। विस्तृत जानकारी हम अगली कक्षा में लेंगे। समाकलन का उपयोग निश्चित फलन के आलेख से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने में किया जाता है।

समाकलन या प्रति-अवकलन ज्ञात करने की विधि:

ऊपर हम देख चुके हैं कि किसी फलन का अवकलज ज्ञात रहने पर उस फलन को ज्ञात करने की विधि (Process) समाकलन या प्रति-अवकलन कहलाता है।

हम जानते हैं कि फलन $\sin x$ का अवकलज $\cos x$ है, तो $\cos x$ का समाकलन या प्रति-अवकलज $\sin x$ है।

इसी प्रकार,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}\right)=x^3$$

$$\frac{d}{dx}(\log_e x)=\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=sec^2x$$

$$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$$

में हम कह सकते हैं कि फलनों $\frac{x^4}{4}, log_e x, \tan x$ और e^x का अवकलज क्रमश: x^3, $\frac{1}{x}$, $\sec^2 x$ और e^x का समाकलज (प्रति-अवकलज) क्रमश: $\frac{x^4}{4}, \log_e x, \tan x$ और e^x है।

अत: अवकलन के व्युत्क्रम प्रक्रम को समाकलन कहते हैं (Integration is the inverse process of differentiation) ।

हम जानते हैं कि किसी भी वास्तविक संख्या c, जिसे अचर फलन (constant function) माना जाता है, का अवकलज शून्य होता है, इसलिए उपर्युक्त अवकलन समीकरणों को भिन्न रूप में लिखा जा सकता है-

$\frac{d}{dx}(\sin x+c)=\cos x \Rightarrow \cos x$ का समाकलज $\sin x+c$ है।

$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}+c\right)=x^3 \Rightarrow x^3$ का समाकलज $\frac{x^4}{4}+c$ है।

$\frac{d}{dx}(\log_e x+c)=\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x}$ का प्रतिअवकलज $\log_e x+c$ है।

$\frac{d}{dx}(\tan x+c)=\sec^2 x \Rightarrow sec^2x$ का प्रतिअवकलज $\tan x+c$ है।

$\frac{d}{dx}(e^x+c)=e^x \Rightarrow e^x$ का प्रतिअवकलज e^x+c है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि उपर्युक्त फलनों के समाकलन या प्रतिअवकलज अद्वितीय नहीं है अर्थात् $\cos x$ का प्रतिअवकलज $\sin x, \sin x+1, \sin x+2, \sin x+3, \sin x$

$+\frac{1}{4}, \sin x-6,$ ....कुछ भी हो सकता है।

अत: हम कह सकते हैं कि $\cos x$ का प्रतिअवकलज $\sin x+C$ जहाँ C एक स्वेच्छ अचर है। व्यापक रूप में हम कह सकते हैं कि यदि एक फलन f ऐसा है कि-

$\frac{d}{dx}f(x)=g(x)$, जहाँ $x \in I$ (वास्तविक संख्याओं का अन्तराल)

तो प्रत्येक स्वेच्छ अचर C के लिए

$$\frac{d}{dx}(f(x)+C)=g(x),\ x \in I$$

इस प्रकार $\{f(x)+C, C \in R\}$, g के प्रति अवकलजों के परिवार को व्यक्त करता है जहाँ C समाकलन का अचर कहलाता है। संकेत में इसे हम निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं:-

$$\frac{d}{dx}(f(x)+C)=g(x) \Leftrightarrow \int g(x)dx=f(x)+C$$

जहाँ $\int g(x)dx$ का अर्थ $g(x)$ का x के सापेक्ष समाकलन है तथा $\int g(x)dx$ में $g(x)$ को समाकल्य कहते हैं।

फलनों के प्रमाणिक समाकलन (प्रतिअवकलज):

हम प्रमुख फलनों के अवकलजों के सूत्र जानते हैं। इन सूत्रों के संगत समाकलन के प्रमाणिक सूत्रों को लिखा जा सकता है जिसकी सहायता से दूसरे फलनों के समाकलनों को ज्ञात करने में मदद मिलेगी।

अवकलज (Derivatives)	समाकलन (प्रतिअवकलज): Integrals(Antiderivatives)
(i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+c\right)=x^n$	$\Rightarrow \int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c, n \neq -1$
(ii) $\frac{d}{dx}(x+c)=1$	$\Rightarrow \int dx=x+c$
(iii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a}+c\right)=(ax+b)^n$	$\Rightarrow \int (ax+b)^n dx=\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)\cdot a}+c, n \neq -1$
(iv) $\frac{d}{dx}(\sin x+c)=\cos x$	$\Rightarrow \int \cos x=\sin x+c$

(v) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(ax+b)}{a}+c\right)=\cos(ax+b) \Rightarrow \int\cos(ax+b)dx=\frac{\sin(ax+b)}{a}+c$

(vi) $\frac{d}{dx}(-\cos x+c)=\sin x \quad \Rightarrow \int\sin dx=-\cos x+c$

(vii) $\frac{d}{dx}-\frac{\cos(ax+b)}{a}+c=\sin(ax+b) \Rightarrow \int\sin(ax+b)dx=-\frac{\cos(ax+b)}{a}+c, a\neq 0$

(viii) $\frac{d}{dx}(\tan x+c)=\sec^2 x \quad \Rightarrow \int\sec^2 x dx=\tan x+c$

(ix) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\tan(ax+b)}{a}+c\right)=\sec^2(ax+b) \Rightarrow \int\sec^2(ax+b)dx=\frac{\tan(ax+b)}{a}+c, a\neq 0$

(x) $\frac{d}{dx}(-\cot x+c)=\cos ec^2 x \Rightarrow \int\cos ec^2 x\, dx=-\cot x+c$

(xi) $\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cot(ax+b)}{a}+c\right)=\cos ec^2(ax+b)$

$$\Rightarrow \int\cos ec^2(ax+b)dx=-\frac{\cot(ax+b)}{a}+c, a\neq 0$$

(xii) $\frac{d}{dx}(\sec x+c)=\sec x\tan x \Rightarrow \int\sec x\tan x\, dx=\sec x+c$

(xiii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sec(ax+b)}{a}+c\right)=\sec(ax+b)\tan(ax+b)$

$$\Rightarrow \int\sec(ax+b)\tan(ax+b)x=\frac{\sec(ax+b)}{a}+c, a\neq 0$$

(xiv) $\frac{d}{dx}(-\cos ecx+c)=\cos ec\, x\cot x \Rightarrow \int\cot x\,\cos ec\, x\, dx=-\cos ec\, x+c$

(xv) $\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos ec(ax+b)}{a}+c\right)=\cos ec(ax+b)\cot(ax+b)$

$$\Rightarrow \int\cos ec(ax+b)\cot(ax+b)\cdot dx=\frac{-\cos ec(ax+b)}{a}+c, a\neq 0$$

(xvi) $\frac{d}{dx}(e^x+c)=e^x \quad \Rightarrow \int e^x dx=e^x+c$

(xvii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{ax+b}}{a}+c\right)=e^{ax+b} \quad \Rightarrow \int e^{ax+b}dx=\frac{e^{ax+b}}{a}+c$

(xviii) $\frac{d}{dx}(\log_e|x|+c)=\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \int\frac{1}{x}dx=\log_e|x|+c$

(xix) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\log_e|ax+b|}{a}+c\right)=\frac{1}{(ax+b)} \Rightarrow \int\frac{1}{(ax+b)}dx=\frac{1}{a}\log_e(|ax+b|)+c, a\neq 0$

(xx) $\frac{d}{dx}\left(\frac{5^x}{\log_e 5}+c\right)=5^x \qquad \Rightarrow \int 5^x dx=\frac{5^x}{\log_e^5}+c$

(xxi) $\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log_e a}+c\right)=a^x \qquad \Rightarrow \int a^x dx=\frac{a^x}{\log_e a}+c, a>0, a\neq 1$

उपर्युक्त सूत्रों में उस अन्तराल का जिक्र नहीं किया गया है जिसमें विभिन्न फलन परिभाषित हैं परन्तु किसी भी विशिष्ट फलन के संदर्भ में इसे ध्यान में रखना आवश्यक होगा।

समाकलनों के कुछ गुणधर्म (Some properties of integrals):

हम समाकलन के कुछ गुणधर्मों को जानेंगे जिसके आधार पर समाकलन के प्रक्रम को अपनायेंगे।

(i) $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=f(x)$

और $\int f'(x)dx=f(x)+c$, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(ii) $\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

(iii) किसी वास्तविक संख्या k के लिए $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$

उदाहरण 1: निरीक्षण विधि का उपयोग करते हुए निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए।

(i) $\int x^4 dx$

(ii) $\int(3x^2+4x^3)dx$

(iii) $\int \sec^2 2x\, dx$

(iv) $\int \sin 3x\, dx$

(v) $\int e^{2x-5}dx$

हल: (i) हम एक ऐसे फलन की खोज करना चाहते हैं जिसका अवकलज x^4 है।

हम जानते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(x^5)=5x^4$$

अर्थात $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{5}x^5\right)=x^4$

$\Rightarrow$ फलन $\frac{x^5}{5}$ का अवकलज x^4, अत: x^4 का

प्रतिअवकलज $\frac{x^5}{5}+c$ है।

$\Rightarrow \int x^4 dx = \frac{x^5}{5}+c$

(ii) हमें एक ऐसे फलन की खोज करना चाहते हैं जिसका अवकलज $3x^2+4x^3$ है।

हम देखते है कि–

$$\frac{d}{dx}(x^3+x^4)=3x^2+4x^3$$

अर्थात् फलन x^3+x^4 का अवकलज $3x^2+4x^3$ है इसलिए फलन $3x^2+4x^3$ का प्रतिअवकलज x^3+x^4+c है जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

$\Rightarrow \int(3x^2+4x^3)dx = x^3+x^4+c$

(iii) हम एक ऐसे फलन की खोज करना चाहते हैं जिसका अवकलज $\sec^2 2x$ है।

हम जानते हैं कि–

$$\frac{d}{dx}(\tan 2x)=2\sec^2 2x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\tan 2x\right)=\sec^2 2x$$

इसलिए $\sec^2 2x$ का प्रतिअवकलज $\frac{1}{2}\tan 2x$ है अर्थात्

$$\int \sec^2 2x\, dx = \frac{1}{2}\tan 2x + c$$

(iv) हम एक ऐसे फलन की खोज करना चाहते हैं जिसका अवकलज $\sin 3x$ है।

हम जानते हैं कि–

$$\frac{d}{dx}(\cos 3x) = -3\sin 3x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right) = \sin 3x$$

अर्थात् फलन $-\frac{\cos 3x}{3}$ का अवकलज $\sin 3x$ है।

इसलिए फलन $\sin 3x$ का प्रतिअवकलज $-\frac{\cos 3x}{3}$ है।

$$\Rightarrow \int \sin 3x\, dx = -\frac{\cos 3x}{3} + c$$

(v) हम एक ऐसे फलन की खोज करना चाहते हैं जिसका अवकल e^{3x-5} है।

हम जानते हैं कि-

$$\frac{d}{dx}\left(e^{3x-5}\right) = 3e^{3x-5}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}\cdot e^{3x-5}\right) = e^{3x-5}$$

अर्थात् फलन $\frac{e^{3x-5}}{3}$ का अवकलज e^{3x-5} होगा।

$$\Rightarrow \int e^{3x-5} dx = \frac{e^{3x-5}}{3} + c.$$

उदाहरण 2: निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए।

(i) $\int \frac{x^4+1}{x^3} dx$

(ii) $\int (x^{\frac{1}{4}}+1) dx$

(iii) $\int (x^{\frac{2}{3}} + 2e^x - \frac{1}{x}) \cdot dx$

(iv) $\int x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right) dx$

(v) $\int (ax^2+bx+c) dx$

हल: (i) हम देखते हैं कि

$$\frac{x^4+1}{x^3} = \frac{x^4}{x^3} + \frac{1}{x^3} = x + x^{-3}$$

इसलिए $\int \frac{x^4+1}{x^3}dx = \int x dx + \int x^{-3} dx$

$$= \frac{x^{1+1}}{1+1} + \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2} + c$$

जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(ii) $\int \left(x^{\frac{1}{4}} + 1\right)dx = \int x^{\frac{1}{4}} dx + dx$

$$= \frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + x + c$$

$= \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + x + c$, जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(iii) $\int \left(x^{\frac{2}{3}} + 2e^x - \frac{1}{x}\right)dx$

$$= \int x^{\frac{2}{3}} dx + \int 2e^x dx - \int \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + 2e^x - \log_e|x| + c$$

$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{3}} + 2e^x - \log_e|x| + c$, जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(iv) हम देखते हैं कि

$$x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = x^2 - 1$$

$$\Rightarrow \int x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dx = \int (x^2 - 1)dx$$

$$= \int x^2 dx - \int dx$$

$= \frac{x^3}{3} - x + c$, जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(v) $\int(ax^2+bx+c)dx$

$$=\int ax^2dx+bx\,dx+\int c\,dx$$

$$=\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx+k,$$ जहाँ k एक समाकलन अचर है।

उदाहरण 3: निम्नलिखित फलनों के प्रति अवकलज ज्ञात कीजिए।

(i) $(2x^2-3\sin x+5\sqrt{x})$

(ii) $\sec x(\sec x+\tan x)$

(iii) $\dfrac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x}$

(iv) $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

(v) $\sqrt{1+\sin 2x}$

हल: (i) यहाँ हमें फलन $2x^2-3\sin x+5\sqrt{x}$ का प्रति–अवकलज फलन ज्ञात करना है अर्थात् $\int(2x^2-3\sin x+5\sqrt{x})dx$ ज्ञात करना है।

समाकलन के गुण–धर्म से

$$\int(2x^2-3\sin x+5\sqrt{x})dx=2\int x^2dx-3\int\sin x\,dx+\int 5x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=2\frac{x^{2+1}}{2+1}-3(-\cos x)+5\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c$$

$$=\frac{2}{3}x^3+3\cos x+\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}+c,$$

जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(ii) हम देखते हैं कि

$$\sec x(\sec x+\tan x)=\sec^2 x+\sec x\tan x$$

$$\Rightarrow\int\sec x(\sec x+\tan x)=\int(\sec^2 x+\sec x\tan x)dx$$

$$=\int\sec^2 x\,dx+\int\sec x\tan x\,dx$$

$$=\tan x+\sec x+c,$$ जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(iii) हम देखते हैं कि

$$\frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$$

$$= \sec^2 x - 1 \qquad (\sec^2 x - \tan^2 x = 1)$$

इस प्रकार $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x} dx = \int (\sec^2 x - 1) \cdot dx = \int \sec^2 x \cdot dx - \int dx$

$= \tan x - x + c$, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(iv) हम देखते हैं कि

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} = \frac{x^3 - x^2}{x - 1} + \frac{x - 1}{x - 1}$$

$$= \frac{x^2(x-1)}{(x-1)} + 1 = x^2 + 1$$

अब $\int \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} dx = \int (x^2 + 1) dx$

$$= \int x^2 dx + \int dx$$

$$= \frac{x^{2+1}}{2+1} + x + c$$

$= \frac{x^3}{3} + x + c$, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(v) हम देखते हैं कि

$$1 + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x$$

$$= (\sin x + \cos x)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + \sin 2x} = \cos x + \sin x$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1 + \sin 2x} \cdot dx = (\cos x + \sin x) dx$$

$$= \int \cos x \, dx + \int \sin x \, dx$$

$= \sin x - \cos x + c$, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

प्रश्नावली-7

निम्नलिखित फलनों के प्रति अवकलज (समाकलन) ज्ञात कीजिए:

1. $\cos 3x$ 2. e^{3x} 3. $(px-q)^2$

4. $\sec^2 3x$ 5. $\sin 2x - 3e^{3x}$ 6. $\sec 2x \tan 2x$

7. $x - \frac{1}{x}$ 8. $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ 9. $x^2 - x + 2$

10. $(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2$

निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए:

11. $\int (1-x)\sqrt{x}\,dx$ 12. $\int (2x - 3\sin x + e^x)dx$

13. $\int \sqrt{x}(3x^2 + x - 5)dx$ 14. $\int (x + \frac{1}{x})^3 dx$ 15. $\int \frac{3 - 2\sin x}{\cos^2 x} dx$

16. $\int (4x^3 - \frac{3}{x^4})dx$ 17. $\int (5^x - 6^x)dx$ 18. $\int \left(\frac{x^3+1}{x+1}\right)dx$

19. $\int \frac{5^{2x} + 2\cdot 15^x + 3^{2x}}{3^x + 5^x} dx$ 20. $\int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1} dx$ 21. $\int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - x + 1} dx$

22. $\int \cot^2 x\, dx$ 23. $\int (\sin x \cos 3x)dx$ 24. $\int (\sin 3x \cos 2x)dx$

25. $\int \frac{(1 + \sin 2x)}{\sin x + \cos x} dx$ 26. $\int \left(\frac{1 - \sin 2x}{\cos x - \sin x}\right)dx$ 27. $\int \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} dx$

28. $\int \frac{x^6 - 1}{x^2 - 1} dx$ 29. $\int \frac{x^3 + \frac{1}{x^3}}{x + \frac{1}{x}} dx$ 30. $\int \left(e^{2x} + 5^x - \frac{1}{x}\right)dx$

अब तक हमलोग प्रमाणिक रूप में व्यक्त फलनों के प्रति-अवकलज (समाकलन) निरीक्षण द्वारा निकाल चुके हैं। अब हमलोग कुछ वैसे फलन जो प्रमाणिक रूप में नहीं दिखते हैं परन्तु प्रतिस्थापन या आंशिक भिन्नों में वियोजन द्वारा फलन को प्रमाणिक रूप में परिवर्तित किया जा सकता है, का समाकलन ज्ञात करते हैं जैसे $\int \tan^2 x\, dx$ ज्ञात करने में

हम देख [illegible] $\tan^2 x$ को $\sec^2 x - 1$ में रूपान्तरित करने पर फलन का प्रमाणिक स्वरूप में होने के कारण समाकलन $\tan x - x$ होगा अर्थात्

$$\int \tan^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)dx = \int \sec^2 x dx - \int dx$$

$$= \tan x - x + c, \text{ जहाँ } c \text{ एक स्वेच्छ अचर है।}$$

आइए एक और फलन के समाकलन पर विचार करते हैं-

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

यहाँ $\sqrt{x} = t$ लें तो,

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt$$

इसप्रकार $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \cos t \cdot 2dt$

$$= 2\int \cos t\,dt$$

$$= 2\sin t + c$$

$$= 2\sin\sqrt{x} + c, \text{ जहाँ } c \text{ समाकलन अचर है।}$$

उपर्युक्त उदाहरण में हम देखते हैं कि फलन $\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ प्रमाणिक रूप में नहीं व्यक्त है जिससे हम इसका प्रतिअवकलज निरीक्षण द्वारा लिख सकते हैं परन्तु प्रतिस्थापन $(\sqrt{x} = t)$ के द्वारा इसे प्रमाणिक रूप $\int 2\cos t$ में व्यक्त किया गया जहाँ से निरीक्षण द्वारा हम इसका प्रति–अवकलज $2\sin t = 2\sin\sqrt{x}$ लिखते हैं।

अब हम प्रतिस्थापन विधि द्वारा समाकलन पर विचार करेंगे। प्रतिस्थापन द्वारा हम ऐसे फलन के लिए प्रतिस्थापन करते हैं जिसका अवकलज भी समाकल्य में सम्मिलित हों जैसा कि निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया गया है-

उदाहरण 4: निम्नलिखित फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

(i) $x^3 \sin(x^4 + 5)$

(ii) $x \sec x^2 \tan x^2$

(iii) $\tan x$

(iv) $\cot x$

उदाहरण 5: निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए-

(i) $\int \cos^3 x \sin^2 x\, dx$

(ii) $\int \frac{1}{1+\tan x} dx$

(iii) $\int \frac{x}{e^{x^2}} dx$

(iv) $\int \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}} dx$

(v) $\int \frac{1}{x+x\log x} dx$

हल:

(i) हम देखते हैं कि

$$\int \cos^3 \sin^2 dx$$

$$= \int \cos^2 x \sin^2 x \cos x\, dx \qquad (\sin x = z \text{ रखने पर } \cos x\, dx = dz)$$

$$= \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\, dx$$

$$= \int z^2(1-z^2)dz$$

$$= \int (z^2 - z^4)dz = \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} + c$$

$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c$, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(ii) $$\int \frac{1}{1+\tan x} dx = \int \frac{1}{1+\frac{\sin x}{\cos x}} = \int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2\cos x}{\cos x + \sin x} dx = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x + \sin x + \cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x} dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int t \cdot dt$$

(माना कि $\cos x + \sin x = t$

$\Rightarrow (\cos x - \sin x)dx = dt$)

(v) sec x

हल:

(i) मान लिया कि $x^4+5=t$

तो $4x^3dx=dt$

$$x^3dx=\frac{1}{4}dt$$

इसप्रकार $\int x^3\sin(x^4+5)dx=\int\sin t\cdot\frac{1}{4}dt$

$$=\frac{1}{4}\int\sin t\,dt$$

$$=\frac{1}{4}(-\cos t)+c,$$

$$=-\frac{1}{4}\cos(x^4+5)+c,$$

जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(ii) मान लिया कि $x^2=t$

$$\Rightarrow 2xdx=dt$$

$$\Rightarrow xdx=\frac{1}{2}dt$$

$$\int x\sec x^2\tan x^2dx=\int\sec t\tan t\cdot\frac{1}{2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\sec t\tan t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\sec t+c$$

$$=\frac{1}{2}\sec(x^2)+c,$$

जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(iii) मान लिया कि

$$\cos x=t$$

$$\Rightarrow -\sin x\,dx = dt$$

$$\Rightarrow \sin x\,dx = -dt$$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$= \int -\frac{1}{t}dt$$

$$= -\log|t| + c$$

$$= -\log|\cos x| + c$$

$= \log|\sec x| + c$, जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(iv) माना कि $\sin x = z$

$$\cos x\,dx = dz$$

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$= \int \frac{1}{z}dz$$

$$= \log_e|z| + c$$

$= \log_e|\sin x| + c$, जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(v) हम देखते हैं कि

$$\int \sec x\,dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)}dx$$

मान लिया कि

$$\sec x + \tan x = z$$

$$\Rightarrow \sec x \tan x\,dx + \sec^2 x\,dx = dz$$

$$\Rightarrow \sec x(\sec x + \tan x)dx = dz$$

$$= \int \frac{1}{z}dz$$

$$= \log_e|z| + c$$

$= \log_e|(\sec x + \tan x)| + c$, जहाँ c एक समाकलन अचर है।

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\log|t|+c$$

$$=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\log|\cos x+\sin x|+c,$$ जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(iii) दिया गया समाकलन

$$=\int\frac{x}{e^{x^2}}=\int x\cdot e^{-x^2}$$

($-x^2$ को t से प्रतिस्थापित करने पर

$-x^2=t, -2xdx=dt$)

$$\Rightarrow xdx=-\frac{1}{2}dt$$

$$=\int-\frac{1}{2}e^t\,dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int e^t dt=-\frac{1}{2}e^t+c$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-x^2}=\frac{-1}{2e^{x^2}}+c,$$ जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(iv) $e^{2x}+e^{-2x}$ के बदले में z रखने पर

$$e^{2x}+e^{-2x}=z$$

$$\Rightarrow(2e^{2x}-2e^{-2x})dx=dz$$

$$\Rightarrow(e^{2x}-e^{-2x})dx=\frac{1}{2}dz$$

इसप्रकार $\int\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}dx=\int\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}dz$

$$=\frac{1}{2}\log|z|+c$$

$$=\frac{1}{2}\log_e|e^{2x}+e^{-2x}+c|$$

जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(v) $1+\log x$ के बदले में z रखने पर

$$1 + \log x = z$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} dx = dz$$

इस प्रकार $\int \frac{1}{x + x\log x} dx = \int \frac{1}{x(1+\log x)} dx = \int \frac{1}{z} dz = \log|z| + c$

$= \log_e |1 + \log x| + c$, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

प्रश्नावली-8

निम्नलिखित फलनों का समाकलन ज्ञात कीजिए।

1. $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x} dx$
2. $\int \frac{1+\cos x}{1-\cos x} dx$
3. $\int \frac{x}{x^2+a^2} dx$
4. $\int \frac{x}{x^2-a^2} dx$
5. $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx$
6. $\int \frac{1}{x^2+2x-1} dx$
7. $\int \sin^2(2x+5) dx$
8. $\int \cos^2(3x+5) \cdot dx$
9. $\int \cos 2x \cos 4x \cos 6x \, dx$
10. $\int \tan 2x \tan 3x \tan 5x \, dx$
11. $\int \frac{\sin x}{\sin(x+5)} dx$
12. $\int \frac{5^x \log 5 + 5x^4}{5^x + x^5} dx$
13. $\int \sin^3 x \, dx$
14. $\int \cos^3 x \, dx$
15. $\int \frac{(\log x + 1)^2}{x} dx$
16. $\int \frac{x^2}{x^6 - 9}$
17. $\int \frac{1}{9x^2+6x-3} dx$
18. $\int \frac{1}{e^x + 1} dx$
19. $\int \frac{1}{(x-1)(x+2)} dx$
20. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$

फलनों के अवकलज का बीजगणित

(Algebra of derivative of functions)

हम फलन की सीमा को जानते हैं तथा अवकलज की परिभाषा में सीमा निश्चय ही सीधे रूप में सम्मिलित है। हम अवकलज के नियमों में सीमा के नियमों की निकटता महसूस करते हुए निम्नलिखित महत्त्वपूर्ण प्रमेयों को स्थापित करने की कोशिश करते हैं-

प्रमेय 1: मानलिया कि f और g दो दिए गए फलन हैं जिनके उभयनिष्ठ प्रांत (Domain) में उनके अवकलन (Differentiation) परिभाषित हैं, तब

(i) दो फलनों के योग का अवकलज उन फलनों के अवकलजों का योग के बराबर होता है अर्थात्

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x))=\frac{d}{dx}(f(x))+\frac{d}{dx(g(x))}$$

हम देखते हैं कि

$$\frac{d}{dx(f(x)+g(x))}=\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)=f'(x)+g'(x)$$

(ii) दो फलनों के अन्तर का अवकलज उन फलनों के अवकलजों का अन्तर होता है अर्थात्

$$\frac{d}{dx}(f(x)-g(x))=\frac{d}{dx}(f(x))-\frac{d}{dx}(g(x))$$

हम पाते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(f(x)-g(x))=\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \frac{d}{dx}(f(x)) - \frac{d}{dx}(g(x))$$
$$= f'(x) - g'(x)$$

(iii) दो फलनों के गुणन का अवकलज उनमें से एक के अवकलज तथा दूसरे फलन का गुणनफल और दूसरे का अवकलज और पहले फलन के गुणनफल का योगफल होता है अर्थात्

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) \cdot g(x) + f(x)\frac{d}{dx}(g(x))$$

यहाँ हम देखते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))}{h} g(x+h) + \lim_{h \to 0} f(x) \frac{(g(x+h) - g(x))}{h}$$

$$= \frac{d}{dx}(f(x)) \cdot g(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x) = f'(x)g(x) + f(x).g'(x)$$

(iv) दो फलनों के भागफल का अवकलज निम्न नियम द्वारा किया जाता है जहाँ हर शून्येतर है।

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\frac{d}{dx}((f(x)) \cdot g(x) - f(x)\frac{d}{dx}(g(x))}{(g(x))^2}$$

आइए, इसे हम देखते हैं

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\, g(x)g(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x) - f(x)(g(x+h) - g(x))}{h \cdot g(x) \cdot g(x+h)}$$

$$= \frac{\lim_{h \to 0}(f(x+h) - f(x))g(x) - gf(x)\lim_{h \to 0}\left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right)}{\lim_{h \to 0} g(x) \cdot g(x+h)}$$

$$= \frac{\frac{d}{dx}(f(x))g(x) - f(x)\frac{d}{dx}(g(x))}{(g(x))^2}$$

(v) अचल फलन का अवकलज शून्य के बराबर होता है अर्थात्

$$\frac{d}{dx}(c)=0$$

मानलिया कि $f(x)=c$ एक अचल फलन है, तो

$$\frac{d}{dx}(f(x))=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to0}(\frac{0}{h})$$

$$=\lim_{h\to0}(0)=0$$

आइए, हम कुछ मानक फलनों के अवकलजों को निकालें, फलन f IxU= x का अवकलज ज्ञात करते हैं।

परिभाषा से

$$\frac{d}{dx}(f(x))=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{x+h-x}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to0}(1)=1$$

इस अवधारणा का प्रयोग कर हम $f(x)=x^n$ का अवकलज ज्ञात करते हैं। हम देखते हैं कि-

$$\frac{d}{dx}(x^n)=\frac{d}{dx}(x\cdot x^{n-1})=\frac{d}{dx}(x)\cdot x^{n-1}+x\cdot\frac{d}{dx}(x^{n-1}),$$

$$=1\cdot x^{n-1}+x\cdot(n-1)x^{n-2}$$, आगमन परिकल्पना से

अतः $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$

(ii) अब $f(x)=e^x$ का अवकलज ज्ञात करते हैं।

हम पाते हैं कि

$$\frac{d}{dx}f(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^x\cdot e^h-e^x}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}e^x(\frac{e^h-1}{h})$$

$$=e^x\lim_{h\to0}\frac{1+\frac{h}{1}+\frac{h^2}{1\cdot2}+\frac{h^3}{1\cdot2\cdot3}+\dots\dots-1}{h}$$

(फलन को विस्तार में अनन्त श्रेणी के रूप में

$$e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+.......+\frac{x^n}{1\cdot2\cdot3....n}+......$$

अभिव्यक्त किया जाता है जिसे हम अगली कक्षा में जान सकेंगे।)

$$= e^x \lim_{h\to0}\left(1+\frac{h}{1\cdot2}+\frac{h^2}{1\cdot2\cdot3}+....\right)=e^x-1=e^x.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(e^x)=e^x.$$

(iii) $f(x)=\log_e x$ का अवकलज ज्ञात करते हैं।

$$\frac{d}{dx}(f(x))=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\log\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{h^2}{x^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{h^3}{x^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{h^4}{x^4}+..........}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{x^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{h^2}{x^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{h^3}{x^4}+........\right)$$

$$=\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\log_e x)=\frac{1}{x}$$

नोट: फलन $\log(1+x)$ श्रेणी विस्तार के रूप में

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+..........+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}+......$$

लिखा जाता है, जिसके बारे में अगामी कक्षा में हम जान सकेंगे।

आइए, अब कुछ मानक फलनों के अवकलज को सारणी मे लिखते हैं जिसके उपयोग से विभिन्न फलनों के अवकलज ज्ञात किया जा सकता है।

	मानक फलन	अवकलज
(i)	$\sin x$	$\cos x$
	$\cos x$	$-\sin x$

$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\operatorname{cosec}^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cot x$

मानक फलन	अवकलज
(ii) e^x	e^x
(iii) $\log_e x$	$\frac{1}{x}$
(iv) x^n	nx^{n-1}
(v) अचलफलन	0

उपर्युक्त मानक फलनों के अवकलज को ध्यान में रखकर फलनों के अवकलज का बीजगणितीय सूत्रों द्वारा विभिन्न फलनों का अवकलज हम निकाल सकते हैं।

उदाहरण 1: $\frac{\cos x}{1+\sin x}$ अवकलज ज्ञात करें।

हल: हम देखते हैं कि

फलन $\frac{\cos x}{1+\sin x}$ दो फलनों $\cos x$ और $1+\sin x$ के भाग के रूप में व्यक्त किया है। अत: फलनों के अवकलज नियम के अनुसार

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)=\frac{\frac{d}{dx}(\cos)\cdot(1+\sin x)-\cos x\frac{d}{dx}(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos x\cdot(0+\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}=\frac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$=-\left(\frac{1}{1+\sin x}\right)$$

उदाहरण 2: फलन $f(x)=\frac{x^{100}}{100}+\frac{x^{99}}{99}+\frac{x^{98}}{98}+\ldots\ldots+\frac{x^2}{2}+x+1$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि दो फलनों के योग का अवकलज उन फलनों के अवकलजों का योगफल होता है। अत:

$$\frac{d}{dx}(f(x))=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{100}}{100}+\frac{x^{99}}{99}+\frac{x^{98}}{98}......\frac{x^2}{2}+x+1\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{100}}{100}\right)+\frac{d}{dx}\frac{\left(x^{99}\right)}{99}+\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{98}}{98}\right)+.....+\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right)+\frac{d}{dx}(x)$$

$$=\frac{100x^{99}}{100}+\frac{99x^{98}}{99}+\frac{98^{97}}{98}+....+\frac{2x}{2}+1$$

$$=1+x+x^2+x^3+....+x^{98}+x^{99},$$

$$=\frac{x^{100}-1}{x-1}$$

उदाहरण 3: फलन $f(x)=\dfrac{px+q}{ax^2+bx+c}$ का अवकलज इसके परिभाषित क्षेत्र में ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया फलन भागफल के रूप में व्यक्त किया गया है। अत: अवकलज के भागफल नियम के प्रयोग करने पर,

$$\frac{d}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{px+q}{ax^2+bx+c}\right)=\frac{\frac{d}{dx}(px+q)\cdot(ax^2+bx+c)-(px+q)\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)}{(ax^2bx+c)^2}$$

$$=\frac{\left(p\frac{dx}{dx}+\frac{d}{dx}(q)\right)\cdot(ax^2bx+c)-(px+q)\left(\frac{dax^2}{dx}+\frac{dbx}{dx}+\frac{dc}{dx}\right)}{(ax^2+bx+c)^2}$$

$$=\frac{(p+o)(ax^2+bx+c)-(px+q)(2ax+b+o)}{(ax^2+bx+c)^2}$$

$$=\frac{(apx^2+bpx+cp)-(2apx^2+bpx+2aqx+bq)}{(ax^2+bx+c)^2}$$

$$=\frac{-apx^2-2aqx+cp-bq}{(ax^2+bx+c)^2}$$

उदाहरण 4: फलन $f(x)=\dfrac{\sin(x+\alpha)}{\cos x}$, जहाँ कहीं भी परिभाषित है, अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: हम देखते हैं कि

$$\text{फलन } f(x)=\frac{\sin(x+\alpha)}{\cos x}=\frac{\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha}{\cos x}$$

$$=\frac{\sin x\cos\alpha}{\cos x}+\frac{\cos x\sin\alpha}{\cos x}$$

$$=\tan x\cos\alpha+\sin\alpha$$

हम फलन $f(x)=\tan x\cos\alpha+\sin\alpha$ पर योग प्रमेय का प्रयोग करने पर पाते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(f(x))=\frac{d}{dx}(\tan x\cos\alpha+\sin\alpha)$$

$$=\frac{d}{dx}(\tan x\cos\alpha)+\frac{d}{dx}(\sin\alpha)$$

$$=\frac{d}{dx}(\tan x)\cdot\cos\alpha+\tan x\cdot\frac{d}{dx}(\cos\alpha)+\frac{d}{dx}(\sin\alpha)$$

$$=\sec^2 x\cos\alpha+\tan x\cdot o+o$$

$$=(\sec^2 x)(\cos\alpha)$$

उदाहरण 5: फलन $f(x)=(x+\sec x)(x-\tan x)$ का अवकलज, फलन के गुणनफल प्रमेय का प्रयोग करने पर

हल: अवकलज के गुणनफल प्रमेय का प्रयोग करने पर,

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\{(x+\sec x)\cdot(x-\tan x)\}$$

$$=\frac{d}{dx}(x+\sec x)\cdot(x-\tan x)+(x+\sec x)\frac{d}{dx}(x-\tan x)$$

$$=\left(\frac{dx}{dx}+\frac{d\sec x}{dx}\right)(x-\tan x)+(x+\sec x)\left(\frac{dx}{dx}-\frac{d\tan x}{dx}\right)$$

$$=(1+\sec x\tan x)(x-\tan x)+(x+\sec x)(1-\sec^2 x)$$

प्रश्नावली-6

निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाय कि a,b,c,d,p,q,r निश्चित शून्येतर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं)

1. $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$ 2. $\dfrac{1}{px^2+qx+r}$ 3. $\dfrac{px+q}{ax+b}$

4. $\dfrac{\cos(x+d)}{\sin x}$ 5. $\sin(x+\alpha)\sin(x-\alpha)$ 6. $\tan x \cos x$

7. $\dfrac{\cos x}{xin^2 x}$ 8. $\dfrac{a}{x^4}-\dfrac{b}{x^2}+\tan x$ 9. $(ax+b)^m(cx+d)^n$

10. $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$ 11. $\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}$ 12. $5\sqrt{x}-7$

13. $\cos(x-\frac{\pi}{8})$ 14. $\dfrac{x}{\sin x}$ 15. $\dfrac{4x+5\cos x}{3x+7\sin x}$

16. $(x+\cos x)(x-\tan x)$ 17. $\dfrac{x^3-\cos x}{\sin x}$ 18. $\dfrac{x+\cos x}{\tan x}$

19. $3\cot x+5\operatorname{cosec} x$ 20. $2\tan s-7\sec x$ 21. $2x-\dfrac{3}{5}$

22. $(5x^3+3x-1)(x^2-1)$ 23. $(ax^2+b)^2$ 24. $(x-p)(x-q)$

25. $\dfrac{x-p}{x-q}$ 26. $5\sec x+4\cos x$ 27. $x^{-4}(5x-3)$

28. $\sin^2 x$ 29. $\cos^2 x$ 30. $\tan^2 x$

31. $\sin(x+a)\cos(x+b)$ 32. $\cos(x+p)\cos(x+q)$ 33. $\dfrac{\tan(x+a)}{\tan(x+b)}$

34. $\sin^n x$ 35. $\dfrac{x}{\sin^n x}$ 36. $x^m \cos^n x$

37. $e^x \cdot \log_e x$ 38. $e^x \cos x$ 39. $e^{-x}\sin x$

40. $e^{ax}\sin bx$ 41. $\dfrac{x}{\log_e x}$ 42. $\dfrac{loo_e x}{e^x}$

43. $x^n\dfrac{1}{x^n}$ 44. $\dfrac{x+\sin x}{\cot x}$ 45. $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{x^2}{3x-1}$

2.5 समाकलन (Integrals)

भूमिका (Introduction):

हम किसी वास्तविक फलन के अवकलज के संबंध में जान चुके हैं, जैसे एक वास्तविक फलन f जो $f(x)=x^3$ से परिभाषित है, तो इसका अवकलज (*derivative*) $f'(x)=3x^2$ होता है। इसी प्रकार $f(x)=\sin x$ है, तो $f'(x)=\cos x$ होता है।

अब प्रश्न उठता है कि जब $f'(x)=3x^2$ या $f'(x)=\cos x$ है, तो क्या हम $f(x)$ के लिए $f'(x)$, x के सापेक्ष अवकलज कहलाता है तो $f(x)$, $f'(x)$ के लिए क्या होगा?

क्या हम $f'(x)=3x^2$ से $f(x)=x^3$. ज्ञात कर सकते हैं? $f'(x)=\cos x$ से $f(x)=\sin x$ प्राप्त कर सकते हैं?

हाँ, तो वैसी प्रक्रिया जिससे यदि एक फलन f किसी अंतराल में अवकलनीय अर्थात् $f'(x)$ उस अन्तराल के प्रत्येक बिन्दु पर अस्तित्व में है, तो फलन $f(x)$, फलन $f'(x)$ का प्रति अवकलज (*Anti derivative*) कहलाता है। जहाँ $f'(x)$, $f(x)$ का अवकलज (*derivative*) है।

वह विधि जिससे किसी फलन का प्रतिअवकलज ज्ञात किया जाता है, उसे हम समाकलन (Integration) कहते हैं।

इस अध्याय में हम समाकलन की संक्षिप्त जानकारी प्राप्त करेंगे। विस्तृत जानकारी हम अगली कक्षा में लेंगे। समाकलन का उपयोग निश्चित फलन के आलेख से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने में किया जाता है।

समाकलन या प्रति-अवकलन ज्ञात करने की विधि:

ऊपर हम देख चुके हैं कि किसी फलन का अवकलज ज्ञात रहने पर उस फलन को ज्ञात करने की विधि (Process) समाकलन या प्रति-अवकलन कहलाता है।

हम जानते हैं कि फलन $\sin x$ का अवकलज $\cos x$ है, तो $\cos x$ का समाकलन या प्रति-अवकलज $\sin x$ है।

इसी प्रकार,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}\right)=x^3$$

$$\frac{d}{dx}(\log_e x)=\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=sec^2x$$

$$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$$

में हम कह सकते हैं कि फलनों $\frac{x^4}{4}, log_e x, \tan x$ और e^x का अवकलज क्रमश: x^3, $\frac{1}{x}$, $\sec^2 x$ और e^x का समाकलज (प्रति-अवकलज) क्रमश: $\frac{x^4}{4}, \log_e x, \tan x$ और e^x है।

अत: अवकलन के व्युत्क्रम प्रक्रम को समाकलन कहते हैं (Integration is the inverse process of differentiation)।

हम जानते हैं कि किसी भी वास्तविक संख्या c, जिसे अचर फलन (constant function) माना जाता है, का अवकलज शून्य होता है, इसलिए उपर्युक्त अवकलन समीकरणों को भिन्न रूप में लिखा जा सकता है-

$\frac{d}{dx}(\sin x+c)=\cos x \Rightarrow \cos x$ का समाकलज $\sin x+c$ है।

$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}+c\right)=x^3 \Rightarrow x^3$ का समाकलज $\frac{x^4}{4}+c$ है।

$\frac{d}{dx}(\log_e x+c)=\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x}$ का प्रतिअवकलज $\log_e x+c$ है।

$\frac{d}{dx}(\tan x+c)=\sec^2 x \Rightarrow sec^2x$ का प्रतिअवकलज $\tan x+c$ है।

$\frac{d}{dx}(e^x+c)=e^x \Rightarrow e^x$ का प्रतिअवकलज e^x+c है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि उपर्युक्त फलनों के समाकलन या प्रतिअवकलज अद्वितीय नहीं है अर्थात् $\cos x$ का प्रतिअवकलज $\sin x, \sin x+1, \sin x+2, \sin x+3, \sin x$

$+\frac{1}{4}, \sin x-6,$..........कुछ भी हो सकता है।

अत: हम कह सकते हैं कि $\cos x$ का प्रतिअवकलज $\sin x+C$ जहाँ C एक स्वेच्छ अचर है। व्यापक रूप में हम कह सकते हैं कि यदि एक फलन f ऐसा है कि-

$\frac{d}{dx}f(x)=g(x)$, जहाँ $x \in I$ (वास्तविक संख्याओं का अन्तराल)

तो प्रत्येक स्वेच्छ अचर C के लिए

$$\frac{d}{dx}(f(x)+C)=g(x), x \in I$$

इस प्रकार $\{f(x)+C, C \in R\}, g$ के प्रति अवकलजों के परिवार को व्यक्त करता है जहाँ C समाकलन का अचर कहलाता है। संकेत में इसे हम निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं:-

$$\frac{d}{dx}(f(x)+C)=g(x) \Leftrightarrow \int g(x)dx=f(x)+C$$

जहाँ $\int g(x)dx$ का अर्थ $g(x)$ का x के सापेक्ष समाकलन है तथा $\int g(x)dx$ में $g(x)$ को समाकल्य कहते हैं।

फलनों के प्रमाणिक समाकलन (प्रतिअवकलज):

हम प्रमुख फलनों के अवकलजों के सूत्र जानते हैं। इन सूत्रों के संगत समाकलन के प्रमाणिक सूत्रों को लिखा जा सकता है जिसकी सहायता से दूसरे फलनों के समाकलनों को ज्ञात करने में मदद मिलेगी।

अवकलज (Derivatives)	समाकलन (प्रतिअवकलज): Integrals(Antiderivatives)
(i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+c\right)=x^n$	$\Rightarrow \int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c, n \neq -1$
(ii) $\frac{d}{dx}(x+c)=1$	$\Rightarrow \int dx=x+c$
(iii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a}+c\right)=(ax+b)^n$	$\Rightarrow \int (ax+b)^n dx=\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)\cdot a}+c, n \neq -1$
(iv) $\frac{d}{dx}(\sin x+c)=\cos x$	$\Rightarrow \int \cos x=\sin x+c$

(v) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(ax+b)}{a}+c\right)=\cos(ax+b)\Rightarrow\int\cos(ax+b)dx=\frac{\sin(ax+b)}{a}+c$

(vi) $\frac{d}{dx}(-\cos x+c)=\sin x \quad \Rightarrow\int\sin dx=-\cos x+c$

(vii) $\frac{d}{dx}-\frac{\cos(ax+b)}{a}+c=\sin(ax+b)\Rightarrow\int\sin(ax+b)dx=-\frac{\cos(ax+b)}{a}+c,a\neq 0$

(viii) $\frac{d}{dx}(\tan x+c)=\sec^2 x \quad \Rightarrow\int\sec^2 xdx=\tan x+c$

(ix) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\tan(ax+b)}{a}+c\right)=\sec^2(ax+b)\Rightarrow\int\sec^2(ax+b)dx=\frac{\tan(ax+b)}{a}+c,a\neq 0$

(x) $\frac{d}{dx}(-\cot x+c)=\operatorname{cosec}^2 x \Rightarrow\int\operatorname{cosec}^2 x\,dx=-\cot x+c$

(xi) $\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cot(ax+b)}{a}+c\right)=\operatorname{cosec}^2(ax+b)$

$$\Rightarrow\int\operatorname{cosec}^2(ax+b)dx=-\frac{\cot(ax+b)}{a}+c,a\neq 0$$

(xii) $\frac{d}{dx}(\sec x+c)=\sec x\tan x \Rightarrow\int\sec x\tan x\,dx=\sec x+c$

(xiii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sec(ax+b)}{a}+c\right)=\sec(ax+b)\tan(ax+b)$

$$\Rightarrow\int\sec(ax+b)\tan(ax+b)x=\frac{\sec(ax+b)}{a}+c,a\neq 0$$

(xiv) $\frac{d}{dx}(-\operatorname{cosec} x+c)=\operatorname{cosec} x\cot x\Rightarrow\int\cot x\operatorname{cosec} x\,dx=-\operatorname{cosec} x+c$

(xv) $\frac{d}{dx}\left(-\frac{\operatorname{cosec}(ax+b)}{a}+c\right)=\operatorname{cosec}(ax+b)\cot(ax+b)$

$$\Rightarrow\int\operatorname{cosec}(ax+b)\cot(ax+b)\cdot dx=\frac{-\operatorname{cosec}(ax+b)}{a}+c,a\neq 0$$

(xvi) $\frac{d}{dx}(e^x+c)=e^x \quad \Rightarrow\int e^x dx=e^x+c$

(xvii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{ax+b}}{a}+c\right)=e^{ax+b} \quad \Rightarrow\int e^{ax+b}dx=\frac{e^{ax+b}}{a}+c$

(xviii) $\frac{d}{dx}(\log_e|x|+c)=\frac{1}{x} \quad \Rightarrow\int\frac{1}{x}dx=\log_e|x|+c$

(xix) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\log_e|ax+b|}{a}+c\right)=\frac{1}{(ax+b)} \Rightarrow \int\frac{1}{(ax+b)}dx=\frac{1}{a}\log_e(|ax+b|)+c, a\neq 0$

(xx) $\frac{d}{dx}\left(\frac{5^x}{\log_e 5}+c\right)=5^x \qquad \Rightarrow \int 5^x dx=\frac{5^x}{\log_e^5}+c$

(xxi) $\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log_e a}+c\right)=a^x \qquad \Rightarrow \int a^x dx=\frac{a^x}{\log_e a}+c, a>0, a\neq 1$

उपर्युक्त सूत्रों में उस अन्तराल का जिक्र नहीं किया गया है जिसमें विभिन्न फलन परिभाषित हैं परन्तु किसी भी विशिष्ट फलन के संदर्भ में इसे ध्यान में रखना आवश्यक होगा।

समाकलनों के कुछ गुणधर्म (Some properties of integrals):

हम समाकलन के कुछ गुणधर्मों को जानेंगे जिसके आधार पर समाकलन के प्रक्रम को अपनायेंगे।

(i) $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=f(x)$

और $\int f'(x)dx=f(x)+c$, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(ii) $\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

(iii) किसी वास्तविक संख्या k के लिए $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$

उदाहरण 1: निरीक्षण विधि का उपयोग करते हुए निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए।

(i) $\int x^4 dx$

(ii) $\int(3x^2+4x^3)dx$

(iii) $\int \sec^2 2x\,dx$

(iv) $\int \sin 3x\,dx$

(v) $\int e^{2x-5}dx$

हल: (i) हम एक ऐसे फलन की खोज करना चाहते हैं जिसका अवकलज x^4 है।

हम जानते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(x^5)=5x^4$$

अर्थात $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{5}x^5\right)=x^4$

$\Rightarrow$ फलन $\frac{x^5}{5}$ का अवकलज x^4, अतः x^4 का प्रतिअवकलज $\frac{x^5}{5}+c$ है।

$$\Rightarrow \int x^4 dx=\frac{x^5}{5}+c$$

(ii) हमें एक ऐसे फलन की खोज करना चाहते हैं जिसका अवकलज $3x^2+4x^3$ है।

हम देखते है कि-

$$\frac{d}{dx}(x^3+x^4)=3x^2+4x^3$$

अर्थात् फलन x^3+x^4 का अवकलज $3x^2+4x^3$ है इसलिए फलन $3x^2+4x^3$ का प्रतिअवकलज x^3+x^4+c है जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

$$\Rightarrow \int(3x^2+4x^3)dx=x^3+x^4+c$$

(iii) हम एक ऐसे फलन की खोज करना चाहते हैं जिसका अवकलज $\sec^2 2x$ है।

हम जानते हैं कि-

$$\frac{d}{dx}(\tan 2x)=2\sec^2 2x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\tan 2x\right)=\sec^2 2x$$

इसलिए $\sec^2 2x$ का प्रतिअवकलज $\frac{1}{2}\tan 2x$ है अर्थात्

$$\int \sec^2 2x\, dx=\frac{1}{2}\tan 2x+c$$

(iv) हम एक ऐसे फलन की खोज करना चाहते हैं जिसका अवकलज $\sin 3x$ है।

हम जानते हैं कि-

$$\frac{d}{dx}(\cos 3x)=-3\sin 3x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right) = \sin 3x$$

अर्थात् फलन $-\frac{\cos 3x}{3}$ का अवकलज $\sin 3x$ है।

इसलिए फलन $\sin 3x$ का प्रतिअवकलज $-\frac{\cos 3x}{3}$ है।

$$\Rightarrow \int \sin 3x\, dx = -\frac{\cos 3x}{3} + c$$

(v) हम एक ऐसे फलन की खोज करना चाहते हैं जिसका अवकल e^{3x-5} है।

हम जानते हैं कि-

$$\frac{d}{dx}\left(e^{3x-5}\right) = 3e^{3x-5}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}\cdot e^{3x-5}\right) = e^{3x-5}$$

अर्थात् फलन $\frac{e^{3x-5}}{3}$ का अवकलज e^{3x-5} होगा।

$$\Rightarrow \int e^{3x-5}dx = \frac{e^{3x-5}}{3} + c.$$

उदाहरण 2: निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए।

(i) $\int \frac{x^4+1}{x^3}dx$

(ii) $\int (x^{\frac{1}{4}}+1)dx$

(iii) $\int (x^{\frac{2}{3}} + 2e^x - \frac{1}{x})\cdot dx$

(iv) $\int x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$

(v) $\int (ax^2+bx+c)dx$

हल: (i) हम देखते हैं कि

$$\frac{x^4+1}{x^3} = \frac{x^4}{x^3} + \frac{1}{x^3} = x + x^{-3}$$

इसलिए $\int \frac{x^4+1}{x^3}dx = \int x dx + \int x^{-3} dx$

$$= \frac{x^{1+1}}{1+1} + \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2} + c$$

जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(ii) $\int\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)dx = \int x^{\frac{1}{4}}dx + dx$

$$= \frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + x + c$$

$= \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + x + c$, जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(iii) $\int\left(x^{\frac{2}{3}} + 2e^x - \frac{1}{x}\right)dx$

$$= \int x^{\frac{2}{3}}dx + \int 2e^x dx - \int \frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + 2e^x - \log_e|x| + c$$

$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{3}} + 2e^x - \log_e|x| + c$, जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(iv) हम देखते हैं कि

$$x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = x^2 - 1$$

$$\Rightarrow \int x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx = \int (x^2-1)dx$$

$$= \int x^2 dx - \int dx$$

$= \frac{x^3}{3} - x + c$, जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(v) $\int(ax^2+bx+c)dx$

$=\int ax^2dx+bx\,dx+\int c\,dx$

$=\dfrac{ax^3}{3}+\dfrac{bx^2}{2}+cx+k,$ जहाँ k एक समाकलन अचर है।

उदाहरण 3: निम्नलिखित फलनों के प्रति अवकलज ज्ञात कीजिए।

(i) $(2x^2-3\sin x+5\sqrt{x})$

(ii) $\sec x(\sec x+\tan x)$

(iii) $\dfrac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x}$

(iv) $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

(v) $\sqrt{1+\sin 2x}$

हल: (i) यहाँ हमें फलन $2x^2-3\sin x+5\sqrt{x}$ का प्रति–अवकलज फलन ज्ञात करना है अर्थात् $\int(2x^2-3\sin x+5\sqrt{x})dx$ ज्ञात करना है।

समाकलन के गुण–धर्म से

$$\int(2x^2-3\sin x+5\sqrt{x})dx=2\int x^2dx-3\int\sin x\,dx+\int 5x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=2\frac{x^{2+1}}{2+1}-3(-\cos x)+5\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c$$

$$=\frac{2}{3}x^3+3\cos x+\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}+c,$$

जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(ii) हम देखते हैं कि

$\sec x(\sec x+\tan x)=\sec^2 x+\sec x\tan x$

$\Rightarrow\int\sec x(\sec x+\tan x)=\int(\sec^2 x+\sec x\tan x)dx$

$=\int\sec^2 x\,dx+\int\sec x\tan x\,dx$

$=\tan x+\sec x+c,$ जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(iii) हम देखते हैं कि

$$\frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\sin^2 x}}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\tan^2 x$$

$$=\sec^2 x-1 \qquad (\sec^2 x-\tan^2 x=1)$$

इस प्रकार $\int\frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x}dx=\int(\sec^2 x-1)\cdot dx=\int\sec^2 x\cdot dx-\int dx$

$=\tan x-x+c$, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(iv) हम देखते हैं कि

$$\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}=\frac{x^3-x^2}{x-1}+\frac{x-1}{x-1}$$

$$=\frac{x^2(x-1)}{(x-1)}+1=x^2+1$$

अब $\int\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}dx=\int(x^2+1)dx$

$$=\int x^2dx+\int dx$$

$$=\frac{x^{2+1}}{2+1}+x+c$$

$=\frac{x^3}{3}+x+c$, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(v) हम देखते हैं कि

$$1+\sin 2x=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x$$

$$=(\sin x+\cos x)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+\sin 2x}=\cos x+\sin x$$

$$\Rightarrow \int\sqrt{1+\sin 2x}\cdot dx=(\cos x+\sin x)dx$$

$$=\int\cos x\,dx+\int\sin x\,dx$$

$=\sin x-\cos x+c$, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

प्रश्नावली-7

निम्नलिखित फलनों के प्रति अवकलज (समाकलन) ज्ञात कीजिए:

1. $\cos 3x$ 2. e^{3x} 3. $(px-q)^2$

4. $\sec^2 3x$ 5. $\sin 2x - 3e^{5x}$ 6. $\sec 2x \tan 2x$

7. $x - \frac{1}{x}$ 8. $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ 9. $x^2 - x + 2$

10. $(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2$

निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए:

11. $\int(1-x)\sqrt{x}dx$ 12. $\int(2x - 3\sin x + e^x)dx$

13. $\int\sqrt{x}(3x^2 + x - 5)dx$ 14. $\int(x + \frac{1}{x})^3 dx$ 15. $\int\frac{3 - 2\sin x}{\cos^2 x}dx$

16. $\int(4x^3 - \frac{3}{x^4})dx$ 17. $\int(5^x - 6^x)dx$ 18. $\int\left(\frac{x^3+1}{x+1}\right)dx$

19. $\int\frac{5^{2x} + 2\cdot 15^x + 3^{2x}}{3^x + 5^x}dx$ 20. $\int\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1}dx$ 21. $\int\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - x + 1}dx$

22. $\int\cot^2 x\,dx$ 23. $\int(\sin x \cos 3x)dx$ 24. $\int(\sin 3x \cos 2x)dx$

25. $\int\frac{(1 + \sin 2x)}{\sin x + \cos x}dx$ 26. $\int\left(\frac{1 - \sin 2x}{\cos x - \sin x}\right)dx$ 27. $\int\frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}dx$

28. $\int\frac{x^6 - 1}{x^2 - 1}dx$ 29. $\int\frac{x^3 + \frac{1}{x^3}}{x + \frac{1}{x}}dx$ 30. $\int\left(e^{2x} + 5^x - \frac{1}{x}\right)dx$

अब तक हमलोग प्रमाणिक रूप में व्यक्त फलनों के प्रति-अवकलज (समाकलन) निरीक्षण द्वारा निकाल चुके हैं। अब हमलोग कुछ वैसे फलन जो प्रमाणिक रूप में नहीं दिखते हैं परन्तु प्रतिस्थापन या आंशिक भिन्नों में वियोजन द्वारा फलन को प्रमाणिक रूप में परिवर्तित किया जा सकता है, का समाकलन ज्ञात करते हैं जैसे $\int\tan^2 x\,dx$ ज्ञात करने में

हम देख $\tan^2 x$ को $\sec^2 x - 1$ में रूपान्तरित करने पर फलन का प्रमाणिक स्वरूप में होने के कारण समाकलन $\tan x - x$ होगा अर्थात्

$$\int \tan^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)dx = \int \sec^2 x dx - \int dx$$

$$= \tan x - x + c, \text{ जहाँ } c \text{ एक स्वेच्छ अचर है।}$$

आइए एक और फलन के समाकलन पर विचार करते हैं-

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

यहाँ $\sqrt{x} = t$ लें तो,

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt$$

इसप्रकार $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \cos t \cdot 2dt$

$$= 2\int \cos t\,dt$$

$$= 2\sin t + c$$

$$= 2\sin\sqrt{x} + c, \text{ जहाँ } c \text{ समाकलन अचर है।}$$

उपर्युक्त उदाहरण में हम देखते हैं कि फलन $\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ प्रमाणिक रूप में नहीं व्यक्त है जिससे हम इसका प्रतिअवकलज निरीक्षण द्वारा लिख सकते हैं परन्तु प्रतिस्थापन $(\sqrt{x} = t)$ के द्वारा इसे प्रमाणिक रूप $\int 2\cos t$ में व्यक्त किया गया जहाँ से निरीक्षण द्वारा हम इसका प्रति-अवकलज $2\sin t = 2\sin\sqrt{x}$ लिखते हैं।

अब हम प्रतिस्थापन विधि द्वारा समाकलन पर विचार करेंगे। प्रतिस्थापन द्वारा हम ऐसे फलन के लिए प्रतिस्थापन करते हैं जिसका अवकलज भी समाकल्य में सम्मिलित हों जैसा कि निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया गया है-

उदाहरण 4: निम्नलिखित फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

(i) $x^3 \sin(x^4 + 5)$

(ii) $x \sec x^2 \tan x^2$

(iii) $\tan x$

(iv) $\cot x$

उदाहरण 5: निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए–

(i) $\int \cos^3 x \sin^2 x\, dx$

(ii) $\int \frac{1}{1+\tan x} dx$

(iii) $\int \frac{x}{e^{x^2}} dx$

(iv) $\int \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}} dx$

(v) $\int \frac{1}{x+x\log x} dx$

हल:

(i) हम देखते हैं कि

$$\int \cos^3 \sin^2 dx$$

$$=\int \cos^2 x \sin^2 x \cos x\, dx \qquad (\sin x = z \text{ रखने पर } \cos x\, dx = dz)$$

$$=\int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\, dx$$

$$=\int z^2(1-z^2)dz$$

$$=\int (z^2-z^4)dz = \frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{5}+c$$

$=\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+c,$ जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(ii) $$\int \frac{1}{1+\tan x}dx = \int \frac{1}{1+\frac{\sin x}{\cos x}} = \int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{2\cos x}{\cos x+\sin x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x+\sin x+\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\cos x+\sin x}{\cos x+\sin x}dx+\frac{1}{2}\int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int t \cdot dt$$

(माना कि $\cos x+\sin x = t$

$\Rightarrow (\cos x-\sin x)dx = dt$)

(v) $\sec x$

हल:

(i) मान लिया कि $x^4+5=t$

तो $4x^3dx=dt$

$$x^3dx=\frac{1}{4}dt$$

इसप्रकार $\int x^3\sin(x^4+5)dx=\int \sin t\cdot\frac{1}{4}dt$

$$=\frac{1}{4}\int \sin t\,dt$$

$$=\frac{1}{4}(-\cos t)+c,$$

$$=-\frac{1}{4}\cos(x^4+5)+c,$$

जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(ii) मान लिया कि $x^2=t$

$$\Rightarrow 2xdx=dt$$

$$\Rightarrow xdx=\frac{1}{2}dt$$

$$\int x\sec x^2\tan x^2dx=\int \sec t\tan t\cdot\frac{1}{2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int \sec t\tan t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\sec t+c$$

$$=\frac{1}{2}\sec(x^2)+c,$$

जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(iii) मान लिया कि

$$\cos x=t$$

$\Rightarrow -\sin x\,dx = dt$

$\Rightarrow \sin x\,dx = -dt$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$= \int -\frac{1}{t}dt$$

$$= -\log|t| + c$$

$$= -\log|\cos x| + c$$

$= \log|\sec x| + c$, जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(iv) माना कि $\sin x = z$

$\cos x\,dx = dz$

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$= \int \frac{1}{z}dz$$

$$= \log_e|z| + c$$

$= \log_e|\sin x| + c$, जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(v) हम देखते हैं कि

$$\int \sec x\,dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)}dx$$

मान लिया कि

$\sec x + \tan x = z$

$\Rightarrow \sec x \tan x\,dx + \sec^2 x\,dx = dz$

$\Rightarrow \sec x(\sec x + \tan x)dx = dz$

$$= \int \frac{1}{z}dz$$

$$= \log_e|z| + c$$

$= \log_e|(\sec x + \tan x)| + c$, जहाँ c एक समाकलन अचर है।

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\log|t|+c$$

$$=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\log|\cos x+\sin x|+c,$$ जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(iii) दिया गया समाकलन

$$=\int\frac{x}{e^{x^2}}=\int x\cdot e^{-x^2}$$

($-x^2$ को t से प्रतिस्थापित करने पर

$-x^2=t, -2xdx=dt$)

$$\Rightarrow xdx=-\frac{1}{2}dt$$

$$=\int-\frac{1}{2}e^t\,dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int e^t dt=-\frac{1}{2}e^t+c$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-x^2}=\frac{-1}{2e^{x^2}}+c,$$ जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(iv) $e^{2x}+e^{-2x}$ के बदले में z रखने पर

$$e^{2x}+e^{-2x}=z$$

$$\Rightarrow(2e^{2x}-2e^{-2x})dx=dz$$

$$\Rightarrow(e^{2x}-e^{-2x})dx=\frac{1}{2}dz$$

इसप्रकार $\int\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}dx=\int\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}dz$

$$=\frac{1}{2}\log|z|+c$$

$$=\frac{1}{2}\log_e|e^{2x}+e^{-2x}+c|$$

जहाँ c एक स्वेच्छा अचर है।

(v) $1+\log x$ के बदले में z रखने पर

$$1+\log x = z$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}dx = dz$$

इस प्रकार $\int \frac{1}{x + x\log x}dx = \int \frac{1}{x(1+\log x)}dx = \int \frac{1}{z}dz = \log|z| + c$

$= \log_e|1+\log x| + c$, जहाँ c एक स्वच्छ अचर है।

प्रश्नावली-8

निम्नलिखित फलनों का समाकलन ज्ञात कीजिए।

1. $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$
2. $\int \frac{1+\cos x}{1-\cos x}dx$
3. $\int \frac{x}{x^2+a^2}dx$
4. $\int \frac{x}{x^2-a^2}dx$
5. $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$
6. $\int \frac{1}{x^2+2x-1}dx$
7. $\int \sin^2(2x+5)dx$
8. $\int \cos^2(3x+5)\cdot dx$
9. $\int \cos 2x \cos 4x \cos 6x\, dx$
10. $\int \tan 2x \tan 3x \tan 5x\, dx$
11. $\int \frac{\sin x}{\sin(x+5)}dx$
12. $\int \frac{5^x \log 5 + 5x^4}{5^x + x^5}dx$
13. $\int \sin^3 x\, dx$
14. $\int \cos^3 x\, dx$
15. $\int \frac{(\log x+1)^2}{x}dx$
16. $\int \frac{x^2}{x^6-9}$
17. $\int \frac{1}{9x^2+6x-3}dx$
18. $\int \frac{1}{e^x+1}dx$
19. $\int \frac{1}{(x-1)(x+2)}dx$
20. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$

बीजगणित

अनुक्रम एवं श्रेणी
(Sequence and Series)

प्रस्तावनाः

हम लोग कक्षा X के सामान्य गणित में समान्तर श्रेणी (Arithmetic progression) के अर्थ, सामान्य एवं व्यापक रूप, n पदों को योग आदि का अध्ययन करने के बाद समान्तर श्रेणी के बारे में यहाँ और अधिक चर्चा करेंगे। साथ-ही-साथ हम समान्तर माध्यम गुणोत्तर माध्य, समान्तर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य में संबन्ध, विशेष अनुक्रमों के क्रमागत n प्राकृत संख्याओं का योग का भी अध्ययन करेंगे।

4.1 अनुक्रम (Sequence):

अनुक्रम से हमारा तात्पर्य है, "किसी नियम के अनुसार एक परिभाषित (निश्चित) क्रम में संख्याओं की व्यवस्था" अर्थात् इसका मतलब है कि समूह को इस प्रकार क्रमित किया गया है कि हम उसके सदस्यों को प्रथम, द्वितीय संख्या तथा आदि से पहचान सकते हैं। उदाहरणतः, विभिन्न समयों में मानव की जनसंख्या अथवा बैक्टीरिया अनुक्रम की रचना करते हैं। कोई धनराशि जो बैंक खाते में जमा कर दी जाती है, विभिन्न वर्षों में एक अनुक्रम का निर्माण करती है। किसी सामान की अवमूल्यित कीमतें एक अनुक्रम बनाती हैं। मानव क्रियाओं के कई क्षेत्रों में अनुक्रमों का बहुत महत्वपूर्ण उपयोग है।

आइए हम निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करें:

(i) $2, 4, 6, 8, ..., 24$

(ii) $1, 4, 7, 10, ..., 40$

(iii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, ...$

(iv) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$

(v) $3, 9, 27, 81, ...$

उपरोक्त उदाहरणों में जो संख्याएँ आई हैं उसे पद (term) कहते हैं। वे अनुक्रम, जिसमें पदों की संख्या सीमित रहती है उसे परिमित अनुक्रम (Finite Sequence) कहते

हैं। उदाहरण (i) और (ii) परिमित अनुक्रम हैं। क्योंकि पदों की संख्या सीमित है। एक अनुक्रम अपरिमित अनुक्रम कहा जाता है जिसमें पदों की संख्या सीमित नहीं होती है। उदाहरण (iii), (iv), (v) अपरिमित अनुक्रम हैं, क्यों?

अनुक्रम के पदों को हम $a_1, a_2, a_3, ... a_n, ...$ आदि द्वारा निरूपित करते हैं। प्रत्येक पद के साथ लगी संख्या जिसे पदांक कहते हैं, प्रत्येक पद के साथ लगी संख्या जिसे पदांक कहते हैं, उसका स्थान बताती है। अनुक्रम का n वें स्थान को निरूपित करता है और इसे a_n द्वारा निरूपित करते हैं, इसे अनुक्रम का व्यापक पद (General term) भी कहते हैं।

प्राय: यह संभव है कि अनुक्रम के विभिन्न पदों को व्यक्त करने के नियम को एक बीजगणितीय सूत्र द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, प्राकृत सम संख्याओं के अनुक्रम 2,4,6,... पर विचार कीजिए।

यहाँ $a_1 = 2 = 2 \times 1$ $\quad a_2 = 4 = 2 \times 2$

$a_3 = 6 = 2 \times 3$ $\quad a_4 = 8 = 2 \times 4$

... ... $\quad$ ... ...

... ... $\quad$ ... ...

$a_{20} = 40 = 2 \times 20$ $\quad a_{21} = 42 = 2 \times 21$

और इसी प्रकार अन्य।

वस्तुत: हम देखते हैं कि अनुक्रम का n वाँ पद $a_n = 2n$, लिखा जाता है, जबकि n एक प्राकृत संख्या है। इसी प्रकार, विषम प्राकृत संख्याओं के अनुक्रम 1,3,5,7,..., में nवें पद के सूत्र को $a_n = 2n-1$, के रूप में निरूपित किया जा सकता है, जबकि n एक प्राकृत संख्या है।

व्यवस्थित संख्याओं 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... का कोई स्पष्ट पैटर्न नहीं है, किन्तु अनुक्रम की रचना पुनरावृत्ति संबन्ध द्वारा व्यक्त की जा सकती है। उदाहरणत:

$$a_1 = a_2 = 1$$

$$a_3 = a_1 + a_2$$

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \cdot n > 2$$

इस अनुक्रम को Fibonacci Sequence कहते हैं।

अभाज्य संख्याओं के अनुक्रम 2, 3, 5, 7, ... में n वीं अभाज्य संख्या का कोई सूत्र नहीं है। ऐसे वर्णित अनुक्रम को केवल मौखिक निरूपित किया जा सकता है।

प्रत्येक अनुक्रम में यह अपेक्षा नहीं की जानी चाहिए कि उसके लिए विशेष सूत्र होगा। किन्तु फिर भी ऐसे अनुक्रम के निर्माण के लिए कोई न कोई सैद्धांतिक योजना अथवा नियम की आशा तो की जा सकती है, जो पदों $a_1, a_2 a_3, ..., a_n ....$ का क्रमागत रूप दे सके।

उपर्युक्त तथ्यों के आधार पर, एक अनुक्रम को हम एक फलन के रूप में ले सकते हैं जिसका प्रांत (domain) प्राकृत संख्याओं का समुच्चय हो अथवा उसका उपसमुच्चय $\{1,2,3,...k\}$ के प्रकार का हो। कभी-कभी हम फलन को संकेत a_n के लिए $a(n)$ का उपयोग करते हैं।

4.2 श्रेणी (Series):

यदि $a_1, a_2 a_3, ..., a_n$ अनुक्रम है, तो व्यंजक $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ श्रेणी कहलाती है। श्रेणी परिमित अथवा अपरिमित होगी। यदि अनुक्रम क्रमशः परिमित अथवा अपरिमित होगी, यदि अनुक्रम क्रमशः परिमित अथवा अपरिमित है।

परिमित श्रेणी $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ का संक्षिप्त रूप $\sum_{k=1}^{n} ak$ है, जहाँ $\sum$ एक ग्रीक अक्षर है जिसे सिग्मा कहते हैं जिसका अर्थ है जोड़ना।

अपरिमित श्रेणी $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n ....$ का संक्षिप्त रूप $\sum_{k=1}^{\infty} ak$ है। आइए, हमलोग कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 1: निम्नलिखित प्रत्येक अनुक्रम के प्रथम चार पद बताइए:

(i) $a_n = 2n+5$

(ii) $a_n = n^2(n+1)$

(iii) $a_n = \dfrac{2n}{3n+4}$

हल: $n = 1,2,3,4$ रखने पर हम वांछित पद पाते हैं

(i) यहाँ $a_n = 2n+5$

$$\therefore \quad a_1 = 2\times1+5 = 7$$
$$a_2 = 2\times2+5 = 9$$
$$a_3 = 2\times3+5 = 11$$
$$a_4 = 2\times4+5 = 13$$

∴ प्रथम चार पद 7,9,11,13 होंगे।

(ii) यहाँ $a_n = n^2(n+1)$

$$a_1 = 1^2(1+1) = 2$$
$$a_2 = 2^2(2+1) = 12$$
$$a_3 = 3^2(3+1) = 36$$
$$a_4 = 4^2(4+1) = 80$$

∴ प्रथम चार पद 2,12,36,80 होंगे।

(iii) यहाँ $a_n = \dfrac{2n}{3n+4}$

$$a_1 = \frac{2\times1}{3\times1+4} = \frac{2}{7}$$
$$a_2 = \frac{2\times2}{3\times2+4} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$
$$a_3 = \frac{2\times3}{3\times3+4} = \frac{6}{13}$$
$$a_4 = \frac{2\times4}{3\times4+4} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

∴ प्रथम चार पद $\frac{2}{7}, \frac{2}{5}, \frac{6}{13}, \frac{1}{2}$ होंगे।

उदाहरण 2: अनुक्रम a_n निम्नलिखित रूप में परिभाषित है, तो,

$a_1 = 1$

$a_n = a_{n-1} + 2$ जहाँ $n \geq 2$

तो अनुक्रम के पाँच पद ज्ञात कीजिए तथा संगत श्रेणी लिखिए।

हल: यहाँ $a_1 = 1$ तथा $a_n = a_{n-1} + 2$

अब $n = 2$ रखने पर,

$$a_2 = a_{2-1} + 2$$
$$= a_1 + 2$$
$$= 1 + 2 = 3$$

$n = 3$ रखने पर,

$$a_3 = a_{3-1} + 2$$
$$= a_2 + 2$$

$= 3 + 2 = 5$

$n = 4$ रखने पर,

$$a_4 = a_{4-1} + 2$$
$$= a_3 + 2$$
$$= 5 + 2 = 7$$

$n = 5$ रखने पर,

$$a_5 = a_{5-1} + 2$$
$$= a_4 + 2$$
$$= 7 + 2 = 9$$

प्रश्नावली-1

1. प्रत्येक अनुक्रम के प्रथम पाँच पद लिखिए जिनका n वाँ पद दिया गया है:

   (i) $a_n = n^n$ (ii) $a_n = \frac{3n-4}{5}$

   (iii) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ (iv) $a_n = (-1)^{n-1} 5^{n+1}$

2. अनुक्रम $a_n = \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ का 10 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

3. निम्नलिखित अनुक्रम का प्रथम चार पद ज्ञात कीजिए और संगत श्रेणी लिखिए।

   (i) $a_1 = a_2 = 3$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ जहाँ $n \geq 3$

   (ii) $a_1 = -1$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{n}, n \geq 2$

   (iii) $a_1 = a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} - 1$, $n > 2$

   (iv) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n}(3a_{n-1} - 2a_{n-2})$

4. अनुक्रम $a_n = 4n - 3$ का 17 वाँ एवं 24 वाँ पद क्या है?

5. अनुक्रम $a_n = (-1)^{n-1} \cdot n^3$ का 9 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

6. Fibonacci अनुक्रम निम्नलिखित रूप में परिभाषित है।

   $1 = a_1 = a_2$ तथा $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n > 2$ तो $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ज्ञात कीजिए, जबकि

$n = 1,2,3,4,5$

4.3 समान्तर श्रेढ़ी [Arithmetic Progression (A.P.)]:

हमलोग वर्ग X का सामान्य गणित में जान चुके हैं कि वैसे अनुक्रम जो एक निश्चित प्रतिरूप (certain pattern) एक अनुसरण करते हैं, श्रेढ़ी (Progression) कहलाते हैं। साथ ही समान्तर श्रेढ़ी वैसा अनुक्रम है जिसके सार्व अन्तर (common difference) समान होते हैं अर्थात $a_n - a_{n-1} =$ अचर (constant), जहाँ $n \in N$.

उदाहरण के लिए-

(i) 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...

(ii) 2, 7, 12, 17, ...

(iii) 50, 45, 40, 35, ...

ये सभी समान्तर श्रेढ़ी में हैं।

हम जानते हैं कि $a, a+d, a+2d, a+3d, ...$ समान्तर श्रेढ़ी में हैं तो n वाँ पद: $a_n = a+(n-1).d = \ell$ जहाँ a प्रथम पद है, d सार्व अन्तर है तथा n पदों की संख्या है। a_n को $A.P.$ का व्यापक पद (general term) भी कहते हैं तथा यह उसके अंतिम पद को निरूपित करता है, जिसे ℓ से दिखाया जा सकता है। साथ ही

$$s_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$= \frac{n}{2}(a+\ell)$$

$$= \frac{n}{2}\ (\text{first term} + \text{last term})$$

समान्तर श्रेढ़ी की निम्नलिखित विशेषताएँ हैं-

(i) यदि समान्तर श्रेढ़ी के प्रत्येक पद में एक अचर जोड़ा जाए तो इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम भी समान्तर श्रेढ़ी होता है।

मान लीजिए कि $a, a+d, a+2d, ...$ समान्तर श्रेढ़ी में है। यदि एक अचर c प्रत्येक पद में जोड़ा जाए तो इसका अनुक्रम इस प्रकार होगा-

$$a+c,\ a+d+c,\ a+2d+c, ...$$

$$a+c,\ (a+c)+d,\ (a+c)+2d, ...$$

स्पष्ट है कि यह अनुक्रम समान्तर श्रेढ़ी में है क्योंकि इसका प्रथम पद $a+c$ तथा सार्व अन्तर d है।

इसका n वाँ पद, $a_n=(a+c)+(n-1)\cdot d$.

(ii) यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के प्रत्येक पद में से एक अचर घटाया जाए तो, इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम भी समान्तर श्रेढ़ी होता है।

(iii) यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के प्रत्येक पद में एक अचर (शून्येत्तर से गुणा किया जाए तो, इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम भी समान्तर श्रेढ़ी होता है।

मान लीजिए, $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$ समान्तर श्रेढ़ी में है। इस श्रेढ़ी के प्रत्येक पद में अचर $c(\neq 0)$ से गुणा किया जाय तो अनुक्रम इस प्रकार होगा।

$$ac, (a+d)c, (a+2d), (a+3d)c, \ldots$$

$$ac, ac+cd, ac+2cd, ac+3cd, \ldots$$

स्पष्ट है कि उपरोक्त अनुक्रम समान्तर श्रेढ़ी में है जिसका प्रथम पद ac तथा सार्व अन्तर cd है।

इसका n वाँ पद, $a_n=ac+(n-1)\cdot cd$.

(iv) यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के प्रत्येक पद को एक अशून्य अचर से भाग दिया जाए तो इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम भी एक समान्तर श्रेढ़ी होगा।

आइए कुछ उदाहरण लेते हैं-

उदाहरण 4: अनुक्रम $4+11+18+\ldots$ का कौन सा पद 158 है?

हल: दिया गया अनुक्रम $4+11+18+\ldots$ समान्तर श्रेढ़ी में है। यहाँ $a=4$, $d=7$ तथा $a_n=158$.

$\because \quad a_n=a+(n-1)\cdot d$

या, $\quad 158=4+(n-1)\cdot 7$

या, $\quad 154=(n-1)\cdot 7$

या, $\quad n-1=22$

या, $\quad n=23$

$\therefore \quad$ 158 दिए गए अनुक्रम का 23 वाँ पद है।

उदाहरण 5: अनुक्रम $17, \frac{81}{5}, \frac{77}{5}, \frac{73}{5}, \ldots$ का कौन पद प्रथम ऋणात्मक पद है?

हल: माना कि a_n ऋणात्मक पद है

यहाँ $a=17, d=\frac{81}{5}-17=\frac{81-85}{5}=\frac{-4}{5}$

$$a_n=17+(n-1)(\frac{-4}{5})$$

$$=\frac{85-4n+4}{5}$$

$$=\frac{89-4n}{5}$$

जैसा कि a_n ऋणात्मक है अतः $\frac{89-4n}{5}<0$ या $89<4n$ या $4n>89$ अतः n का न्यूनतम मान 23 होगा।

$\therefore$ a_{23} प्रथम ऋणात्मक पद है।

उदाहरण 6: यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी का m वाँ पद n तथा n वाँ पद m, जहाँ $m \neq n$, हो तो p वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: हम पाते हैं:

$$a_m=a+(m-1)d=n \quad \text{......(i)}$$

तथा $a_n=a+(n-1)d=m$ ......(ii)

(i) और (ii) को हल करने पर हम पाते हैं-

$$(m-n)d=n-m$$

या, $d=-1$

तथा $a=n+m-1$

इसलिए $a_p=a+(p-1)d$

$$=n+m-1+(p-1)(-1)$$

$$=n+m-p$$

अतः p वाँ पद $n+m-p$ है।

उदाहरण 7: यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योग $nP+\frac{1}{2}n(n-1)Q$ है जहाँ

P तथा Q अचर हो तो सार्व अन्तर ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि $a_1, a_2, ...a_n$ दी गई समान्तर श्रेढ़ी है, तो

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...+ a_{n-1} + a_n = nP + \frac{1}{2}n(n-1)Q$$

इसलिए $S_1 = a_1 = P$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 2P + Q$$

इसलिए $a_2 = S_2 - S_1 = P + Q$

अतः सार्व अन्तर है।

$$d = a_2 - a_1 = (P+Q) - P = Q$$

उदाहरण 8: किसी समान्तर श्रेढ़ी का चौथा पद उसके प्रथम पद का तिगुना है और सातवाँ पद उसके तीसरे पद के दुगने से 1 अधिक है। प्रथम पद और अनुक्रम ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद a तथा सार्व अन्तर d है।

$\therefore\ a_4 = a + 3d = 3a_1$

$\Rightarrow a + 3d = 3a$

$\Rightarrow 2a = 3d$

$\therefore\ d = \frac{2}{3}a$ ......(I)

पुनः $a_7 = a + 6d = 2a_3 + 1$

$\Rightarrow a + 6d = 2(a + 2d) + 1$

$\Rightarrow a + 6d = 2a + 4d + 1$

$\Rightarrow 2d = a + 1$

$\Rightarrow a + 1 = 2(\frac{2}{3}a)$ (I) के प्रयोग से

$\Rightarrow 3a + 3 = 4a$

$\Rightarrow a = 3$

$\therefore\ d = \frac{2}{3} \times 3 = 2$

$\therefore$ प्रथम पद $= 3$ तथा अनुक्रम 3,5,7,9,11, ...

उदाहरण 9: दो समान्तर श्रेढ़ियों के n पदों के योगफल का अनुपात

$(3n+8):(7n+15)$ है। 12वें पद का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि a_1, a_2 तथा d_1, d_2 क्रमशः प्रथम एवं द्वितीय समान्तर श्रेढ़ियों के प्रथम पद तथा सार्व अन्तर है, तो दी हुई शर्त के अनुसार हम पाते हैं:

प्रथम समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योग

द्वितीय समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योग

$$= \frac{3n+8}{7n+15}$$

या,
$$\frac{\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d_1]}{\frac{n}{2}[2a_2+(n-1)d_2]} = \frac{3n+18}{7n+15}$$

या,
$$\frac{2a_1+(n-1)d_1}{2a_2+(n-1)d_2} = \frac{3n+18}{7n+15}$$

अब,

$$\frac{\text{प्रथम समान्तर श्रेढ़ी का 12 वाँ पद}}{\text{द्वितीय समान्तर श्रेढ़ी का 12 वाँ पद}}$$

$$= \frac{a_1+11d_1}{a_2+11d_2}$$

$$\frac{2a_1+22d_1}{2a_2+22d_2} = \frac{3\times 23+8}{7\times 23+15}$$

(1) में $n=23$ रखने पर

या,
$$\frac{a_1+11d_1}{a_2+11d_2} = \frac{7}{16}$$

अतः वांछित अनुपात 7:16 है।

उदाहरण 10: एक फर्म की प्रथम वर्ष मे आय 5,00,000 रुपये हैं तथा उसकी आय 50,000 रुपये प्रतिवर्ष नौ वर्षों तक बढ़ती है, तो उसके द्वारा 10 वर्षों में प्राप्त आय ज्ञात कीजिए।

हल: हम पाते हैं कि बराबर मात्रा में आय बढ़ने से समान्तर श्रेणी बनेगा, जिसका,

$$a = 5{,}00{,}000,\ d = 50{,}000 \text{ और } n = 10$$

योग सूत्र $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$ का उपयोग करने पर

हम पाते हैं कि

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2\times 5,00,000 + 9\times 50,000)$$
$$= 5\times 14,50,000$$
$$= 72,50,000$$

अर्थात फर्म को 10 वर्ष के अन्त में कुल आय 72,50,000 रुपये प्राप्त होंगे।

4.4 समान्तर माध्य (Arithmetic Mean):

दो संख्याएँ a और b इस प्रकार दिया हुआ है कि इनके बीच एक संख्या A ले सकते हैं ताकि a, A, b समान्तर श्रेढ़ी में हों, हम संख्या A को a और b का समान्तर माध्य (A.M.) कहते हैं।

यहाँ, $A-a=b-A$

अर्थात $A=\frac{a+b}{2}$

इस प्रकार दो संख्याएँ a और b के बीच समान्तर माध्य को इनके औसत $\frac{a+b}{2}$ के रूप मे लिखा जा सकता है।

उदाहरण स्वरूप, दो संख्याओं 6 और 18 का समान्तर माध्य 12 है। अत: हम एक संख्या 12 को 6 और 18 के बीच रखकर एक समान्तर श्रेढ़ी 6,12,18 की रचना कर सकते हैं। यहाँ इस बात पर गौर किया जा सकता है कि क्या दो संख्याओं के बीच दो या अधिक संख्याओं को रखने से समान्तर श्रेढ़ी $A.P.$) हो सकेंगी? देखा जाय तो संख्याओं 6 और 18 के बीच 12 के अलावे 9 और 15 रखे जाने पर 6,9,12,15,18 समान्तर श्रेढ़ी में हो जाती है।

सामान्यत: किन्हीं दो संख्याओं a और b बीच कितने भी संख्याओं को रखकर समान्तर श्रेढ़ी ($A.P.$) में परिणित किया जा सकता है।

आइए, अब हम दो संख्याओं के माध्य n संख्याओं को रखकर समान्तर श्रेढ़ी को समझ सकते हैं।

माना कि दो संख्याओं a और b के माध्य n संख्याएँ $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ इस

प्रकार हैं कि $a, A_1, A_2, A_3 \ldots A_n, b$ समान्तर श्रेढ़ी में हैं। यहाँ, b, $(n+2)$वाँ पद है, अर्थात्

$$b = a + [(n+2) - 1] \cdot d$$

$$= a + (n+1)d.$$

इससे, $d = \dfrac{b-a}{n+1}$

इस प्रकार a तथा b के बीच n संख्याएँ निम्नलिखित है:

$$A_1 = a + d = a + \frac{b-a}{n+1}$$

$$A_2 = a + 2d = a + \frac{2(b-a)}{n+1}$$

$$A_3 = a + 3d = a + \frac{3(b-a)}{n+1}$$

....

....

$$A_n = a + nd = a + \frac{n(b-a)}{n+1}$$

उदाहरण (11): दो संख्याएँ 4 और 20 के बीच तीन ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिससे कि प्राप्त अनुक्रम एक समान्तर श्रेढ़ी बन जाए।

हल: माना कि A_1, A_2, A_3 4 और 20 के बीच तीन अभिष्ट संख्याएँ हैं। इसलिए $4, A_1, A_2, A_3, 20$ समान्तर श्रेढ़ी में हैं।

यहाँ $a = 4, b = 20, n = 5$

इसलिए $20 = 4 + (5-1).d$

या, $16 = 4.d$

$$d = \frac{16}{4} = 4$$

इस प्रकार $A_1 = a + d = 4 + 4 = 8$

$$A_2 = a + 2d = 4 + 2 \times 4 = 12$$

$$A_3 = a + 3d = 4 + 3 \times 4 = 16$$

अत: संख्याएँ 4 और 20 के बीच अभिष्ट तीन संख्याएँ 8,12,16 हैं।

प्रश्नावली-2

1. समान्तर श्रेढ़ी 3,7,11, ... का 10 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
2. *A.P.*: 3,8,13,18, ... का कौन-सा पद 78 है?
3. क्या *A.P.*: 11,8,5,2, ... का एक पद -150 है?
4. 1 से 2001 तक के विषम पूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए।
5. तीन अंको वाली कितनी संख्याएँ 7 से विभाज्य है?
6. 10 और 250 के बीच में 4 के कितने गुणज है?
7. 5 और 29 के बीच पाँच संख्याएँ इस प्रकार रखें कि प्राप्त अनुक्रम एक समान्तर श्रेढ़ी बन जाए।
8. 100 और 1000 के मध्य उन सभी प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए जो 5 के गुणज हैं।
9. समान्तर श्रेढ़ी $-6, -\frac{11}{2}, -5, ...$ के कितने पदों का योगफल -25 है?
10. वह *A.P.* ज्ञात कीजिए जिसका तीसरा पद 16 है और 7 वाँ पद 5 वें पद से 12 अधिक है।
11. *A.P.* 3,8,13,... 253 में अन्तिम पद से 20वाँ पद ज्ञात कीजिए।
12. यदि किसी *A.P.* के तीसरे और नौवें पद क्रमश: 4 और -8 हैं, तो इसका कौन सा पद शून्य होगा?
13. दो समान्तर श्रेढ़ियों का सार्व अन्तर समान है। यदि इनके 100वें पदों का अन्तर 100 है, तो इनके 1000 वें पदों का अन्तर क्या होगा?
14. उस समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए जिसका k वाँ पद $5k+1$ है।
15. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम P पदों का योग प्रथम 2 पदों के योगफल के बराबर हो तो प्रथम $(p+2)$ का योगफल ज्ञात कीजिए।
16. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम p, q, r पदों का योगफल क्रमश: a, b तथा

c हों तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$$

17. यदि $\frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}$, a तथा b के मध्य समान्तर माध्य हो तो n का मान ज्ञात कीजिए।

18. m संख्याओं को 1 और 31 के बीच रखने पर प्राप्त अनुक्रम एक समान्तर श्रेढ़ी है और 7वीं एवं $(m-1)$वीं संख्याओं का अनुपात 5:9 है तो m का मान ज्ञात कीजिए।

19. एक व्यक्ति ऋण का भुगतान 100 रूपये की प्रथम किश्त से शुरू करता है। यदि वह प्रत्येक किश्त में 5 रूपये प्रति माह बढ़ता है तो 30वीं किस्त की राशि क्या होगी?

20. मदन लाल ने 1995 में 5000 रू0 के मासिक वेतन पर कार्य आरंभ किया और प्रत्येक वर्ष 200 रू0 की वेतन वृद्धि प्राप्त की। किस वर्ष में उसका वेतन 7000 रू0 हो जायगा?

4.5 गुणोत्तर श्रेढ़ी [Geometric Progression(G.P.)]:

आइए, अब हम निम्नांकित अनुक्रमों पर विचार करते हैं-

(i) 1, 3, 9, 27, ...

(ii) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots$

(iii) .01, .0001, .000001, ...

(iv) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, \ldots$

उपर्युक्त प्रत्येक अनुक्रम में हम पाते हैं कि प्रथम पद को छोड़ सभी पद एक विशेष क्रम में बढ़ते हैं।

(i) में हम पाते हैं:

$$a_1=1, \frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{1}=3; \frac{a_3}{a_2}=\frac{9}{3}=3$$

$$\frac{a_4}{a_3}=\frac{27}{9}=3$$ और इसी प्रकार

(ii) में हम पाते हैं कि:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \frac{a_2}{a_1} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}, \frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{1}{8}}{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{-\frac{1}{16}}{\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$$

(iii) में हम पाते हैं कि:

$$a_1 = .01, \frac{a_2}{a_1} = \frac{.0001}{.01} = .01, \frac{a_3}{a_2} = \frac{.000001}{.0001} = .01$$

इत्यादि।

इसी प्रकार (iv) में पद कैसे अग्रसर होते हैं बताइए?

निरीक्षण से यह ज्ञात हो जाता है कि प्रत्येक स्थिति में, प्रथम पद को छोड़ हर अगला पद अपने पिछले पद से अचर अनुपात में बढ़ता है। (i) में यह अचर अनुपात 3 है, (ii) में $-\frac{1}{2}$ है, (iii) में यह .01 है, (iv) में यह अचर अनुपात $\sqrt{3}$ है ऐसे अनुक्रमों को गुणोत्तर श्रेढ़ी (G.P.) कहा जाता है।

इस प्रकार, अनुक्रम $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ को गुणोत्तर श्रेढ़ी कहा जाता है, यदि प्रत्येक पद अशून्य हो तथा $\frac{a_{k+1}}{a_k} = r$ (अचर), $k \geq 1$ के लिए।

$a_1 = a$ लिखने पर हम गुणोत्तर श्रेढ़ी पाते हैं:

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots$$

जहाँ a को प्रथम पद तथा r को गुणोत्तर श्रेढ़ी का सार्व अनुपात [Common ratio (c.r)] कहते हैं।

उदाहरण (i),(ii),(iii) तथा (iv) में दी गई गुणोत्तर श्रेढ़ियों का सार्व अनुपात

क्रमशः $3, -\frac{1}{2}$, 0.01 तथा $\sqrt{3}$ है।

4.5.1 गुणोत्तर श्रेढ़ी का व्यापक पद (General term of a G.P.):

अब हम एक गुणोत्तर श्रेढ़ी (G.P.) जिसका प्रथम अशून्य पद (non-zero term) 'a' तथा सार्व अनुपात 'r' है, पर विचार करते हैं। आइए, इसके कुछ पदों को लिखिए। दूसरा पद, प्रथम पद a को सार्व अनुपात r से गुणा करने पर प्राप्त होता है अर्थात $a_2 = ar$, इसी प्रकार तीसरा पद a_3 को दूसरा पद a_2 में r से गुणा करने पर प्राप्त होगा अर्थात $a_3 = a_2 . r = ar^2$ आदि। इस प्रकार हम इन्हें तथा कुछ और पदों को निम्न प्रकार लिख सकते हैं-

प्रथम पद $= a_1 = a = ar^{1-1}$

द्वितीय पद $= a_2 = ar = ar^{2-1}$

तृतीय पद $= a_3 = ar^2 = ar^{3-1}$

चतुर्थ पद $= a_4 = ar^3 = ar^{4-1}$

पाँचवाँ पद $= a_5 = ar^4 = ar^{5-1}$

....

....

क्या आप इसमें कोई पैटर्न देखते हैं? हाँ, तो 10 वाँ पद क्या होगा?

$= a_{10} = ar^{10-1} = ar^9$

अतएव यह प्रतिरूप बताता है कि गुणोत्तर श्रेढ़ी का n वाँ पद $a_n = ar^{n-1}$

अर्थात, गुणोत्तर श्रेढ़ी को इस रूप में लिखा जा सकता है-

$a, ar, ar^2, ar^3, ... ar^{n-1}$.... या फिर $a, ar, ar^2, ar^3, ... ar^{n-1}$.... क्रमशः जब श्रेढ़ी परिमित हो या जब श्रेढ़ी अपरिमित हो।

श्रेढ़ी $a, ar, ar^2, ..., ar^{n-1}$ को परिमित गुणोत्तर श्रेढ़ी तथा श्रेढ़ी $a, ar, ar^2, ..., ar^{n-1}$.... को अपरिमित गुणोत्तर श्रेढ़ी कहते हैं-

4.5.2 गुणोत्तर श्रेढ़ी की सामान्य विशेषताएँ:-

(i) यदि किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी के प्रत्येक पद में एक अशून्य अचर से गुणा किया जाए तो, इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम भी गुणोत्तर श्रेढ़ी होता है।

माना कि, दिया गया गुणोत्तर श्रेढ़ी इस प्रकार है $a, ar, ar^2, ar^3, ...$

यदि एक अशून्य अचर k से प्रत्येक पद में गुणा किया तो अनुक्रम इस प्रकार होगा।

$$ak, ark, ar^2k, ar^3k, \ldots\ldots$$

स्पष्ट है कि यह अनुक्रम भी गुणोत्तर श्रेढ़ी में है जिसका सार्व अनुपात r है।

(ii) यदि किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी के प्रत्येक पद को एक अशून्य अचर (non-zero constant) से भाग दिया जाए तो इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम भी एक गुणोत्तर श्रेढ़ी होगा।

गुणोत्तर श्रेढ़ी $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$ में प्रत्येक पद में अशून्य अचर k से भाग दिया जाए तो अनुक्रम इस प्रकार होगा-

$$\frac{a}{k}, \frac{ar}{k}, \frac{ar^2}{k}, \frac{ar^3}{k}, \ldots\ldots$$

स्पष्ट है कि यह अनुक्रम भी गुणोत्तर श्रेढ़ी में है जिसका सार्व अनुपात r है।

(iii) किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी के पदों का व्यूत्क्रम(reciprocal)भी गुणोत्तर श्रेढ़ी में होता है। गुणोत्तर श्रेढ़ी $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$ के प्रत्येक पदों के व्युत्क्रम $\frac{1}{a}, \frac{1}{ar}, \frac{1}{ar^2}, \frac{1}{ar^3}, \ldots\ldots$ भी गुणोत्तर श्रेढ़ी में है जिसका सार्व अनुपात $\frac{1}{r}$ है।

4.5.3 गुणोत्तर श्रेणी के n पदों का योगफल-

माना कि गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद a तथा सार्व योगफल S_n से लिखते हैं तब

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots + ar^{n-1} \qquad \ldots\ldots(i)$$

स्थिति 1, यदि $r = 1$ तो हम पाते हैं,

$$S_n = a + a + a + \ldots\ldots + a(n \text{ पदों तक}) = na$$

स्थिति 2, यदि $r \neq 1$ तो (i) को r से गुणा करने पर हम पाते हैं,

$$r \cdot S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots + ar^n \qquad \ldots\ldots(ii)$$

(ii) को (i) में से घटाने पर हम पाते हैं,

$$(1 - r)S_n = a - ar^n = a(1 - r^n)$$

इससे हम पाते हैं कि,

$$\therefore \quad S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

या $$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \; r \neq 1.$$

उदाहरण 12: गुणोत्तर श्रेढ़ी 5,25,125,....... का 10वाँ तथा nवाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $a=5$ तथा $r=5$

गुणोत्तर श्रेढ़ी का nवाँ पद; $t_n = ar^{n-1}$

$\therefore \quad t_{10} = 5\cdot(5)^{10-1} = 5\cdot5^9 = 5^{10}$

तथा $t_n = 5(5)^{n-1} = 5^n$

उदाहरण 13: गुणोत्तर श्रेढ़ी 5,20,80,..... का कौन सा पद 1280 है?

हल: माना कि गुणोत्तर श्रेढ़ी 5,20,80,..... का nवाँ पद 1280 है।

हम जानते हैं, गुणोत्तर श्रेढ़ी nवाँ पद $t_n = ar^{n-1}$ ∴

यहाँ $a=5,\; r=4,\; t_n=1280$

अर्थात् $1280 = 5\times4^{n-1}$

$$4^{n-1} = \frac{1280}{5} = 256 = 4^4$$

या, $n-1=4$

$\therefore \quad n=5$

अतः 1280, गुणोत्तर श्रेढ़ी 5,20,80, ... का 5वाँ पद है।

उदाहरण 14: गुणोत्तर श्रेढ़ी $2, 2\sqrt{2}, 4, ..., 128$ में कितने पद है?

हल: माना कि दिये गये गुणोत्तर श्रेढ़ी में n पद है।

यहाँ $a=2, r=\sqrt{2}, t_n=128$

$\therefore \quad t_n = ar^{n-1}$

$\therefore \quad \therefore 128 = 2(\sqrt{2})^{n-1}$

या, $2^7 = (2)^{\frac{n+1}{2}}$

$$\therefore \quad \frac{n+1}{2} = 7$$

$\therefore \quad n=13$

अतः गुणोत्तर श्रेढ़ी $2, 2\sqrt{2}, 4, ...128$ में कुल 13 पद है।

उदाहरण(15): एक गुणोत्तर श्रेढ़ी का तीसरा पद 24 तथा 6 वाँ पद 192 है, तो 10वाँ

पद ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $a_3 = ar^2 = 24$ ....(i)

तथा $a_6 = ar^5 = 192$ ....(ii)

(ii) को (i) से भाग देने पर हम पाते हैं $r = 2$

(i) में $r = 2$ रखने पर हम पाते हैं $a = 6$

अतः $a_{10} = 6(2)^9 = 3072$

उदाहरण 16: किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का तीसरा पद 3 है तो इसके प्रथम पाँच पदों का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल: माना, गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद a तथा सार्व अनुपात r है तो,

दिया हुआ है कि, तीसरा पद, $t_3 = ar^2 = 3$ .....(i)

प्रथम पाँच पदों का गुणनफल $= t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5$

$$= a \cdot ar \cdot ar^2 \cdot ar^3 \cdot ar^4$$

$$= a^5 \cdot r^{10}$$

$$= (ar^2)^5$$

$$= 3^5 = 243$$

उदाहरण 17: अनुक्रम 8, 88, 888,.... के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि, $S_n = 8 + 88 + 888 + ...$ n पदों तक

$$= 8(1 + 11 + 111 + ... \; n \text{ पदों तक})$$

$$= \frac{8}{9}(9 + 99 + 999 + ... n \text{ पदों तक})$$

$$= \frac{8}{9}[(10-1) + (100-1) + (1000-1) + ... n \text{ पदों तक }]$$

$$= \frac{8}{9}[(10-1) + (100-1) + (1000-1) + ... n \text{ पदों तक }]$$

$$-(1 + 1 + 1 + ... n \text{ पदों तक }]$$

$$= \frac{8}{9}[\frac{(10^n - 1)}{10-1} - n] = \frac{8}{81}(10^{n+1} - 10 - 9^n)$$

उदाहरण18: गुणोत्तर श्रेढ़ी $1, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, ...$ के प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $a=1$, तथा $r=\frac{2}{3}$

इसलिए, $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$$=\frac{\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}}$$

$$=3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

उदाहरण 19: मान ज्ञात कीजिए $\sum_{k=1}^{10}(2+3^k)$

हल: $\sum_{k=1}^{10}(2+3^k)$

$$=\sum_{k=1}^{10}2+\sum_{k=1}^{10}3^k$$

$$=(2+2+\ldots\ldots10\text{ पदों तक})+(3+3^2+3^3+\ldots\ldots+3^{10})$$

$$=2\times10+\frac{3(3^{10}-1)}{3-1}$$

$$=20+\frac{3^{11}-3}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(40+3^{11}-3)$$

$$=\frac{1}{2}(37+3^{11})$$

उदाहरण 20: एक गुणोत्तर श्रेढ़ी के प्रथम तीन पदों का योगफल $\frac{13}{12}$ है तथा उनका गुणनफल -1 है, तो सार्व अनुपात तथा पदों को ज्ञात कीजिए?

हल: माना, गुणोत्तर श्रेढ़ी के तीन पद है-

$\frac{a}{r}, a, ar$ तो

प्रश्न से,

$$\frac{a}{r}+a+ar=\frac{13}{12} \quad ......(i)$$

तथा $\left(\frac{a}{r}\right)\cdot a\cdot(ar)=-1 \quad ......(ii)$

(ii) से हम पाते हैं, $a^3=-1$ अर्थात् $a=-1$ (केवल वास्तविक मूल पर विचार करने से)

(i) में $a=-1$ रखने पर हम पाते हैं

$$-\frac{1}{r}-1-r=\frac{13}{12}$$

या $12r^2+25r+12=0$

यह r में द्विघात समीकरण है, जिसे हल करने पर हम पाते हैं,

$$r=-\frac{3}{4} \text{ या } -\frac{4}{3}$$

अतः गुणोत्तर श्रेढ़ी के तीन पद हैं-

स्थिति 1: $r=-\frac{3}{4}$ के लिए

$$\frac{4}{3},-1,\frac{3}{4}$$

स्थिति 2: $r=-\frac{4}{3}$

$$\frac{3}{4},-1,\frac{4}{3}$$

4.6 गुणोत्तर माध्य [Geometric Mean (G.M.)]:

आइए, अब हम दो धनात्मक संख्याओं a और b के बीच G एक संख्या इस प्रकार लेते हैं कि,

a, G, b गुणोत्तर श्रेढ़ी में हों।

तब, $\frac{G}{a}=\frac{b}{G}$

या, $G^2=ab$

$\therefore \quad G=\sqrt{ab} \quad [\because G>0]$

https://www.studiestoday.com

अतः दो धनात्मक संख्याओं a और b के बीच गुणोत्तर माध्य दोनों संख्याओं के गुणनफल के वर्गमूल के बराबर होती है।

उदाहरण स्वरूप, संख्या 2 और 8 का गुणोत्तर माध्य $=\sqrt{2\times8}=\sqrt{16}=4$

यदि दो धनात्मक संख्याएँ a तथा b दी गई हों तो उनके बीच इच्छित संख्याएँ रखी जा सकती हैं ताकि प्राप्त अनुक्रम एक गुणोत्तर श्रेढ़ी बन जाय।

मान लीजिए a और b के बीच n संख्याएँ $G_1, G_2, G_3, \ldots\ldots G_n$ इस प्रकार है कि $a, G_1, G_2, G_3, \ldots. G_n, b$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में है। इस प्रकार b गुणोत्तर श्रेढ़ी का $(n+2)$वाँ पद है।

हम पाते हैं: $b=(n+2)$वाँ पद

$b=ar^{n+1}$ जहाँ $r=$ गुणोत्तर श्रेढ़ी का सार्व. अनुपात

$$\therefore \quad r^{n+1}=\frac{b}{a}$$

$$\text{या,} \quad r=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\text{अतः} \quad G_1=ar=a\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$G_2=ar^2=a\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}$$

$$G_3=ar^3=a\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}}$$

....

....

$$G_n=ar^n=a\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

उदाहरण 21: ऐसी तीन संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनको 1 से 256 के बीच रखने पर प्राप्त अनुक्रम एक गुणोत्तर श्रेढ़ी बन जाए।

हल: माना कि G_1, G_2, G_3 तीन गुणोत्तर माध्य 1 से 256 के बीच में है।

$\therefore$ $1, G_1, G_2, G_3, 256$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में है।

इसलिए, $256 = r^4$ जिससे $r = \pm 4$ (केवल वास्तविक मूल लेने पर)

$r = 4$ के लिए हम पाते हैं कि

$$G_1 = ar = 4, G_2 = ar^2 = 16, G_3 = ar^3 = 64$$

इसी प्रकार $r = -4$ के लिए संख्या -4, 16 तथा -64 है।

अत: 1 तथा 256 के बीच तीन संख्याएँ 4,16,64 हैं या $-4,16,-64$ हैं।

उदाहरण 22: दो संख्याएँ a और b के बीच गुणोत्तर माध्य $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ है तो n का मान ज्ञात कीजिए।

हल: दिया हुआ है कि

$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$, संख्याएँ a और b के बीच गुणोत्तर माध्य है।

$$\therefore \quad \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n} = \sqrt{ab}$$

या, $a^{n+1}+b^{n+1} = \sqrt{ab}(a^n+b^n)$

या, $a^{n+1}+b^{n+1} = a^{n+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{b} + \sqrt{a} \cdot b^{n+\frac{1}{2}}$

या, $a^{n+\frac{1}{2}}\left[a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right] = b^{n+\frac{1}{2}}\left[a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right]$

या, $a^{n+\frac{1}{2}} = b^{n+\frac{1}{2}}$ $\qquad \left[\because a \neq b, \therefore \sqrt{a} \neq \sqrt{b}\right]$

या, $\left(\frac{a}{b}\right)^{n+\frac{1}{2}} = 1$

$$\therefore \quad n + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow n = -\frac{1}{2}.$$

4.7 समान्तर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य के बीच संबन्ध:

(Relationship between A.M. and G.M.)

माना कि दो धनात्मक वास्तविक संख्याओं a और b के बीच A और G क्रमश: समान्तर माध्य (A.M.) तथा गुणोत्तर माध्य (G.M.) है तो,

$$A = \frac{a+b}{2} \qquad \text{.........(i)}$$

तथा $G=\sqrt{ab}$ .....(ii)

अब, $A-G=\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$

$$=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geq 0$$

$\therefore \quad A-G\geq 0$

या, $\quad A\geq G$

साथ ही, $A=G$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow a=b$$

इस प्रकार, दो संख्याओं a और b के लिए A.M. तथा G.M. बराबर होंगे यदि और केवल यदि $a=b$ हों।

यदि $a\neq b$ हों तो $A.M.>G.M.$

उदाहरण 23: यदि दो धनात्मक संख्या a तथा b के बीच समान्त माध्य तथा गुणोत्तर माध्य क्रमश: 10 और 8 है तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल: दो संख्याओं a और b के लिए,

$A.M.=\dfrac{a+b}{2}=10$ ....(i)

$G.M.=\sqrt{ab}=8$ ....(ii)

(i) और (ii) से हम पाते हैं,

$a+b=20$ ....(iii)

$ab=64$ ....(iv)

(iii),(iv) से a तथा b का मान सर्वसमिका $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$ में रखने पर हम पाते हैं,

$$(a-b)^2=400-256=144$$

या, $\quad a-b=\pm 12$

(iii) तथा (v) को हल करने पर हम पाते हैं,

$$a=4, b=16.$$

या, $\quad a=16, b=4$

अतः संख्याएँ a तथा b क्रमशः 4,16 या 16,4 हैं।

प्रश्नावली-3

1. गुणोत्तर श्रेढ़ी $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots\ldots\ldots$ का 15वाँ पद ज्ञात कीजिए।
2. यदि किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का 5वाँ पद 81 तथा दूसरा पद 24 है। गुणोत्तर श्रेढ़ी ज्ञात कीजिए।
3. किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का 7वाँ पद उसके चौथे पद का 8 गुना है। गुणोत्तर श्रेढ़ी निकालिए यदि उसका 5वाँ पद 48 हो।
4. किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद 1 है। उसके तीसरे तथा पाँचवें पद का योग 90 है। गुणोत्तर श्रेढ़ी का सार्व अनुपात ज्ञात कीजिए।
5. यदि किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी के तीन पदों का गुणनफल 216 है तथा उनका योग 19 है, संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
6. किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी के प्रथम तीन पदों का योगफल $\frac{39}{10}$ तथा उनका गुणनफल 1 है। गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद, सार्व अनुपात तथा प्रथम तीन पद ज्ञात कीजिए यदि गुणोत्तर श्रेढ़ी के पद वास्तविक संख्याएँ हों।
7. गुणोत्तर श्रेढ़ी $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots\ldots$ के कितने पद आवश्यक हैं ताकि उनका योगफल $\frac{3069}{512}$ हो जाए।
8. अनुक्रम 7,77,777,7777,..... के n पदों का योग ज्ञात कीजिए।
9. किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का 5वाँ, 8वाँ तथा 11वाँ पद क्रमशः p, q, s हैं तो दिखाइए कि $q^2 = ps$.
10. x के किस मान के लिए संख्याएँ $-\frac{2}{7}, x, -\frac{7}{2}$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में है?

11. मान ज्ञात कीजिए- $\sum_{r=1}^{n}(3^r - 2^r)$

12. यदि किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का 4वाँ, 10वाँ तथा 16वाँ पद क्रमश: x, y तथा z हैं, तो सिद्ध कीजिए कि x, y, z गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।

13. यदि किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का p वाँ, q वाँ तथा r वाँ पद क्रमश: a, b तथा c हो, तो सिद्ध कीजिए कि $a^{q-r}b^{r-p}c^{p-q} = 1$.

14. ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनके 3 तथा 81 के बीच रखने पर प्राप्त अनुक्रम एक गुणोत्तर श्रेढ़ी बन जाय।

15. दो संख्याओं का योगफल उनके गुणोत्तर माध्य का 6 गुना है तो दिखाइए कि संख्याएँ $(3+2\sqrt{2}):(3-2\sqrt{2})$ के अनुपात में हैं।

16. यदि किसी द्विघात समीकरण के मूलों के समान्तर माध्य एवं गुणोत्तर माध्य क्रमश: 8 और 5 हैं तो द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए।

17. यदि A और G दो धनात्मक संख्याओं के बीच क्रमश: समान्तर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य हों, तो सिद्ध कीजिए कि संख्याएँ $A \pm \sqrt{(A+G)(A-G)}$.

—

4.8 विशेष अनुक्रमों के n पदों का योगफल:

(Sum to n Terms of Special Series)

पूर्व में हमलोग समान्तर श्रेढ़ी (A.P.) तथा गुणोत्तर श्रेढ़ी (G.P.) के पदों का योग निकालना सीख चुके हैं। अब हम विशेष अनुक्रमों के n पदों का योगफल निकालना सीखेंगे जो A.P. या G.P. से संबन्धित हो। ये निम्नलिखित हैं–

(i) $1+2+3+.........+n$ अर्थात् प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग

(ii) $1^2+2^2+3^2+.........+n^2$ अर्थात् प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग

(iii) $1^3+2^3+3^3+.........+n^3$ अर्थात् प्रथम n प्राकृत संख्याओं के घनों का योग

आइए इन पर विचार किया जाय।

(i) प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग

माना कि प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग S हो तो,

$$S=1+2+3+.........+n$$

$$=\frac{n}{2}[2\times1+(n-1)\times1]$$

$$=\frac{n}{2}[2+n-1]$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}$$

इस प्रकार प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग

$$i.e.\ \sum_{i=1}^{n} n=\frac{n(n+1)}{2}$$

(ii) प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग,

माना, $S=\sum_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+3^2+.........n^2$ ....(i)

हम निम्न सर्वसमिका पर विचार करते हैं–

$$k^3-(k-1)^3=k^3-(k^3-3k^2+3k-1)$$

$$=3k^2-3k+1$$

$$\therefore\ k^3-(k-1)^3=3k^2-3k+1 \qquad ....(ii)$$

(ii) में $k=1,2,3.........n$ रखने पर, हम पाते हैं

$k=1,\ 1^3-0^3=3\cdot(1)^2-3(1)+1$

$k=2,\ 2^3-1^3=3\cdot(2)^2-3\cdot(2)+1$

$k=3,\ 3^3-2^3=3\cdot(3)^2-3\cdot(3)+1$

....

....

$k=n,\ n^3-(n-1)^3=3(n)^2-3(n)+1$

दोनों पक्षों को जोड़न पर हम पाते हैं-

$n^3-0^3=3(1^2+2^2+3^2+.....+n^2)-3(1+2+3+......+n)+n$

$$n^3=3\sum_{k=1}^{n}k^2-3\sum_{k=1}^{n}k+n.$$

हम जानते है कि $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+.....+n=\frac{n(n+1)}{2}$

या, $S=\sum_{k=1}^{n}k^2$

$$=\frac{1}{3}\left[n^3+\frac{3n(n+1)}{2}-n\right]$$

$$=\frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(iii) प्रथम n प्राकृत संख्याओं के घनों का योग

माना $S=1^3+2^3+3^3+.......+n^3$

हम सर्वसमिका $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ पर विचार करते हैं

क्रमश: $k=1,2,3,4......n$ रखने पर, हम पाते हैं,

$k=1,\ \ 2^4-1^4=4(1)^3+6(1)^2+4(1)+1$

$k=2,\ \ 3^4-2^4=4(2)^3+6(2)^2+4(2)+1$

$k=3,\ \ 4^4-3^4=4(3)^3+6(3)^2+4(3)+1$

....

....

$k=n-1 \qquad n^4-(n-1)^4=4(n-1)^3+6(n-1)^2+4(n-1)+1$

$k=n \qquad (n+1)^4-n^4=4(n)^3+6(n)^2+4(n)+1$

दोनों पक्षों को जोड़ने पर हम पाते हैं,

$$(n+1)^4-1^4=4(1^3+2^3+3^3+\dots\dots+n^3)+6(1^2+2^2+3^2+\dots\dots+n^2)$$
$$+4(1+2+3+\dots\dots+n)+n$$

$$=4S+\frac{6n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{4n(n+1)}{2}+n \qquad \dots\dots\dots(i)$$

(i) तथा (ii) से, हम जानते हैं-

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2} \text{ तथा } \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

इन मानों को (i) में रखने पर हम पाते हैं-

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3=n^4+4n^3+6n^2+4n-\frac{6n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{4n(n+1)}{2}-n$$

या, $4S=n^4+4n^3+6n^2+4n-n(2n^2+3n+1)-2n(n+1)-n$

$$=n^4+2n^3+n^2$$
$$=n^2(n+1)^2$$

अतः $S=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

उदाहरण 23: श्रेढ़ी $5^2+6^2+7^2+\dots\dots\dots+20^2$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: $5^2+6^2+7^2+\dots\dots\dots+20^2$

$$=(1^2+2^2+3^2+\dots\dots+20^2)-(1^2+2^2+3^2+4^2)$$
$$=\frac{20(20+1)(2\times20+1)}{6}-\frac{4(4+1)(2\times4+1)}{6}$$
$$=\frac{20\times21\times41}{6}-\frac{4\times5\times9}{6}$$
$$=10\times7\times41-2\times5\times3$$
$$=2840.$$

उदाहरण 24: श्रेढ़ी $5+11+19+29+41+\dots\dots$ के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ हम श्रेढ़ी को इस प्रकार लिखें-

$$S_n = 5+11+19+29+\dots\dots+a_{n-1}+a_n$$

या, $$S_n = 5+11+19+\dots\dots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n$$

घटाने पर हम पाते हैं-

$$0 = 5+[6+8+10+12+\dots\dots(n-1)\text{ पदों}]-a_n$$

अथवा, $$a_n = 5+\frac{(n-1)[12+(n-2)\times 2]}{2}$$

$$= 5+(n-1)(n+4)$$

$$= n^2+3n+1$$

इस प्रकार-

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(k^2+3k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{1}^{n} k + n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{n(n+2)(n+4)}{3}$$

उदाहरण 25: वैसे श्रेढ़ी के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए जिसका n वाँ पद $12n^2-6n+5$ है।

हल: माना कि $t_n = 12n^2-6n+5$

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} t_n = \sum_{n=1}^{n}(12n^2-6n+5)$$

$$= \sum_{n=1}^{n} 12n^2 - \sum_{n=1}^{n} 6n + \sum_{n=1}^{n} 5$$

$$= 12\sum_{n=1}^{n} n^2 - 6\sum_{n=1}^{n} n + 5n$$

$$= \frac{12n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{6n(n+1)}{2} + 5n$$

$$= 2n(2n^2+3n+1) - 3n(n+1) + 5n$$

$$= 4n^3+3n^2+4n$$

उदाहरण 26: श्रेढ़ी $\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^3}{1+3}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+......16$ पदों तक का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: दिये गये श्रेढ़ी का nवाँ पद होगा,

$$t_n=\frac{1^3+2^3+3^3+.........+n^3}{1+3+5+.......n \text{ पदों तक}}$$

$$=\frac{\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2}{\frac{n}{2}\left\{2\times1+(n-1)2\right\}}=\frac{\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2}{n^2}$$

$$=\frac{(n+1)^2}{4}=\frac{n^2+2n+1}{4}$$

$\therefore$ n पदों का योग, $S_n=\sum_{n=1}^{n}t_n$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{n}(n^2+2n+1)=\frac{1}{4}\left[\sum_{n=1}^{n}n^2+2\sum_{n=1}^{n}n+\sum 1\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{2n(n+1)}{2}+n\right]$$

16 पदों का योग,

$$S_{16}=\frac{1}{4}\left[\frac{16(16+1)(16\times2+1)}{6}+\frac{2\times16(16+1)}{2}+16\right]$$

$$=446$$

प्रश्नावली-4

1. श्रेढ़ी $1+3+7+15+........n$ पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।
2. श्रेढ़ी $5+7+13+31+85+........n$ पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।
3. उस श्रेढ़ी के nवीं पदों का योग ज्ञात कीजिए जिसका nवाँ पद $n(n+3)$ हो।
4. श्रेढ़ी $(3^3-2^3)+(5^3-4^3)+(7^3-6^3)+........10$ पदों तक का योगफल ज्ञात कीजिए।
5. उस श्रेढ़ी के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए जिसका nवाँ पद $n(n+1)(n+4)$ है।
6. श्रेढ़ी $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+.......100$ पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।
7. यदि $\sum_{n=1}^{n} n = 21$ तो $\sum_{n=1}^{n} n^2$ का मान ज्ञात कीजिए।
8. श्रेढ़ी $1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+........$ के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।
9. श्रेढ़ी $(n^2-1)^2+2(n^2-2^2)+3(n^2-3^2)+.........$ n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।
10. साबित करें-

$$\frac{1\times2^2+2\times3^2+........+n(n+1)^2}{1^2\times2+2^2\times3+.........+n^2(n+1)}=\frac{2n+5}{3n+1}$$

उत्तरमाला

इकाई-1

प्रश्नावली-1

1. (i) 0.25π रेडियन (ii) 0.375π रेडियन (iii) 0.0102π रेडियन
2. (i) 50^g (ii) $56^g\ 20'\ 25''$ (iii) 400^g
3. (i) 36° (ii) $51^\circ\ 11'\ 15''$ (iii) 20°
4. $\frac{5\pi}{6}$ रेडियन
5. $\frac{2\pi}{3}$ रेडियन
6. 8

प्रश्नावली-2

1. 3 मी0
2. 4:5

प्रश्नावली-3

1. (i) प्रथम पाद (ii) चतुर्थ पाद (iii) धनात्मक y अक्ष पर
   (iv) ऋणात्मक y अक्ष पर (v) ऋणात्मक x अक्ष पर (vi) चतुर्थ पाद में
   (vii) प्रथम पाद में (viii) द्वितीय पाद में (ix) तृतीय पाद में
   (x) द्वितीय पाद में (xi) तृतीय पाद में
2. (i) 1. (ii) 3. (iii) 3
   (iv) 0. (v) $\frac{1}{2}$ (vi) 0
   (vii) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$ (viii) 0 (ix) $-2\cos A$
3. A: (i) $\cos 30^\circ$ (ii) $\cos 33^\circ$ (iii) $-\cos 28^\circ$
   (iv) $-\cot 30^\circ$ (v) $\sin 17^\circ$ (vi) $-\cos 25^\circ$

(vii) $\cot 25°$ (viii) $\cos 20°$ (ix) $\cot 10°$

(x) $\operatorname{cosec} 30°$ (xi) $-\operatorname{cosec} 20°$ (xii) $\tan 40°$

(xiii) $-\tan 40°$ (xiv) $\cos 18°$ (xv) $\sec 30°$

(xvi) $-\tan 40°$

B: (i) ऋणात्मक (ii) धनात्मक (iii) धनात्मक

C: (i) ऋणात्मक (ii) धनात्मक (iii) ऋणात्मक

8. (i) 3 (ii) $\frac{4}{3}$ (iii) $-2\sqrt{3}$

9. (i) $\frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta}$ (ii) 1

प्रश्नावली–4

1. (i) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (iii) $2+\sqrt{3}$

(iv) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (v) $-(2+\sqrt{3})$ (vi) $2+\sqrt{3}$

2. $\frac{171}{221}, \frac{21}{221}$

3. $1, \frac{-7}{25}$

4. $\frac{1}{7}$

5. $-\frac{278}{29}$

6. (i) $\sin A\cdot\cos B\cdot\cos C+\cos A\cdot\sin B\cdot\cos C+\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$
$-\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$

(ii) $\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C-\sin B\cdot\sin C\cdot\cos A-\sin A\cdot\sin C\cdot\cos B$
$-\sin A\cdot\sin B\cdot\cos C$

(iii) $\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C}{1-\tan A\cdot\tan B-\tan B\cdot\tan C-\tan C\cdot\tan A}$

11. (i) न्यूनतम मान –2 महत्तम मान 2

(ii) न्यूनतम मान −25 महत्तम मान 25

प्रश्नावली-6

1. $\frac{120}{169}$ 2. $\frac{3713}{4225}$ 3. a [illegible]

4. 296 5. $\frac{-23}{27}$

प्रश्नावली-7

1. (i) धनात्मक (ii) धनात्मक

2. (i) धनात्मक (ii) धनात्मक

3. $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

प्रश्नावली-9

1. (i) 30°,330° (ii) 60°,300° (iii) 120°,300°
(iv) 60°,120° (v) 210°,330° (vi) 240°,300°
(vii) 135°,315° (viii) 120°,240° (ix) 45°,135°
(x) 0°,180°,360° (xi) 45°,225° (xii) 90°,270
(xiii) 135°,315° (xiv) 30°,150°,210°,330° (xv) 60°,240°
(xvi) 45°,135°,225°,315° (xvii) 135°,225° (xviii) 60°,120°,240°,300°

2. (i) 60°,120°,240°,300° (ii) 30°,150°,210°,330°
(iii) 0°,180°,360° (iv) 30°,150°
(v) 30°,90°,150°,270° (vi) 30°,90°,150°
(vii) 60°,300° (viii) 30°,150°
(ix) 0°,60°,300°,360° (x) 60°,300°
(xi) 60°,180°,300° (xii) 60°
(xiii) 30°,150°,270° (xiv) 30°
(xv) 0°,120°,240°,360° (xvi) 90°
(xvii) 54°,270° (xviii) 225°,315°
(xix) 60° (xx) 45°,135°,225°,315°

(xxi) $30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$ (xxii) $30^\circ, 150^\circ$

(xxiii) $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 240^\circ$ (xxiv) $45^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 240^\circ$

(xxv) $0^\circ, 360^\circ$ (xxvi) $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ$

(xxvii) $22\frac{1}{2}^\circ, 45^\circ, 67\frac{1}{2}^\circ, 90^\circ, 112\frac{1}{2}^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 270^\circ$

(xxviii) $0^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 270^\circ$

(xxix) $15^\circ, 75^\circ$

प्रश्नावली–10

1. (i) $c = 2, 1$

$B = 60^\circ, 120^\circ$

$c = 90^\circ, 30^\circ$

(ii) $a = 3+\sqrt{3}, 3-\sqrt{3},$

$A = 75^\circ, 15^\circ$

$B = 60^\circ, 120^\circ$

(iii) $a = 3+\sqrt{3}, 3-\sqrt{3}$

$A = 105^\circ, 15^\circ$

$C = 45^\circ, 135^\circ$

(iv) $b = 3+\sqrt{3}$

$A = 45^\circ$

$B = 75^\circ$

(v) $a = 3\sqrt{3}$

$A = 60^\circ$

$C = 90^\circ$

(vi) $C = 2\sqrt{2}$

$A = 30^\circ$

$B = 90^\circ$

2. $\frac{2}{5}$ 9. $\frac{1}{5}, \frac{1}{2}$ 10.(i) $\frac{4}{\sqrt{41}}, \frac{4}{5}, \frac{8}{31}$ (ii) $\frac{40}{41}, \frac{7}{25}, \frac{496}{497}$

इकाई-2

प्रश्नावली-1

1. $a = 1; b = 8$

2. $A \times B = \{(1,2014),(2,2014),(3,2014)\}$

$B \times A = \{(2014,1),(2014,2),(2014,3)\}$

नहीं $(A \times B \neq B \times A)$ अर्थात दोनों कार्तीय गुणन समान नहीं है।

4. $A \times B = \{(2013,1001),(2013,5050),(2013,111),(2014,1001),$
$(2014,5050),(2014,111)\}$

$B \times A = \{(1001,2013),(1001,2014),(5050,2013),(50,50,2014)$
$(111,2013),(111,2014)\}$

5. $A = \{1,2,3,4\}$

दिये गये अवयवों के अलावा $A \times A$ के अवयव-

$(1,1),(1,3),(1,4)(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),$
$(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)$

6. *Ans.* $A = \{a,b,c\}, B = \{1,2\}$

7. *Ans.* 512

8. *Ans.* (i) $x = 4, y = 1$

प्रश्नावली-2

3. प्रांत $= \{0,1,2,3,4,5\}\}$. परिसर $= \{5,6,7,8,9,10\}$

4. $R = \{(1,3),(1,5),(3,5),(3,3),(5,3),(5,5),(2,6),(2,8),(4,6),$
$(4,8),(6,6),(6,8)\}$

5. $2^6 = 64$

6. (i) $\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,6),(2,4,),(2,6),(2,2),(4,4),(6,6),(3,3),(3,6)\}$

(ii) R का प्रांत $= \{1,2,3,4,6\}$

(iii) R का परिसर $= \{1,2,3,4,6\}$

7. R का प्रांत $= Z$

R का परिसर $= Z$

8. समुच्चय $A=\{a,b,c\}$

(i) $R=\{(a,b),(b,a),(a,a)\}$

(ii) $R=\{(a,b),(a,a)\}$

(iii) पूर्णांकों के समुच्चय में $R=\{(x,y):|x-y|<1, x,y\in \mathbf{Z}\}$ स्वतुल्य तथा सममित है, परन्तु संक्रामक नहीं है।

(iv) समुच्चय $A=\{a,b,c\}$ में $R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c)\}$ स्वतुल्य, संक्रामक है परन्तु सममित संबंध नहीं है।

(v) समुच्चय $A=\{a,b,c\}$ में $R=\{(a,a),(a,b),(b,b),(b,a)\}$ सममित, संक्रामक है परन्तु स्वतुल्य संबंध नहीं है।

11. स्वतुल्य नहीं, सममित नहीं और न संक्रामक।

16. समकोण त्रिभुज, जिनकी भुजाएँ 5,12,13 और 10,24,26 हैं, आपस में दिये गये संबंध R द्वारा संबंधित है।

समकोण त्रिभुज जिनकी भुजाएँ 3,4,5 और 9,12,15 हैं, आपस में संबंधित हैं।

17. (i) स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक में से कोई नहीं।

(ii) स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक में से कोई नहीं।

(iii) R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक संबंध है।

(iv) स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक में से कोई नहीं।

(v) स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक में से कोई नहीं।

(vi) संक्रामक है, परन्तु स्वतुल्य, सममित संबंध नहीं है।

(vii) संक्रामक है, परन्तु स्वतुल्य, सममित संबंध नहीं है।

18. R तुल्यता संबंध नहीं है।

19. R स्वतुल्य, संक्रामक संबंध है परन्तु सममित नहीं है।

20. R स्वतुल्य, संक्रामक नहीं है परन्तु सममित संबंध है।

प्रश्नावली-3

2. $f\{f(x)\}=x^4-6x^3+10x^2-3x$

12. $f(2)=6, \quad f(3)=11$

13. -32

14. 8

15. $-\frac{6}{5}$

16. $\frac{30}{43}$

प्रश्नावली-4

1. f का प्रांत $= \{1,2,3,4\}$, तथा परिसर $= \{1,5,9\}$
2. f का प्रांत $= [0,10]$, परिसर $= [0,4] \cup (6,30]$
3. f का प्रांत $= R - \{2,6\}$
4. प्रांत $= [2,\infty)$, परिसर $= [2,\infty)$
5. प्रांत $= R = (-\infty,\infty)$, परिसर $[0,\infty)$
6. $f(x)+g(x)=3x-2,\ f(x)-g(x)=-x+4,\ \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+1}{2x-3},\ x\neq\frac{3}{2}$
7. f का परिसर $= \{3,5,11,13\}$
8. f का परिसर $= [0,1)$
9. $p=2, q=-1$
10. (i) प्रांत $= (-\infty,\infty)$ (ii) प्रांत $= R - \{1,3\}$
    (iii) प्रांत $= [-1,1]$ (iv) प्रांत $= (-\infty,0) \cup (3,\infty)$
    (v) प्रांत $= (0,4)$ (vi) $(-\infty,1] \cup [2014,\infty)$
    (vii) $(-\infty,0) \cup (0,1)$ (viii) $(0,\infty) - \{1\}$
    (ix) $[-1,1]$ (x) *EmptySet*
    (xi) $R - \{0\}$ (xii) $(0,\infty)$
    (xiii) $R = (-\infty,\infty)$ (xiv) R
    (xv) $R - \{0\}$
11. (i) $[2,3)$ (ii) $(-\infty,-1) \cup (2,\infty)$
    (iii) $(0,1) \cup (1,\infty)$ (iv) $[-2,2)$
    (v) $(-\infty,0)$ (vi) $(-\infty,\infty)$

(vii) $(-\infty,\infty)-[0,1]$ (viii) $(-4,4)$

(ix) $(-\infty,-2)\cup(-2,0]\cup[1,2)\cup(2,\infty)$

(x) $(0,1)$

12. (i) $[-1,1]$ (ii) $[0,1]$ (iii) $[0,2]$

(iv) $[0,\infty)$ (v) $[0,\infty)$ (vi) $(-\infty,\infty)$

(vii) $(0,\infty)$ (viii) $[0,2]$ (ix) $[\frac{3}{7},1]$

(x) $[0,1]$ (xi) $[1,\sqrt{2}]$ (xii) $[2,\infty)$

(xiii) $[-13,13]$ (xiv) $[0,10]$ (xv) $[\frac{3}{4},\infty)$

(xvi) $[\frac{3}{4},\infty)$ (xvii) $[\frac{3}{4},3]$ (xviii) $[\frac{7}{4},4]$

(xix) $[\sqrt{2},2]$ (xx) $[0,\infty]$

13. (i) a (ii) b (iii) c

(iv) a (v) a (vi) b

(vii) a

प्रश्नावली-5

1. 1 2. $\pi-\frac{22}{7}$ 3. $\frac{22}{7}-\pi$ 4. π 5. -1

6. $-\frac{1}{2}$ 7. $-\frac{b}{a}$ 8. 2 9. $-\frac{1}{4}$ 10. $\frac{108}{7}$

11. 1 12. $\frac{a}{6}$ 13. $\frac{1}{\pi}$ 14. $\frac{4}{7}$ 15. 0

16. $\frac{3}{2}$ 17. 2 18. परिभाषित नहीं है। 19. 0

20. $\frac{b^2-a^2}{2}$ 21. $\frac{2}{p+q}$ 22. $\frac{p-9}{2}$ 23. 2 24. 0

25. 10 26. $x=1$ पर सीमा का अस्तित्व नहीं है।

27. $\lim_{x\to a_1} f(x)=0$ और $\lim_{x\to a} f(x)=(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)\ldots(a-a_n)$.

28. 1 29. $p=0, q=5$ 30. 4

प्रश्नावली-6

1. $\dfrac{-2}{(x-1)^2}$

2. $\dfrac{-(2px+q)}{(px^2+qx+r)^2}$

3. $\dfrac{pb-aq}{(ax+b)^2}$

4. $-\operatorname{cosec}^2 x\cos x$

5. $2\sin x\cos x$

6. $\cos x$

7. $\operatorname{cosec} x-2\operatorname{cosec}^3 x$

8. $\dfrac{-49}{x^2}+\dfrac{2b}{x^3}+\sec^2 x$

9. $(ax+b)^{m-1}(cx+d)^{n-1}.\{ac(m+n)x+nbc+mad\}$

10. $\sec x(\tan x+\sec x)$

11. $\sec^2(x-\frac{\pi}{4})$

12. $\dfrac{5}{2\sqrt{x}}$

13. $-\sin(x-\frac{\pi}{8})$

14. $\operatorname{cosec} x-x\cot x\operatorname{cosec} x$

15. $\dfrac{28(\sin x-n\cos x)-15(x\sin x+\cos x)-35}{(3x+7\sin x)^2}$

16. $(1-\sin x)(x-\tan x)+(x+\cos x)(1-\sec^2 x)$

17. $\dfrac{x^4(5\sin x-x\cos x)+1}{\sin^2 x}$

18. $\dfrac{(a-\sin x)\tan x-(4x+5\cos x)(3+7\cos x)}{(3x+7\sin x)^2}$

19. $-\cos x(3\operatorname{cosec} x+5\cot x)$

20 $\sec x(2\sec x-7\tan x)$

21. 2

22. $25x^4-6x^2-2x-3$

23. $4ax(ax^2+b)$

24. $2x-(p+q)$

25. $\dfrac{p-q}{(x-q)^2}$

26. $5\sec x\tan x-4\sin x$

https://www.studiestoday.com

27. $\frac{12}{x^5}-\frac{15}{x^4}$

28. $\sin 2x$

29. $-\sin 2x$

30. $2\tan x\sec^{2x}$

31. $2\cos(2x+a+b)$

32. $-2\sin(2x+b+q)$

33. $\frac{\tan(x+b)\sec^2(x+a)-\tan(x+a)sic^2(x+b)}{\tan^2(x+b)}$

34. $n\sin^{n-1} xcasx$

35. $\frac{\sin^n x-n^x \sin^{n-1} x\cos x}{\sin^{2n} x}$

36. $mx^{m-1}\cos x - nx^m \cos^{n-1} x\sin x$

37. $e^x \log_e x+\frac{e^x}{x}$

38. $(\cos x-\sin x)$

39. $e^{-x}(\cos x-\sin x)$

40. $e^{ax}(a\sin bx+b\cos x)$

41. $\frac{\log_e x-1}{(\log_e x)^2}$

42. $\left(\frac{1}{x^{ax}}-\frac{\log_e x}{e^{2x}}\right)$

43. $nx^{n-1}-\frac{n}{x^{n+1}}$

44. $\frac{\cot x+x\operatorname{cosec}^2 x}{\cot^2 x}-\sin x$

45. $\frac{-3}{(x+1)^2}-\frac{2x}{3x-1}+\frac{3x^2}{(3x-1)^2}$

प्रश्नावली-7

1. $\frac{\sin 3x}{3}+c$

2. $\frac{e^{3x}}{3}+c$

3. $\frac{(px-q)^3}{3p}+c$

4. $\frac{\tan 3x}{3}+c$

5. $-\frac{\cos 2x}{2}-\frac{3}{5}e^{5x}+c$

6. $\frac{\sec 2x}{2}+c$

7. $\frac{x^2}{2}-\log|x|+c$

8. $\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}-2x^{\frac{1}{2}}+c$

9. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x+c$

10. $\frac{x^2}{2}-\log|x|+c$

11. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+c$

2. $x^3+3\cos x+e^x+c$

13. $\frac{6}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$

4. $\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2x^2}+3(\frac{x^2}{2}+\log|x|)+c$

15. $3\tan x-2\sec x+c$

16. $x^4+\frac{12}{x^3}+c$

17. $\left(\frac{5^x}{\log_5}-\frac{6^x}{\log_6}\right)+c$

18. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+c$

19. $\frac{3^x}{\log_3}+\frac{5^x}{\log_5}+c$

20. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+c$

21. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+c$

22. $-\cot x-x+c$

23. $\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 2x}{2}-\frac{\cos 4x}{4}\right)+c$

24. $-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 5x}{5}+\cos x\right)+c$

25. $(\cos x-\sin x)+c$

26. $(\sin x+\cos x)+c$

27. $\frac{x^3}{3}+x+c$

28. $\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x+c$

29. $\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}-x+c$

30. $\frac{e^{2x}}{2}+\frac{5^x}{\log 5}-\log|x|+c$

प्रश्नावली-8

1. $2\tan\frac{1}{2}-x+c$

2. $-2\cot\frac{x}{2}-x+c$

3. $\frac{1}{2}\log(x^2+a^2)+c$

4. $\frac{1}{2}\log|x^2-a^2|+c$

5. $\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$

6. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{x+1-\sqrt{2}}{x+1+\sqrt{2}}\right|+c$

7. $\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin(4x+10)+c$

8. $\frac{x}{2}+\frac{1}{12}\sin(6x+10)+c$

9. $\frac{1}{4}\left(\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 8x}{8}+\frac{\sin 12x}{12}+x\right)+c$

10. $\frac{1}{2}\log\cos 2x+\frac{1}{3}\log\cos 3x-\frac{1}{5}\log\cos 5x+c$

11. $x\cos 5-\sin 5\log\sin(x+5)+c$

12. $\log(5^x+x^5)+c$

13. $-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+c$

14. $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+c$

15. $\frac{(\log x+1)^3}{3}+c$

16. $\frac{1}{18}\log\left|\frac{x^3-3}{x^3+3}\right|+c$

17. $\frac{1}{12}\log\left|\frac{3x-1}{3x+3}\right|+c$

18. $-\log(1+e^{-x})+c$

19. $\frac{1}{3}\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+c$

20. $-\text{cosec}\,x+c$

इकाई-3

प्रश्नावली-1

2. त्रिभुज
4. 6 वर्ग इकाई
6. (i) लम्ब (ii) समानान्तर (iii) समानान्तर (iv) लम्ब
7. (i) (5,5), (6,6), (0,3), (-1,-3) समानान्तर चतुर्भुज
8. $y=2, x=-1, x=2, y=5, y=6, x=3$
9. $y=1, x=1, y=-1, x=0, x=-3, y=-7$
10. $A(2,0)$, $B(0,3)$

प्रश्नावली-2

1. $x-y+2=0$
2. $x-4=0$
3. $\tan\alpha$ तथा $x\sin\alpha-y\cos\alpha-a\sin\alpha+b\cos\alpha=0$
4. $(p-r)x-(r-q)y+q^2-p^2-r^2+pr=0$
6. $x-y+4=0$
7. $x+y=\alpha+\beta$
8. $4x-3y+12=0$
9. $x+\sqrt{3}y-4=0$
10. $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$, $\frac{x}{5}+\frac{y}{5}=1$, $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=1$

प्रश्नावली-3

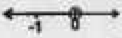
(1) (i) $\{1,2,3,4\}$ (ii) $\{...-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$

(2) $(-\infty,2)$

(3) $\{...-4,-3,-2,-1,0,1\}$

(4) (i) $(-\infty,6)$ (ii) $(-\infty,-3)$ (iii) $(-\infty,-3)$ (iv) $(-\infty,-6)$
(v) $(-\infty,2)$ (vi) $(4,\infty)$

(5) (i) $x<3$ 

(ii) $x \geq -\frac{2}{7}$ 

(iii) $x>-1$ 

(iv) $x \geq -1$ 

(v) $x<3$ 

(vi) $x \geq 1$ 

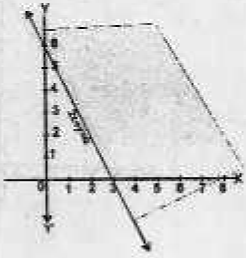
(6) 9c.m

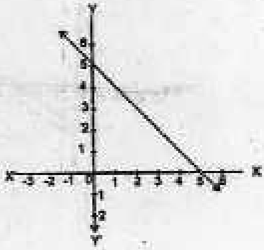
(7) ≥ 65

(8) (5,7),(7,9)

(9) (6,8),(8,10),(10,12)

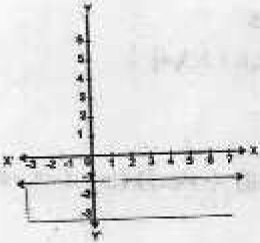
प्रश्नावली-4

1. 

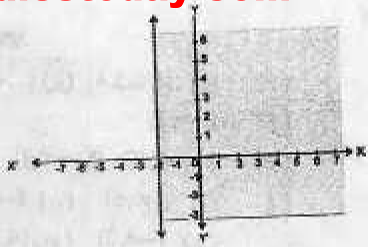
2. 

https://www.studiestoday.com

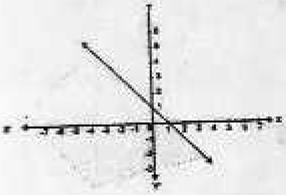
3.



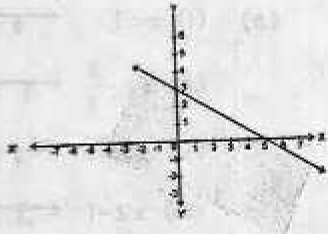
4.



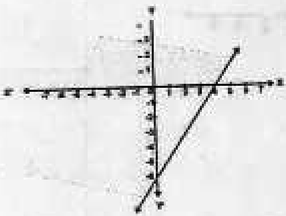
5.



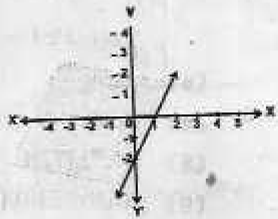
6.



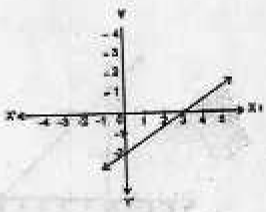
7.



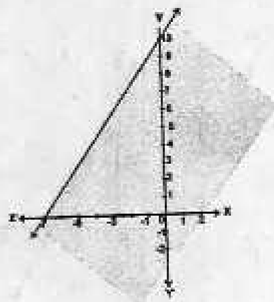
8.



9.



10



https://www.studiestoday.com

इकाई-4

प्रश्नावली-1

1. (i) 1,4,9,16,25 (ii) $\frac{-1}{5},\frac{2}{5},1,\frac{8}{5},\frac{11}{5}$

(iii) $\frac{1}{2},\frac{2}{5},\frac{3}{10},\frac{4}{17},\frac{5}{26}$ (iv) 25,–125,625,–3125,15625

2. $\frac{1}{90}$

3. (i) 3,3,6,9,........ (ii) $-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{6},-\frac{1}{24},-$..........

(iii) 2,2,1,0,............ (iv) $1,2,\frac{-4}{3},2,$........

4. 65,93

5. 729

6. $1,2,\frac{3}{2},\frac{5}{3}$ और $\frac{8}{3}$

प्रश्नावली-2

1. 39
2. 16वाँ पद
3. नहीं
4. 1002001
5. 128
6. 60
7. 9,13,17,21,25
8. 98450
9. 5 या 20
10. 4,10,16,22,......
11. अंतिम पद से 20वाँ पद 158 है।
12. 5वाँ पद
13. 100
14. $\frac{n(5n+7)}{2}$
15. $-(p+q)$
17. 1
18. 14
19. 245 रूपये
20. वर्ष 2005

प्रश्नावली-3

1. $\frac{3}{2^{15}}$
2. 16,24,36,54,..........
3. 3,6,12,24,........

4. 3 या -3 5. 4, 6, 9 या 9, 6, 4

6. प्रथम पद $= \frac{5}{2}$ या $\frac{2}{5}$ सार्व अनुपात $\frac{2}{5}$ या $\frac{5}{2}$, प्रथम तीन पद $= \frac{5}{2}, 1, \frac{2}{5}$ या $\frac{2}{5}, 1, \frac{5}{2}$

7. 10 8. $\frac{7}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{9}-n\right]$ 10. ± 1

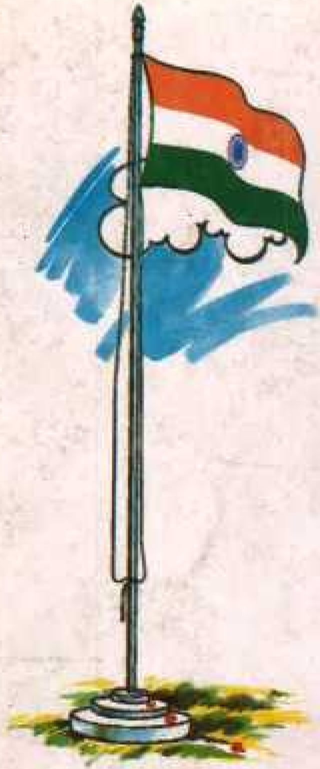
11. $\frac{1}{2}(3^{n+1}-2^{n+2}+1)$ 14. 9 और 27 16. $x^2-16x+25=0$

प्रश्नावली-4

1. $2^{n+1}-2-n$ 2. $\frac{1}{2}[3^n+8n-1]$ 3. $\frac{n(n+1)(n+5)}{3}$

4. 4960 5. $\frac{n(n+1)}{12}\cdot(3n^2+23n+34)$ 6. $\frac{100}{101}$

7. 91 8. $\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$ 9. $\frac{1}{4}n^2(n^2-1)$



राष्ट्र-गान

जन-गण-मन-अधिनायक जय
भारत - भाग्य - विध
पंजाब सिंध गुजरात मरा
द्राविड़ - उत्कल -
विंध्य - हिमाचल - यमुना-
उच्छल - जलधि - त
तव शुभ नामे
तव शुभ आशिष
गाहे तव जय गा
जन-गण-मंगलदायक जय
भारत - भाग्य - विधा
जय हे, जय हे, जय
जय जय जय जय

बिहार स्टेट टेक्स्टबुक पब्लिशिंग कॉरपोरेशन लिमिटेड, बुद्ध मार्ग, पटना-
BIHAR STATE TEXT BOOK PUBLISHING CORPORATION LTD., BUDH MARG, PATNA-

मुद्रक : बब्लू बाईंडिंग हाउस, पटना कोल्ड स्टोरेज, शाहगंज, पटना-800 0

https://www.studiestoday.com